UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

BINDING LIST AUG 1 1923

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci38fran

7330

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.

# COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président*.

E. PICARD.

P. APPELL.

E. BOREL.

N.....

A. GUILLET, *secrétaire*.

## AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Ernest Lebon*, Secrétaire de la Rédaction, rue des Écoles, 4 *bis*, Paris, 5e.

53476 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins.

3

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. APPELL, E. CARTAN, J. DRACH, P. DUHEM, C. GUICHARD, J. HADAMARD,
G. KŒNIGS, ER. LEBON, S. RINDI, H. G. ZEUTHEN, ETC.,

**Sous la direction de la Commission des Hautes Études.**

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY;
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY
ET DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY.

*DEUXIÈME SÉRIE.*

**TOME XXXVIII. — ANNÉE 1914.**

(XLIX^e VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179882
24/4/23

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1914

QA
1
B8
v.49

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.


## PREMIÈRE PARTIE.

### COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LEONHARDI EULERI. — MECHANICA SIVE MOTUS SCIENTIA ANALYTICE EXPOSITA. Edidit PAUL STÄCKEL. Tomus primus : *Adiecta est Euleri effigies ad imaginem a Webero aeri incisam expressa;* in-4, XIV-407 pages. Tomus alter : in-4, VII-460 pages. (*Leonhardi Euleri Opera omnia sub Auspiciis Societatis scientiarum naturalium helveticœ edenda curaverunt* FERDINAND RUDIO, ADOLF KRAZER, PAUL STÄCKEL. Series II, *Opera mechanica et astronomica.*) Lipsiæ et Berolini, typis et in aedibus B.-G. Teubneri, MCMXII.

Dans le numéro d'octobre 1912 du *Bulletin*, nous avons annoncé la publication de trois Volumes de la grande édition qui doit, pour la première fois, mettre les mathématiciens à même d'étudier toutes les œuvres de l'illustre géomètre bâlois; ces Volumes étaient ceux qui concernent l'*Algèbre* et la *Dioptrique*, et nous avons fait remarquer que cette publication était menée avec une activité dont il ne semble pas y avoir eu d'exemple jusqu'à présent. Cette activité ne s'est pas ralentie, car nous avons sous les yeux les deux Volumes de la *Mécanique* d'Euler, édités par M. Paul Stäckel.

Ce grand Ouvrage parut à Pétersbourg en 1736, et voilà, selon Condorcet, comment il fut accueilli par le public :

« Le *Traité de Mécanique* que M. Euler donna en 1736 est le premier grand Ouvrage où l'analyse ait été appliquée à la science du mouvement. Le nombre des choses neuves, ou présentées d'une manière nouvelle, qui entrent dans ce Traité eût étonné les géomètres, si M. Euler n'en eût déjà publié séparément la plus grande partie. »

Or, en 1736, Euler n'avait encore que 29 ans!

Les deux Volumes dont il s'agit sont de format grand in-4° ($30^{cm} \times 22^{cm}$). On a fait usage d'un papier qui rend leur conservation assurée, et l'impression a certainement été faite avec le plus grand soin.

Le premier Volume se compose de XIV pages d'Introduction, et du texte proprement dit, qui en comprend 407.

En tête de ce Volume, nous trouvons un magnifique portrait d'Euler, reproduction par l'héliogravure de l'œuvre d'un peintre et d'un graveur, bâlois tous les deux, Em. Handamann et Frid. Weber; au-dessous, on lit l'inscription suivante :

*LEONHARDI EULERI BASILIENSIS*
*imaginem*
*aeri incidendam curavit*
*grata civitas.*
*MDCCCLI.*

Il s'agit donc, on le voit, d'un hommage rendu à Euler par ses concitoyens, il y a longtemps déjà.

Dans l'*Introduction* écrite en langue allemande qu'il a mise en tête du Volume, M. Stäckel nous apprend que lorsque Euler se fit recevoir maître ès arts (docteur), à l'âge de 19 ans, ce fut en soutenant une thèse relative aux tautochrones dans un milieu résistant; cette thèse fut publiée dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig. A cette première époque de sa vie, il s'appliqua spécialement à la Mécanique, car, sur 28 publications qu'il soumit à l'Académie de Pétersbourg depuis le moment où il en fit partie (été de 1727) jusqu'à la fin de l'année 1734, il y en avait 9 qui traitaient des sujets de pure Mécanique, et 11 autres, où il s'agissait de la som-

mation des séries, de l'intégration des équations différentielles, des lignes les plus courtes tracées sur des surfaces courbes, du problème des isopérimètres, étaient pourtant en relation étroite avec cette dernière science. En outre, à cette période de sa vie, Euler étudia beaucoup les œuvres de Galilée, Huygens et Newton, où se trouvent les fondements de la Mécanique, où l'on voit le développement de cette science et ses applications, et en même temps, il s'était familiarisé avec les Livres où Leibniz, Jean et Jacques Bernoulli, Hermann et d'autres encore avaient appliqué la nouvelle analyse de l'infini à la solution des problèmes de Mécanique.

Tous ces travaux préliminaires amenèrent Euler à concevoir le plan d'un Traité embrassant l'ensemble de la Mécanique. « La différence de nature des corps, nous dit-il lui-même (*Mechanica*, t. I, § 98), nous donnera immédiatement la division capitale de notre œuvre : en premier lieu, nous aurons à considérer des corps infiniment petits, pouvant être considérés comme des points; puis nous aurons à nous occuper des corps de dimensions finies, mais qui en même temps sont solides, c'est-à-dire que leur figure est inaltérable. En troisième lieu, il s'agira des corps flexibles; quatrièmement des corps susceptibles de se dilater ou de se laisser comprimer; cinquièmement, nous en viendrons à l'étude du mouvement de corps distincts, agissant les uns sur le mouvement des autres, et l'altérant. Sixièmement enfin, il s'agira du mouvement des fluides. »

Cette grande entreprise n'a pu être exécutée qu'en partie, et Euler attribue cet insuccès relatif aux circonstances défavorables qui se sont présentées. Dès le premier pas, il s'élève contre ces difficultés. Dans une lettre qu'il adresse à Daniel Bernoulli, vers la fin de 1734, on voit qu'il a peu d'espérance de réussir à faire imprimer sa *Mechanica*, dont la première Partie est dès maintenant terminée ([1]). Grâce à l'appui du baron J.-A. v. Korff, qui régissait alors les affaires de l'Académie, il parvint toutefois à publier la première et la seconde Partie de sa *Mechanica*, où se trouve exposée la cinétique du point matériel, comme Volumes supplémentaires des Mémoires de l'Académie de Pétersbourg, et

([1]) *Bibliotheca Mathematica*, $7_3$, 1906, p. 139.

il témoigna de sa reconnaissance envers son protecteur en lui dédiant son Ouvrage. Le Volume où Euler a traité de la mécanique des corps solides ([1]), prêt dès 1760, ne trouva d'éditeur qu'en 1765. Au lieu du Volume qu'Euler voulait consacrer à la mécanique des fluides, il soumit, en 1766, quatre dissertations très étendues à l'Académie, qui les publia en 1769 et 1772.

Il va sans dire que la préparation de ces Volumes et de ceux qui sont restés à l'état de projet avait été l'occasion de nombreux travaux préliminaires que l'édition publiée actuellement n'aura garde de laisser de côté, elle les réunira et leur donnera une nouvelle vie.

Ainsi, les deux beaux Volumes dont nous avons à rendre compte ne traitent que de la mécanique du point matériel. Ces deux Volumes ouvrent la seconde série des *Opera omnia*, consacrée exclusivement à la Mécanique et à l'Astronomie.

Nous trouvons d'abord la reproduction en fac-similé du titre de l'édition originale; ce titre est :

*Mechanica, sive motus scientia analytice exposita, auctore Leonhardo Eulero, Academiæ imper. scientiarum membro et Matheseos sublimioris professore, Tomus I, instar supplementi ad Commentar. Acad. scient. Petropoli, ex typographia Academiæ scientiarum. A.* 1736.

Puis vient, encore en fac-similé, la dédicace : *Viro illustri atque excellentissimo Joanni Alberto de Korff, domino hæreditario prædiorum Rengenhoffiensium, Serenissimae atque Potentissimae Russorum Imperatricis camerario ordinario atque Academiæ scientiar. imper. Præfecto.*

Nous trouvons ensuite la lettre par laquelle Euler présente son œuvre à M. de Korff. Dans cette lettre, l'auteur apprécie son Ouvrage dans les termes suivants qu'il y a peut-être intérêt à reproduire. On voit qu'il s'est proposé un double but pour se conformer aux instructions de son protecteur, il a cherché à avancer la science et aussi à en améliorer l'enseignement :

« Equidem in hoc tractatu de motu utrique horum officiorum

---

([1]) *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (Röse, Rostock et Greifswald).

quæ requiris, satisfecisse mihi videor; primo enim omnia ordine ad docendum maxime idoneo disposui, atque in iis explicandis perpetuo usus sum methodo analytica, quæ synthesi in instruendo merito longe præferri solet. Deinde vero non pauca omnino nova passim adieci, quibus hanc de motu scientiam pro viribus adauxi atque locupletavi. Hunc ergo laborem meum, quem tam docentibus quam discentibus non inutilem fore confido, ut benigne excipere digneris enixe rogo atque obsecro, meque Tuo favori atque benevolentiæ submisse commendo. »

Cette dédicace est datée du 1er août 1736.

L'œuvre proprement dite commence par une Préface. Euler nous y fait remarquer tout d'abord que, depuis longtemps, le mot de Mécanique a une double signification et désigne deux sciences absolument distinctes, tant par la nature de leurs principes que par celle de leurs objets. On donne ce nom à la science qui traite de l'équilibre des forces et de leur comparaison entre elles, et aussi à celle qui s'occupe de la nature du mouvement considéré en lui-même, de son origine, des altérations qu'il éprouve. Bien que, dans le second cas, il s'agisse encore surtout des forces, en tant qu'elles engendrent ou modifient le mouvement, ce second cas diffère fort du premier. Pour éviter toute ambiguïté, il convient de donner le nom de Statique à la science qui traite de l'équilibre et de la comparaison des forces, en laissant le nom de Mécanique à l'autre science qui s'occupe du mouvement. Ces deux sciences sont d'ailleurs loin d'être contemporaines, car on avait commencé l'étude de la Statique antérieurement à Archimède, tandis que c'est Galilée qui établit les fondements de la Mécanique, quand il fit ses recherches sur la chute des corps. Mais, depuis l'invention de l'Analyse infinitésimale, ces deux sciences ont fait de tels progrès, qu'en comparaison de ceux-ci, ce qu'on avait fait auparavant, pendant tant de siècles, n'a pour ainsi dire plus aucune importance. Malheureusement, toutes ces découvertes qui sont venues accroître la Science jusqu'à nos jours se trouvent dispersées dans un si grand nombre de journaux et d'ouvrages distincts qu'il est extrêmement pénible, pour l'homme qui s'intéresse à ce genre d'études, de les rassembler et de s'en pénétrer. En outre, ce qui engendre la plus grande difficulté, c'est que, de ces nouvelles vérités, les unes sont

proposées sans aucune analyse et sans démonstration, les autres avec des démonstrations trop complexes et telles que les donnaient les anciens; d'autres enfin dérivent de principes distincts et se présentant peu naturellement, si bien qu'il n'est pas possible de s'en rendre maître sans un très grand travail et une très grande perte de temps.

En ce qui concerne la Statique, nous trouvons l'Ouvrage presque complet et ne contenant aucun calcul numérique, dû à Varignon. Ce Livre est en deux Volumes et est écrit en français. Bien qu'il porte le titre de *Mécanique*, il n'y est question que de l'équilibre des forces de toute nature appliquées aux corps et il ne s'y trouve rien qui se rapporte au mouvement et à cette science à qui nous donnons ici le nom de Mécanique. De même, le célèbre Wolf, dans ses *Matheseos Elementa*, a mis au jour beaucoup de choses remarquables, concernant aussi bien la Statique que la Mécanique, et il n'a fait aucune distinction entre ces deux sciences. Il semble que les limites de son œuvre, et l'esprit dans lequel il l'a écrite ne lui aient pas permis de faire cette distinction, non plus que de les développer suffisamment l'une ou l'autre. Aussi, Euler ignore-t-il si, jamais, il a été publié un Ouvrage comparable à la *Phoronomia* d'Hermann [1], car ce dernier, après avoir travaillé personnellement à l'accroissement de la Science, a su tirer parti des décou-

---

[1] Hermann (Jacques) naquit le 16 juillet 1678 à Bâle et y mourut le 11 juillet 1733. Il était donc le compatriote d'Euler et des Bernoulli, et il étudia les Mathématiques sous la direction de ces derniers. Son premier Ouvrage, publié à Bâle en 1700, a pour titre : *Responsio ad V. C. Nieuwentyt, considerationes secundas circa calculi differentialis principia.* Dans ce Livre, il réfute le Hollandais Nieuwentyt (1654-1718) qui avait attaqué Leibniz. Cela lui valut la protection du grand philosophe, à la recommandation duquel il obtint en 1707 une chaire de Mathématiques à Padoue. Hermann occupa cette chaire jusqu'en 1713, se rendit alors à Francfort et de là à Pétersbourg, où il enseigna les Mathématiques jusqu'en 1731, époque où il regagna sa ville natale qu'il ne quitta plus jusqu'à sa mort. Il était membre des Académies de Bologne, de Berlin, de Pétersbourg et de Paris. Ses principaux Ouvrages sont *Phoronomia, sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo*, Bâle et Amsterdam, 1715, in-4°. — *Abrégé de Mathématiques*, Pétersbourg, 1728-1730, Ouvrage où il a eu pour collaborateur le célèbre astronome français Delisle, qui dirigeait l'Observatoire fondé par Pierre le Grand. *Méthode de trouver l'orbite des planètes en supposant que leurs forces centrales sont en raison réciproque des carrés de leurs distances* (*Giornale de Litterati*, t. II, p. 447, et t. V, p. 312). — *Méthode facile de déterminer la loi des forces centrales* (*Ibid.*, t. XIII, p. 321). Plu-

vertes de ses contemporains. Mais, comme son œuvre, trop peu développée, embrassait, en plus de la Mécanique, les sciences voisines, à savoir la Statique, et l'Hydrostatique jointe à l'Hydraulique, l'espace a fait défaut pour la première, et ce qui la concerne a été traité avec beaucoup trop de concision. En outre, Hermann n'a fait usage que de démonstrations purement géométriques, selon l'usage des anciens, et il a dissimulé l'analyse qui lui a permis d'arriver à une connaissance complète de son sujet, et cela est regrettable pour le lecteur. Il en est à peu près de même des *Principia Mathematica Philosophiae*, de Newton, qu'il suffit de nommer. Ce Livre a fait vigoureusement progresser la science du mouvement. Mais tous les Ouvrages composés sans l'emploi de l'Analyse, et ceux de Mécanique encore plus que les autres, ont ce défaut que le lecteur, même s'il est convaincu de la vérité des propositions qui s'y trouvent exposées, ne peut arriver à en acquérir une connaissance assez nette et assez claire pour pouvoir résoudre les mêmes questions par ses propres forces, pour peu qu'on leur ait fait subir quelque modification, si petite soit-elle.

Ici, laissons la parole à Euler lui-même :

« C'est tout à fait ce qui m'est arrivé, nous dit-il, quand je commençai à m'occuper des *Principia* de Newton et de la *Phoronomia* d'Hermann, et bien qu'il me semblât avoir suffisamment compris les solutions de plusieurs problèmes, je ne pouvais résoudre d'autres problèmes pourtant peu différents des premiers [1]. Et,

---

sieurs Mémoires dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig, dans les *Mémoires* de l'Académie des Sciences de Pétersbourg, etc.

Pourquoi Hermann a-t-il appelé *Phoronomia* et non *Mechanica*, son principal Ouvrage? Nous l'ignorons, n'ayant jamais eu ce Livre entre les mains. Toujours est-il que ce mot vient de φορα (mouvement), νομος (loi). On trouvera une assez longue analyse de la *Phoronomia* dans le douzième Volume de l'*Encyclopédie*. Cette analyse est signée D. J., ce qui veut dire qu'elle est l'œuvre du chevalier de Jaucourt, le plus actif peut-être des collaborateurs de Diderot et d'Alembert.

[1] A propos de ce passage, M. Biot a, dans un article sur la *Correspondance de Newton et de Cotes*, publié en 1853, dans le *Journal des Savants*, et reproduit dans les *Mélanges scientifiques et littéraires* (t. I), écrit ce qui suit :

« Euler n'a fait qu'exprimer ce qui est arrivé à tous ceux qui ont voulu retirer de la lecture des *Principes* un autre bénéfice que celui d'une compréhension stérile. Or, cet isolement, cet imprévu dans lequel Newton nous laisse, à chaque pas de sa route, n'existait sans doute pas pour lui. Son affectation de procéder par propositions détachées, à la manière des anciens géomètres, convenait à leurs

dès cette époque, autant qu'il m'a été possible, je me suis efforcé de tirer l'analyse de cette méthode synthétique, et pour mon utilité propre, de traiter les mêmes propositions par des procédés purement analytiques, et ce travail a notablement accru mes connaissances. J'en ai fait autant pour les autres écrits concernant cette science qui sont dispersés çà et là, et, pour mon usage personnel, j'ai employé une méthode facile et uniforme pour exposer ce qu'ils contiennent, et je l'ai mis dans l'ordre convenable. En travaillant de cette façon, non seulement j'ai rencontré beaucoup de questions qui n'avaient pas été traitées jusqu'alors, mais je suis encore parvenu à trouver de nombreuses méthodes particulières, qui semblent ne devoir pas être de petit profit, tant pour la Mécanique que pour l'Analyse elle-même. »

Ainsi donc, le but que se propose Euler est d'exposer analytiquement tant les vérités qu'il a trouvées dans les écrits des autres, que celles qu'il a découvertes par ses propres méditations. Pour diviser son œuvre, il a tenu compte tant de la différence des corps mis en mouvement, que de cette circonstance qu'ils sont libres ou ne le sont pas. La nature des corps les lui a fait diviser en deux caté-

---

investigations, dont le but final, quelque éloigné qu'il soit, est toujours isolé, unique; et, une fois saisi, vous met en possession de la vérité absolue. Mais, dans les études de Philosophie naturelle, le but est multiple. La vérité qu'il faut découvrir est partout; et l'on ne peut s'en rendre maître qu'en la circonscrivant par parties, dans des approximations numériques dont il faut assigner la portée. La synthèse des Anciens a une marche trop droite, pour des recherches si étendues, et elle est trop inflexible pour fournir de telles appréciations. Ceci a donné lieu de croire que Newton avait trouvé la plupart de ses théorèmes par le secours de l'Analyse mathématique dont il a tant agrandi la puissance, et qu'il les a ensuite traduits sous les formes austères de la synthèse, soit pour les rendre complètement inattaquables, soit pour dérober aux regards de la foule la vérité qui l'y avait conduit. C'est l'opinion de Laplace; et il en donne une preuve frappante, en citant l'équation différentielle du solide de moindre résistance, que Newton énonce, sans démonstration, comme théorème géométrique, quoique, sans doute, il n'ait pu l'obtenir que par l'analyse. La correspondance de Newton et de Cotes offre plusieurs exemples décisifs de ce fait, et l'éditeur a eu très grand soin de les signaler en mettant sous les yeux du lecteur, au bas des pages, les formules analytiques mêmes que Newton a voulu traduire géométriquement par des constructions dont Cotes conteste occasionnellement l'exactitude. »

Le passage de Laplace auquel M. Biot fait allusion se trouve dans le cinquième Chapitre du cinquième Livre de l'*Exposition du Système du Monde*. Ce Chapitre traite de la pesanteur universelle.

gories, et il a étudié d'abord les corps infiniment petits et pouvant être assimilés à des points, et compte en venir aux corps de dimensions finies, qu'ils soient rigides ou flexibles, ou bien composés de parties absolument distinctes les unes des autres (fluides). De même, en effet, qu'en Géométrie, où il s'agit de la mesure des corps, on commence en partant de points, on ne peut expliquer le mouvement des corps de grandeur finie si l'on n'a examiné avec soin le mouvement des points matériels en lesquels nous les concevons décomposés; car le mouvement d'un tel corps ayant des dimensions finies ne peut être autrement déterminé que par la définition du mouvement qui anime chacune de ses particules. L'étude du mouvement du point matériel est donc le fondement et même la partie principale de toute la Mécanique; c'est sur cette étude que reposent toutes les autres parties de cette science. Aussi l'auteur consacre-t-il à cette étude du mouvement des points matériels ces deux premiers Volumes (1): dans l'un il considère des points absolument libres; dans l'autre, les points qui ne le sont pas tout à fait. Du mouvement des points isolés on peut, en effet, déduire souvent le mouvement des corps de dimensions finies. Ainsi, si l'on sait qu'un point matériel projeté dans le vide décrit une parabole, on comprend que les corps de dimensions finies, si on les projette, décrivent aussi des paraboles, mais nous ne connaissons pas pour cela la loi du mouvement de leurs particules considérées isolément. Cette recherche sera l'objet des Livres suivants, dans lesquels il sera question du mouvement des corps de dimensions finies. C'est ainsi que Newton, ayant démontré les lois du mouvement des points matériels soumis à l'action de forces centripètes, ces lois ont pu légitimement être étendues au mouvement des planètes.

Donc, dans ce premier Tome, il étudie les points matériels libres, et examine l'altération produite sur leur mouvement par les forces qui agissent sur eux. Pour lui, d'ailleurs, un corps est libre quand il n'y a rien qui l'empêche de se déplacer selon la

(1) Ces mots, les deux premiers Volumes, nous prouvent qu'Euler avait rêvé de consacrer à la Mécanique un Ouvrage gigantesque où il aurait traité toutes les parties du programme exposé ci-dessus en une série suffisante de Volumes se faisant suite les uns aux autres. Les circonstances ne lui ont pas permis, comme nous l'avons dit plus haut, de donner à son œuvre cette forme homogène.

direction et avec la vitesse qu'il doit avoir, tant par suite du mouvement antérieur que par suite de l'action des forces auxquelles il est soumis. C'est ainsi que les planètes et, sur notre globe, les corps tombants ou projetés sont dits se mouvoir librement, parce que, en se mouvant, rien ne vient gêner l'action de la force à laquelle ils sont soumis; au contraire, un corps glissant le long d'un plan incliné, ou bien un pendule oscillant ne peuvent être considérés comme se mouvant librement; en effet, la présence du plan, comme la fixation d'une des extrémités du pendule, empêche le corps de tomber directement, comme le voudrait la pesanteur.

Dans le premier Chapitre, l'auteur expose donc les propriétés générales du mouvement, et rappelle ce qu'on a coutume de dire sur la vitesse, l'espace et le temps, et démontre les lois naturelles générales auxquelles obéit un corps libre sur lequel n'agit aucune force. Un tel corps, si on le suppose en repos, y demeurera éternellement et, s'il est animé d'un mouvement, il conservera éternellement la même direction et la même vitesse. On peut facilement exprimer ces deux lois en disant qu'il conserve son état. Cette conservation est une propriété essentielle de tous les corps, et c'est là ce qu'on appelle la *force d'inertie*. Remarquons toutefois que cette dernière expression est plutôt impropre, car l'inertie n'est pas de la même nature que les autres forces, bien nommées, celles-là, telles que la pesanteur, par exemple, et il n'y a pas de comparaison possible entre des choses aussi différentes. Cette ambiguïté de termes a été cause que cette erreur a été souvent commise, surtout par des métaphysiciens. Comme donc il est de la nature de tout corps de rester dans le même état de repos ou de mouvement, s'il n'obéit pas à cette loi, s'il se meut d'un mouvement non uniforme ou s'il décrit une ligne courbe, cela doit être attribué à des forces extérieures. C'est de l'équilibre et de la comparaison de celles-ci que traite la Statique, et, quand elles viennent à agir sur un corps, elles changent son état, soit qu'elles le mettent en mouvement lorsqu'il est immobile, soit qu'elles accroissent ou diminuent sa vitesse ou bien encore l'obligent à changer de direction quand il se meut.

Dans le second Chapitre, Euler recherche quel sera l'effet d'une force agissant sur un point libre en repos ou en mouvement. C'est

là qu'il traite des vrais principes de la Mécanique, par lesquels il faut expliquer tout ce qui concerne l'altération du mouvement. Trouvant que, jusqu'alors, on n'a donné de ces principes que des preuves insuffisantes, il les démontre de telle sorte qu'on ne peut s'empêcher de les reconnaître, non seulement vrais, mais encore nécessaires.

Les troisième et quatrième Chapitres sont consacrés à l'étude du mouvement d'un point se déplaçant en ligne droite, sous l'action d'une force extérieure. C'est par ce genre de mouvement que l'on commence, parce que c'est le plus simple, le plus facile à déterminer, soit qu'il s'agisse d'un point en repos sur lequel une force extérieure vient à exercer son action, ou du cas où la force agit dans la direction même du mouvement dont le point est animé. Dans le troisième Chapitre, on suppose que le point se meut dans le vide, et dans le quatrième, que le point se meut dans un milieu résistant selon une loi quelconque. En effet, quoique la résistance d'un tel milieu puisse être assimilée à une force proprement dite, il a toutefois semblé à propos de traiter à part l'altération du mouvement causée par cette résistance, tant pour se conformer à l'usage qu'en vertu de la différence essentielle qui existe entre les forces proprement dites et cette résistance du milieu. En effet, une force absolue ou proprement dite a une direction déterminée qui ne dépend nullement du mouvement du corps, et, de plus, elle agit sur celui-ci de la même façon, qu'il se meuve ou non, tandis qu'au contraire la direction de la résistance est toujours opposée à celle du mouvement du corps et son intensité dépend de la vitesse de celui-ci. Et, quoique, dans la nature, on n'ait pas observé d'autre résistance que celle qui est proportionnelle au carré de la vitesse, Euler a cependant envisagé des résistances agissant selon d'autres lois, tant pour donner en même temps les solutions de différents problèmes en rapport avec le mouvement dans un milieu résistant, que pour, et cela est le plus important, trouver une occasion d'exposer différents exemples de calcul remarquables.

Dans les deux derniers Chapitres, il s'agit enfin des corps se mouvant sur des lignes courbes. Ces mouvements ont lieu quand la direction des forces agissantes ne coïncide pas avec celle du mouvement dont le point matériel est animé. En effet, dans ce cas,

le corps s'écarte constamment de la ligne droite et décrit une courbe. Le cinquième Chapitre suppose qu'un tel mouvement curviligne a lieu dans le vide. Dans le sixième, on introduit la résistance du milieu. Pour les premiers problèmes traités dans ces Chapitres, il arrive que la courbe décrite par un point projeté d'une manière quelconque et sollicité par des forces quelconques sera déterminée, et qu'il en sera de même de la vitesse du mobile en un point quelconque de cette courbe, tant dans le vide que dans un milieu résistant. De ces premières propositions il en est résulté d'autres, dans lesquelles, étant données soit la courbe décrite par le mobile, soit une certaine nature de mouvement, on recherche, soit les forces agissant sur le point matériel, soit la résistance du milieu. Euler s'est appliqué surtout à ne laisser de côté aucune des questions traitées, tant par Newton que par d'autres géomètres, et à en donner des solutions naturelles par la méthode analytique.

Après cette longue analyse de la Préface du premier Volume de la *Mechanica* d'Euler, il suffira sans doute de reproduire l'*Index Capitum Tomi primi*, Index ajouté par l'éditeur :

*Caput primum.* — De motu in genere.

*Caput secundum.* — De effectu potentiarum in punctum liberum agentium.

*Caput tertium.* — De motu rectilineo puncti liberi a potentiis absolutis sollicitati.

*Caput quartum.* — De motu rectilineo puncti liberi in medio resistente.

*Caput quintum.* — De motu curvilineo puncti liberi a quibuscumque potentiis absolutis sollicitati.

*Caput sextum.* — De motu curvilineo puncti liberi in medio resistente.

Passons à l'examen du second Volume de la *Mechanica* (1).

Nous avons déjà vu que, dans celui-ci, il sera question du mouvement des points matériels non libres. Euler estime que la différence dans la théorie de ces deux sortes de mouvements est

(1) Ce Tome se compose de 459 pages. Il est terminé par un Index des noms cités dans les deux Volumes.

telle qu'elle justifie parfaitement la division qu'il a adoptée pour son œuvre. En effet, dans le cas du mouvement libre, la trajectoire décrite par le point matériel dépend uniquement du mouvement antérieurement acquis, de l'action des forces agissantes et de la résistance du milieu. Aussi, la première propriété du mouvement libre consiste en ce que la trajectoire en question peut être absolument quelconque. Imaginons que cette trajectoire soit matérialisée; représentons-nous-la, par exemple, sous la forme d'un tuyau ayant exactement les mêmes inflexions que celle-ci. Le mobile n'exercera aucune pression sur ce tuyau, et suivra celui-ci d'un bout à l'autre avec une entière liberté. Mais, dans le cas du mouvement non libre, nous admettons que le point matériel est astreint à suivre un chemin déterminé, quelles que soient les forces agissant sur lui et aussi la résistance du milieu. Cette trajectoire imposée, il est commode de se la représenter comme un tuyau hors duquel le mobile ne peut s'échapper, comme nous l'avons dit ci-dessus. Supposons donc un mobile obligé de se mouvoir sans pouvoir s'écarter d'une telle trajectoire, il nous faut rechercher quelle sera sa vitesse en chaque point de celle-ci, étant données les forces quelconques auxquelles il est soumis et la résistance du milieu, car cette vitesse étant connue, le mouvement tout entier le sera aussi parfaitement qu'on peut le désirer. Mais comme le mobile, s'il n'était point enfermé dans ce tuyau, décrirait une autre ligne, il exercera une pression sur les parois de celui-ci, et si leur force de résistance est trop faible, il les brisera. Aussi devra-t-on, en outre de la vitesse du mobile en chacun des points de ce tuyau, déterminer la pression qu'il exercera sur ses parois, et la direction de cette pression, ce qui fera connaître la résistance qu'exercent ces parois pour empêcher le mobile de quitter la trajectoire qui lui est imposée. Toutefois, on peut concevoir des mouvements non libres sans qu'on fasse intervenir l'hypothèse d'un tel tuyau; par exemple dans le cas d'un pendule ou d'une fronde, le point matériel est encore obligé de décrire une certaine ligne. On peut, en effet, imaginer des pendules, comme Huygens l'a montré, où le mobile soit astreint à décrire une ligne quelconque; de même que, dans le cas du pendule ordinaire à suspension, le mouvement circulaire est naturellement obligatoire, de même, si le pendule est suspendu entre deux

cycloïdes sur lesquelles le fil vient s'appliquer, il décrira aussi une cycloïde, et, de la même façon, on peut obliger le mobile à décrire une ligne quelconque donnée d'avance.

Cela nous donne une première sorte de mouvement non libre, à savoir le cas où le mobile est astreint à rester sur une ligne donnée. Mais il s'en présente immédiatement une autre, quand ce n'est pas la trajectoire du mobile qui est déterminée, mais que celui-ci ne peut s'écarter d'une surface donnée, sur laquelle il doit se mouvoir, et ce cas n'est pas moins digne d'attention que le premier. Il faut alors rechercher tout d'abord quelle ligne tracée sur la surface en question sera décrite par le point matériel, sous l'action combinée des forces et de la résistance, puis selon quelle loi varie la vitesse de ce point, selon le lieu de sa trajectoire où il se trouve : enfin, troisièmement, on recherchera aussi comment varie la pression que le mobile exerce sur la surface. De tels mouvements non libres peuvent commodément, tout comme les premiers, être figurés par des pendules : tout pendule, en effet, dès qu'il est poussé obliquement, si bien qu'il ne se meut pas dans un plan vertical, décrira des lignes courbes de genres variés, mais qui sont toutes situées sur la même surface sphérique, ayant pour centre le point de suspension. Dans ce cas simple, comme dans le cas général, il faut rechercher la ligne tracée sur la surface de la sphère par le mobile et, en chaque point de cette trajectoire, sa vitesse et la pression qu'il exerce. Ces deux sortes de mouvements non libres, que nous venons de définir, sont le seul objet du second Tome de la *Mechanica*.

Dans le premier Chapitre, on trouve les principes fondamentaux nécessaires pour arriver à une connaissance parfaite de l'une comme de l'autre sorte de mouvements non libres. Euler démontre qu'un point matériel, astreint à se mouvoir sur une ligne ou une surface donnée et sur lequel aucune force n'agit, se mouvra d'un mouvement uniforme, mais que si le mouvement a lieu sur une surface, la trajectoire sera la ligne la plus courte que l'on pourra tracer sur cette dernière. Il introduit alors les forces agissant sur le mobile, ainsi que la résistance du milieu, et recherche les lois générales conformément auxquelles elles accélèrent ou retardent le mouvement, ou bien engendrent une pression. Cela l'amène à exposer la théorie de la force centrifuge, que

les corps exercent alors même qu'aucune force n'agit sur eux, et qui doit son origine au mouvement curviligne auquel ils sont astreints.

Dans les deux Chapitres suivants, il examine tout au long le mouvement des corps sur une ligne donnée, tant dans le vide que dans un milieu résistant. En premier lieu, il détermine le mouvement dont un point matériel est animé, quand il est soumis à l'action de forces quelconques, et contraint de suivre une ligne droite ou courbe, que ce soit en montant ou en descendant, et, s'il se trouve que la courbe soit aussi appropriée à la descente qu'à la montée du point mobile, il donne la définition des oscillations et il les compare entre elles, en proportion du temps écoulé, et fait connaître la nature et les propriétés des oscillations tant dans le cercle que dans la cycloïde. De là, il passe aux problèmes inverses, à ceux dans lesquels il recherche, les forces agissantes étant données, sur quelles courbes le mouvement jouira de telle ou telle propriété donnée d'avance. Ainsi, par exemple, les problèmes où il s'agit de trouver les courbes d'égale descente ou d'égal éloignement à partir d'un point donné et plusieurs autres analogues, déjà traitées par d'autres géomètres, ou bien auxquels sa propre méthode a amené Euler. Parmi ceux-ci, il faut distinguer entre tous les problèmes des lignes brachystochrones et tautochrones, dont Euler a perfectionné les solutions. En effet, en ce qui concerne les brachystochrones, il a corrigé une erreur que commettaient certains géomètres tant dans le cas du vide que dans celui d'un milieu résistant, et il a remplacé le principe d'Huygens, vrai en lui-même, mais insuffisant, par un autre tout à fait évident, par le moyen duquel il a démontré que, dans un milieu quelconque et dans l'hypothèse de forces agissant sur le point matériel, la courbe brachystochrone est constamment celle sur laquelle le corps se meut de telle façon que la pression soit double de la force centrifuge. De même, il donne une méthode nouvelle et naturelle de trouver les courbes tautochrones (celles qu'on avait trouvées auparavant l'avaient été plutôt par divination que par une méthode) ; par le secours de celle-ci, il a trouvé non seulement la cycloïde, célèbre depuis longtemps sous le nom de *tautochrone*, mais de plus, il a montré qu'outre celle-ci, il y a d'innombrables courbes qui jouissent de cette même propriété et, parmi elles, il y a même une

courbe algébrique. Cela suffirait seul pour faire apprécier la supériorité et l'utilité de cette méthode, mais il faut tenir compte aussi de toutes les questions se rattachant à celles-ci, dans le cas du mouvement dans le vide, et de l'ensemble de l'exposition en ce qui concerne le milieu résistant. Du reste, cette méthode doit être regardée comme ayant également fait progresser l'Analyse et la Mécanique, et, à divers endroits, à propos de la solution des problèmes les plus difficiles, on verra les richesses nouvelles fort appréciables de l'Analyse, qui ne sont pas un faible accroissement de cette science.

Dans le quatrième Chapitre, il s'agit du mouvement sur une surface donnée, étude que personne n'avait encore abordée ; cette difficulté était accrue par ce fait que la nature et les propriétés des solides n'avaient pas encore été suffisamment examinées et soumises au calcul. Avant donc de pouvoir établir quoi que ce soit sur un tel mouvement, il était nécessaire d'exposer une méthode permettant de mettre en évidence les propriétés des surfaces et des lignes tracées sur elles et de les soumettre au calcul. C'est ce qu'a fait Euler au moyen des équations contenant trois quantités variables, dont il avait fait déjà usage dans le Tome III des *Commentaires* (de Pétersbourg) ([1]), pour déterminer la ligne la plus courte qu'on puisse tracer sur une surface quelconque, et dans le

---

([1]) Le développement de la Géométrie analytique n'a pas été aussi rapide qu'on serait porté à le croire. La *Géométrie* de Descartes parut en 1637 ; ce Livre est à peu près consacré exclusivement à la Géométrie plane, et il a seulement indiqué la manière d'envisager et de construire les courbes à double courbure en les projetant sur deux plans perpendiculaires entre eux sur lesquels elles forment des courbes ordinaires, définies par leurs abscisses et leurs ordonnées. — Le géomètre Parent, membre de l'Académie des Sciences, représenta le premier (1700) une surface courbe par une équation entre trois variables. Toutefois, ce ne fut qu'en 1731 que Clairaut, dans ses célèbres *Recherches sur les courbes à double courbure*, qu'il publia à l'âge de 16 ans, exposa pour la première fois, d'une manière méthodique, la doctrine des coordonnées dans l'espace.

Les anciens géomètres ne paraissent avoir connu, parmi les surfaces du deuxième ordre, outre le cône et le cylindre, que les surfaces de révolution, encore faut-il excepter l'hyperboloïde de révolution à une nappe. Euler le premier découvrit, dans l'équation générale du second degré entre les coordonnées ordinaires, cinq espèces différentes de surfaces dont les sphéroïdes des anciens n'étaient plus que des cas particuliers.

Euler est donc, on le voit, un des créateurs de la Géométrie analytique à trois dimensions.

précédent Tome de la *Mechanica*, pour l'étude des mouvements libres se produisant en dehors d'une surface plane. Ces préliminaires posés, il a pu passer à l'étude de l'effet des forces agissant sur des points assujettis à se mouvoir sur une surface, il en a tiré le moyen de connaître la ligne décrite par le mobile et aussi les autres particularités du mouvement. Mais comme le calcul, tant qu'on reste dans les généralités, devient trop étendu et difficile à effectuer, il fait abstraction de la résistance et ramène tout au vide et à la pesanteur ordinaire, et étudie principalement le mouvement des pendules oscillant obliquement, c'est-à-dire dont le mouvement n'a pas lieu dans un plan vertical; il a déterminé avec soin les anomalies de ce mouvement et la marche de leurs absides.

Euler termine sa Préface en se promettant de traiter du mouvement des corps de dimensions finies aussitôt que cela lui sera possible; il commencera par les corps solides. Il en éclaircira la théorie et l'exposera par la même méthode.

Comme pour le premier Volume, l'éditeur a ajouté un Index des Chapitres. Voici cet Index :

*Caput primum.* — De motu non libero in genere.

*Caput secundum.* — De motu puncti super data linea in vacuo.

*Caput tertium.* — De motu puncti super data linea in medio resistente.

*Caput quartum.* — De motu puncti super data superficie.

E. Doublet.

---

APPELL (Paul). — Eléments d'Analyse mathématique, à l'usage des candidats au Certificat de Mathématiques générales, des ingénieurs et des physiciens. *Cours professé à l'École Centrale des Arts et Manufactures.* Troisième édition, entièrement refondue. 1 vol. gr. in-8, VIII-700 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

La première édition de cet Ouvrage, publié en 1898, a été analysée dans ce *Bulletin* en 1899 (p. 136) et la seconde édition en 1906 (p. 96). Ces deux éditions contiennent les éléments essentiels de l'*Analyse mathématique* en vue de leur application à la

Géométrie, à la Mécanique et à la Physique; elles renferment de nombreux exemples et aucune théorie n'est développée sans application à des cas particuliers.

Cette troisième édition d'un Ouvrage très apprécié, contient de nombreuses additions qui ont pour but de plus préparer à l'étude de la Mécanique et de la Physique. Mais pour ne pas trop augmenter le nombre de pages, plusieurs suppressions ont été faites dans les parties trop purement géométriques. Il importe de signaler que, dans cette nouvelle édition, les formules pour la détermination des centres de gravité et des moments d'inertie ont été développées en utilisant la notion de l'intégrale prise le long d'une courbe; que la définition donnée des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce de Legendre est celle qui résulte des problèmes du mouvement du pendule simple et de la rectification de l'ellipse; que, comme application de la théorie des intégrales multiples, l'Auteur a ajouté, aux formules fondamentales sur les intégrales eulériennes de première et de seconde espèce, le calcul des intégrales de Fresnel; que le Chapitre XVI, entièrement nouveau, contient les formules fondamentales de l'analyse vectorielle (formules d'Ostrogradzki ou de Green, de Riemann, d'Ampère et de Stokes).

Il est certain que cette édition sera accueillie avec la même faveur que les précédentes, car, comme celles-là, elle se distingue par la clarté et la précision, et, de plus, elle contient les développements que réclame la science actuelle.

*Extrait de la Table des Matières.*

I. Introduction. — II. Infiniment petits. Différentielles. — III. Fonctions primitives. Intégrales indéfinies, intégrales définies simples. Applications à la mesure des aires planes. — IV. Volume d'un solide à bases parallèles. Moments d'inertie et centres de gravité d'aires et de volumes homogènes. — V. Rectification des courbes. Aire des surfaces de révolution et des surfaces coniques. — VI. Développement d'une fonction en série de puissances entières et positives de la variable. — VII. Quelques méthodes d'intégration. — VIII. Développement d'une fonction en série trigonométrique. — IX. Intégrales définies dont l'élément différentiel devient infini, ou dont une limite est infinie. — X. Tangente à une courbe plane. Maximum et minimum d'une fonction d'une variable. Enveloppes. Courbure. — XI. Courbes gauches. Tangente. Plan osculateur. Courbure et torsion. — XII. Fonctions de deux variables. Plan tangent à une surface. Maxima et minima.

Enveloppes. Courbure. — XIII. Lignes particulières tracées sur une surface. — XIV. Différentiation sous le signe $\int$. Intégration des différentielles totales. Intégrales prises le long d'une courbe. — XV. Intégrales doubles et triples. Applications. — XVI. Formules fondamentales de l'analyse vectorielle. Intégrales de volumes, de surfaces et de lignes, — XVII. Équations différentielles du premier ordre. — XVIII. Équations différentielles du deuxième ordre et d'ordre supérieur. — XIX. Équations différentielles linéaires. — XX. Système d'équations différentielles simultanées à une variable indépendante. — XXI. Quelques exemples d'équations aux dérivées partielles, équations du premier ordre. — XXII. Valeur numérique d'une intégrale définie. Méthodes d'approximation. Intégrateurs et intégraphes.

Er. L.

---

WALLENBERG (Georg) und GULDBERG (Alf.). — Theorie der linearen Differenzengleichungen. Mit 5 Figuren im Text. (*Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. Band. XXXV.) 1 vol. in-8, xiv-288 pages. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1911.

La théorie des équations linéaires aux différences finies ne date que d'hier. Ces équations définissent des fonctions ayant des propriétés remarquables et d'un caractère essentiellement nouveau. L'étude de ces fonctions est en plein développement. Nous signalons surtout les recherches importantes de M. G.-D. Birkhoff (1) et aussi celles de MM. H. Galbrun (2) et R.-D. Carmichael qui ont paru après la publication du Livre indiqué plus haut. Ce Livre est un exposé de l'ensemble des recherches sur les équations linéaires aux différences finies.

Le premier Chapitre est consacré aux théorèmes d'existence. Mais il convient de remarquer que les solutions dont les Auteurs démontrent l'existence sont des fonctions *non-analytiques*. L'existence de ces solutions est évidente, mais je ne vois pas l'intérêt qu'il y a à les étudier. Si les coefficients de l'équation aux différences finies sont des fonctions analytiques, il existe toujours

---

(1) *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 12, p. 243-284. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*. Boston, Cambridge Mass., 1913.

(2) *Cf.* ce *Journal*, 2e série, t. XXXVI, 1912, p. 185.

un système fondamental de solutions analytiques, mais on n'en trouve aucune démonstration.

Puis vient une étude des intégrales discontinues de la forme

$$f(x) = \int_a^b \frac{\varphi(z)\,dz}{1 - e^{2\pi i(x-z)}}$$

considérées d'abord par M. C. Guichard, et tout récemment par M. F. Brodén.

Dans les Chapitres II à VI, les Auteurs font ressortir les analogies entre les équations algébriques et les équations aux différences finies et les équations aux différentielles ordinaires. Ces pages sont d'une admirable clarté et élégance. On y trouve des théorèmes sur les déterminants formés des solutions fondamentales, sur l'équation adjointe et la méthode de la variation des constantes de Lagrange, enfin sur les groupes de transformation et sur la réductibilité d'une équation linéaire aux différences finies. La Bibliographie, à la fin du Volume, montre dans quelle large mesure les Auteurs ont contribué à développer ces résultats.

La définition de la notion du système fondamental de solutions laisse à désirer. En effet, un système de fonctions qui forment un système fondamental de solutions ne sont pas nécessairement telles que la solution la plus générale se compose linéairement d'elles. Il suffit pourtant, comme nous le montrerons ailleurs, de changer légèrement la définition pour éviter cet inconvénient.

Le Chapitre IX est consacré à un théorème bien connu du regretté Henri Poincaré sur la valeur asymptotique des solutions. Ce théorème trouve une application à l'étude de certaines fractions continues. L'étude des valeurs asymptotiques est poussée plus loin dans le dernier Chapitre à l'aide des développements en séries de facultés.

N.-E. Nörlund.

KAISER (ALFRED). — WEITERES ZUR INVARIANTENTHEORIE DER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG. *Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Greifswald.* Une brochure in-8, 31 pages. Leipzig, B.-G. Teubner, 1913.

Ce travail a été fait sous la direction de M. Fr. Engel.

Soit

$$y = F(x, a, b) \tag{1}$$

l'intégrale générale de l'équation différentielle du second ordre

$$y'' = \omega(x, y, y'), \tag{2}$$

$a$ et $b$ étant les constantes d'intégration. On appelle *équation associée* à l'équation (2) une équation de même forme

$$b'' = \Lambda(a, b, b'), \tag{3}$$

construite en regardant, dans la relation (1), $b$ comme fonction de $a$ et en éliminant $x$ et $y$ considérés comme paramètes arbitraires. Comme on peut, dans (1), soumettre $a$ et $b$ à une transformation ponctuelle quelconque sans cesser d'avoir une solution générale de (2), l'équation (2) admet une *classe* d'équations associées (3), déduites les unes des autres par transformations ponctuelles.

Il est alors naturel de rechercher les conditions que doit vérifier la fonction $\omega$ pour que la classe des équations associées coïncide avec une classe *déterminée* d'équations différentielles, invariante vis-à-vis du groupe des transformations ponctuelles, par exemple avec la classe des équations

$$b'' = \alpha_0(a, b) + 3\alpha_1(a, b)b' + 3\alpha_2(a, b)b'^2 + \alpha_3(a, b)b'^3. \tag{4}$$

C'est ce que s'est proposé de faire autrefois M. Koppisch, par un calcul direct.

Mais, comme les équations d'une telle classe possèdent une intégrale première qui conserve sa forme pour toutes les transformations du groupe ponctuel, M. Kaiser s'est posé le problème suivant : trouver la ou les conditions que doit vérifier la fonction $\omega$ pour que l'équation (3) associée à (2) admette une intégrale

première de la forme

$$\frac{A(a, b) + B(a, b)b'}{A_1(a, b) + B_1(a, b)b'} = \text{const.};$$

il le résout complètement à l'aide d'un calcul d'identification conduit avec élégance et ingéniosité.

La première relation rencontrée ne contient que les dérivées de $\omega$ et constitue la condition cherchée : elle exprime que, pour l'équation (2), le plus simple des invariants différentiels ponctuels des équations de ce type (construit pour la première fois par M. Tresse) [1] est nul :

$$H = \frac{d^2}{dx^2}\omega_{y'y'} - 4\frac{d}{dx}\omega_{yy'} - \omega_{y'}\left(\frac{d}{dx}\omega_{y'y'} - 4\omega_{yy'}\right) - 3(\omega_y\omega_{y'y'} - 2\omega_{yy}) = 0,$$

les indices représentant des dérivations de $\omega$. Or M. Koppisch [2] a montré qu'alors l'équation associée (3) est de la classe (4).

La seconde relation rencontrée permet de mettre l'équation associée sous une forme très simple, si l'on prend pour constantes arbitraires les valeurs initiales $a = y_0$, $b = y'_0$ de $y$ et de sa dérivée pour $x = x_0$; à savoir

$$dy_0\, d^2y'_0 - dy'_0\, d^2y_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{d}{dx}\omega_{y'y'} - 4\omega_{yy'}\right)_0 dy_0^3 - \frac{1}{2}(\omega_{y'y'})_0\, dy_0^2\, dy'_0 = 0.$$

L'Auteur poursuit l'identification pour obtenir, quand $\omega$ vérifie $H = 0$, l'intégrale première de l'équation associée qu'on vient d'écrire. Après avoir examiné deux cas particuliers simples, il montre qu'en général la question se ramène à un calcul algébrique et à l'intégration d'un système de Pfaff qu'il forme.

A. Boulanger.

---

(1) A. Tresse, *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre* $y'' = \omega(x, y, y')$. (*Preischrift der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig*; n° 32, th. VII. p. 56, 1896, S. Hirzel, Leipzig.

(2) A. Koppisch, *Zur Invariententheorie der gewöhnlichen-differentialgleichung zweiter Ordnung*, n° 12, p. 12. 1905, Greifswald, Leipzig.

AUERBACH (Felix) und ROTHE (Rudolf). — Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. Mit einem Bildnis *Friedrich Kohlrauschs*, 3. Jahrgang 1913. 1 vol. petit in-8, x-463 pages. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1913.

Les idées générales qui ont présidé à l'élaboration de cet Ouvrage ont été l'objet d'une étude détaillée dans le *Bulletin* à propos de la deuxième édition [1]. Il me semble, par conséquent, inutile de les exposer de nouveau.

Plusieurs chapitres ont été traités par les mêmes collaborateurs que précédemment : MM. O. Knopf pour l'Astronomie, O. Toeplitz pour les équations intégrales, Fr. Auerbach pour la Chimie générale, etc. Ils ont été pour la plupart l'objet d'une rédaction nouvelle, extraordinairement condensée, qui a permis à l'éditeur de réduire d'une centaine le nombre des pages par rapport à l'édition précédente.

Le livre porte en frontispice le portrait de Friedrich Kohlrausch. La vie de ce célèbre physicien-électricien ne pouvait être retracée d'une façon plus magistrale que ne l'a fait le professeur Warburg.

La partie consacrée à la Mathématique a été traitée presque entièrement par M. Rothe; elle est d'une concision extrême : en moins de 150 pages, on y trouve, outre de nombreuses Tables numériques, les éléments essentiels de l'Arithmétique et l'Algèbre, de l'Analyse, de la Géométrie, des Mathématiques appliquées, le tout envisagé au point de vue scientifique actuel. Prenons, par exemple, le paragraphe qui a trait aux bases de la Géométrie :

« Le fondement axiomatique de la Géométrie élémentaire d'après la théorie euclidienne, dit en commençant l'auteur, est établi maintenant d'une manière complète par les travaux de Pasch, Véronèse, Peano, Hilbert, F. Schur, etc. Les objets dont la Géométrie traite, sans les définir en soi, sont les points, les droites, les surfaces ; les axiomes de la Géométrie fournissent les relations entre ces objets. La conception axiomatique de la Géométrie est basée, d'après Hilbert, sur douze axiomes projectifs (graphiques),

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXXVI, novembre 1912.

six axiomes de congruence, l'axiome du parallélisme, deux axiomes de la continuité, ..., loi de Desargues, ..., loi de Pascal, etc. »

Toute la partie mathématique est traitée à un point de vue aussi élevé et nettement didactique. Comme l'indique son titre assez surprenant à première vue, ce petit Livre est un aide-mémoire écrit pour des mathématiciens. Il faut, en effet, posséder déjà des connaissances assez étendues en Mathématiques pour pouvoir consulter avec profit les pages où M. Rothe a su résumer avec un rare bonheur les notions les plus importantes et grouper avec méthode un nombre extraordinaire de relations utiles aux spécialistes.

J'ai déjà eu l'occasion de dire l'intérêt que présente le travail de M. G. Hessenberg sur la théorie des ensembles. M. L. Bieberbach ne fait pas preuve d'un moindre talent dans son exposé de la théorie des groupes, celui de la théorie de Galois des équations et les problèmes sur l'uniformisation qui sont la conséquence des travaux de Poincaré (1882) et de Klein sur les fonctions automorphes. C'est un médecin berlinois portant un vif intérêt à la théorie des nombres, le Dr Albert Fleck, qui s'est occupé, cette fois-ci, avec une grande compétence, de la *Dernière loi de Fermat;* on sait que le dernier essai de démonstration de ce fameux théorème a fait l'objet récemment d'une Note présentée par M. Eugène Fabry à l'Académie des Sciences [1].

Mentionnons les pages très élégantes sur la Mécanique analytique, dues à la plume autorisée de M. H. Liebmann.

La partie mathématique se termine par une Table chronologique des mathématiciens les plus célèbres, depuis Thalès de Milet et Pythagore jusqu'à Weingarten et Minkowski. La liste des savants qui sont morts en 1911 et 1912 se trouve, comme dans la précédente édition, à la fin du Volume : nos compatriotes verront qu'Henri Poincaré y occupe, comme importance, une place toute spéciale, et ils seront sensibles à l'hommage rendu par les auteurs à son génie.

Si la première partie du Livre est d'un intérêt hors de pair, il semble qu'on doit, en toute franchise, faire de nombreuses réserves de détails sur la seconde qui a trait à la Physique. Sans doute un

---

[1] *Comptes rendus*, 16 juin 1913.

physicien n'est-il pas tenu à la rigueur mathématique dans ses exposés, mais l'à peu près est souvent dangereux, car il risque de donner des idées fausses. Ces restrictions ne s'adressent en aucune manière, je me hâte de le dire, aux excellents précis de M. A. Sommerfeld sur la théorie des *quanta* et de M. Gast sur la Géodésie; je regrette seulement que M. Mich n'ait pas songé, dans son Chapitre sur la Cristallographie, à faire état des admirables travaux d'un des cristallographes les plus éminents, le professeur O. Lehmann, à qui l'on doit la découverte des cristaux liquides.

Pour justifier la critique précédente de la Physique de M. Auerbach, considérons, par exemple, la question des ondes lumineuses dont les longueurs fournissent, comme on le sait, pour des radiations bien homogènes, le meilleur témoin naturel qu'on connaisse des unités de longueur. Les belles recherches de M. Michelson ont établi que la raie rouge émise par la vapeur de cadmium est tout particulièrement simple et que la longueur d'onde correspondante présente les garanties les plus sérieuses au point de vue de la précision avec laquelle on peut la comparer au Mètre.

M. Auerbach a donc été bien inspiré en rappelant (p. 206) que si le Mètre venait à être perdu ou altéré, on pourrait le reconstituer très exactement à l'aide de certaines radiations. Mais là où il manque de la précision nécessaire, c'est quand il se borne à donner pour $\lambda_{\text{rouge}}$ la valeur $0^{\mu},643847\,22$ *sans spécifier les conditions de température et de pression*. Je ne discuterai pas les trois derniers chiffres, bien qu'ils diffèrent des résultats obtenus tant en 1892-93 par MM. Michelson et Benoît qu'en 1910 par MM. Benoît, Fabry et Perot, mais comme il s'agit de haute Métrologie, n'est-il pas indispensable d'ajouter au chiffre donné, à défaut de référence bibliographique, des indications complémentaires analogues à celles-ci :

« A 15° de l'échelle normale, sous la pression de $760^{\text{mm}}$ de mercure, dans les conditions normales de la pesanteur, pour la radiation rouge du spectre du cadmium produite par un tube à électrodes? »

De deux choses l'une, en effet : ou bien le Livre est écrit pour des physiciens et il y aurait intérêt à ce que les renseignements donnés soient complets par eux-mêmes et à l'abri de toute critique,

ou bien c'est simplement un aide-mémoire, d'un caractère sans doute plus élevé que ne le sont généralement ces sortes d'ouvrages, mais dont le contenu ne répondrait pas aux promesses du titre : *Taschenbuch für Physiker*.

Prenons un autre exemple : « Le gramme, dit l'auteur (p. 207) est la masse d'une quantité d'eau qui, à 4° C., remplit un centimètre cube. » Ceci n'est pas rigoureusement exact : la masse du centimètre cube d'eau pure, privée d'air, est à 4° C. $0^g,999973$. De plus, étant donné que le centimètre est défini dans le Livre comme la centième partie du Mètre, le lecteur est en droit de s'attendre à voir le gramme défini comme la millième partie du Kilogramme, au lieu qu'intervienne cette réminescence de l'ancienne définition du Kilogramme, abandonnée par les métrologistes actuels, qu'est la comparaison de l'unité de masse à l'eau.

Si l'on passe aux unités électriques, on lit (p. 259) cette phrase parfaitement exacte : « On s'est accordé à définir d'une façon internationale deux unités primaires : l'unité d'intensité de courant et l'unité de résistance électrique. » On reconnaît là une allusion aux résolutions de la dernière Conférence internationale des Unités et Étalons électriques (Londres, octobre 1908) ; dans ces conditions, la définition de l'ampère adoptée par la Conférence eût été tout indiquée ou, à son défaut, dans un Ouvrage allemand, la définition de la loi allemande ; au lieu de cela, on lit que l'ampère est « le courant qui, par seconde, dépose par voie électrolytique 0,00001036 équivalent d'une substance. » Une telle définition est inacceptable, car elle constitue un cercle vicieux, les équivalents électrochimiques étant, d'après Maxwell (*Electricity*), des quantités de matière dont la grandeur dépend précisément de la définition même de l'unité d'intensité électrique.

On peut reprocher encore à M. Auerbach de donner comme symboles aux unités électriques du système pratique des lettres qu'on n'emploie nulle part, que je sache, avec les significations indiquées dans le Tableau de la page 260 à savoir : VA pour watt, Φ pour farad, Q pour henry. Aussi bien en Allemagne qu'en France, en Angleterre, aux États-Unis et plus généralement dans les vingt-deux États qui ont pris part à la Conférence de Londres, le watt est toujours représenté par la lettre *w* (et le kilowatt par *kw*) ; dans la très grande majorité des Ouvrages d'électricité,

le symbole $\Phi$ indique un flux d'induction, et $Q$ une quantité d'électricité [1].

Les remarques précédentes s'attachent, comme on le voit, à tel ou tel point particulier; il serait facile d'en multiplier les exemples. Elles n'enlèvent rien aux idées directrices et essentielles de l'œuvre et ne nuisent pas à l'intérêt qu'on peut y prendre d'une manière générale. Si je les fais, c'est uniquement parce que je considère le *Taschenbuch* d'Auerbach et Rothe comme un Livre de valeur, excellent pour les mathématiciens, mais qui rendrait, à mon avis, beaucoup plus de services aux physiciens s'il était l'objet d'une révision minutieuse.

C^te^ DE BAILLEHACHE.

# MÉLANGES.

## MÉDAILLE WEIERSTRASS (1916).

Au cinquième Congrès international des Mathématiciens, à Cambridge, il fut décidé que le sixième Congrès se réunirait en 1916 à Stockholm. Sa Majesté le roi Gustave V fit annoncer, à cette occasion, qu'il serait disposé à mettre ce Congrès sous son haut patronage.

En outre, Sa Majesté a résolu d'honorer, par une médaille d'or portant l'image de Karl Weierstrass et par une somme d'argent de 3000 couronnes, quelque importante découverte dans le domaine de la théorie des fonctions analytiques.

Ceux qui désireront concourir pour ce prix devront envoyer leurs manuscrits au rédacteur en chef des *Acta Mathematica* avant le 31 octobre 1915, centenaire de la naissance de Karl Weierstrass. Les Mémoires, qui pourront traiter un sujet se rapportant soit à la théorie générale des fonctions analytiques, soit à la théorie d'une classe importante de fonctions particulières, devront porter une épigraphe et être accompagnés du nom et de l'adresse de l'auteur, indiqués ouvertement ou sous pli cacheté. Ils ne devront point avoir été publiés antérieurement.

---

[1] Ces symboles sont d'ailleurs ceux qu'emploie l'Association des Électriciens allemands (voir *Deutscher Kalender für Elektrotechniker*, d'Uppenborn-Dettmar).

Sa Majesté a décidé qu'un rapport sur la valeur scientifique des Mémoires envoyés pour répondre à la question mise au concours doit êtr présenté à Sa Majesté par les membres de la première classe de l'Académie des Sciences de Suède. Ces membres sont actuellement : MM. Mittag-Leffler, Falk, Phragmén, Wiman, Bendixson et von Koch. Aux dits membres sera encore associé M. Fredholm.

Le Mémoire couronné ainsi que les Mémoires qui pourraient être jugés dignes d'être signalés comme particulièrement remarquables seront imprimés dans les *Acta Mathematica*. Ils ne devront pas être autrement rendus publics antérieurement.

Les autres Mémoires seront renvoyés à l'adresse que l'auteur aura indiquée dans ce but.

Les Mémoires pourront être écrits en allemand, en anglais ou en français, au choix de l'auteur.

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Lilienthal (R. v.). — *Vorlesungen üb. Differentialgeometrie.* 2. Bd. : *Fächentheorie.* I. Tl. (B. G. Teubner's, Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen, n° 28.) Gr. in-8, VIII-270 p. avec fig. Leipzig, B.-G. Teubner, 12 m.; relié, 13 m.

Bouasse (H.). — *Cours de Thermodynamique.* 2e édit. rev. *Cours de Physique.* T. II, 1re partie. In-8, 463 p. avec 188 fig. Principes généraux, gaz et vapeurs. Paris, Ch. Delagrave. 18 fr.

Philip (Alex.-J.). — *Dynamic foundation of knowledge.* XII-318 p. New York, Dutton. 2 d.

Appell (P.). — *Éléments d'Analyse mathématique à l'usage des candidats au certificat de Mathématiques générales, des ingénieurs et des physiciens.* 3e édition entièrement refondue. In-8, VIII-700 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 24 fr.

*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne, avec la collaboration de nombreux savants. Édition française. Publiée sous la direction de *Jules Molk.* Tome VII (1 vol.), Astronomie sphérique. Fasc. 1. gr. in-8, p. 1-224 avec figures. Paris, Gauthier-Villars.

1re Partie

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

---

DARBOUX (Gaston). — Leçons sur la Théorie générale des Surfaces et les Applications géométriques du Calcul infinitésimal. Cours de Géométrie de la Faculté des Sciences. Première Partie : *Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima.* 2e édition, revue et augmentée. 1 vol. grand in-8, VII-618 pages. Paris, Gauthier-Villars. 1914.

Tous les géomètres connaissent le grand Traité de M. Darboux sur la Théorie générale des Surfaces. Cet Ouvrage, où se trouvent exposés avec beaucoup de méthode et d'élégance les résultats de la science actuelle, eut un légitime succès auprès du public mathématique. Le premier Volume de cet Ouvrage était depuis quelque temps épuisé; une nouvelle édition devenait nécessaire. C'est cette deuxième édition que M. Darboux vient de publier. Ce Volume, comme dans la première édition, est divisé en trois Livres : I. *Application à la Géométrie de la théorie des mouvements relatifs;* II. *Coordonnées curvilignes;* III. *Surfaces minima.* Quelques Chapitres nouveaux, d'importantes additions se trouvent dans cette nouvelle édition. Je me bornerai à signaler les nouveautés, en renvoyant pour le reste, à la très complète analyse publiée en 1888 par M. G. Kœnigs (voir *Bulletin*, 1re Partie, 2e s., t. XII, 1888, pages 8-17).

Tout d'abord, dans le Livre I, il y a lieu de signaler la représentation d'une notation de grandeur finie à l'aide de paramètres quaternioniens : c'est une question qui se rattache aux travaux de M. Klein qui a montré toute l'importance de cette représentation dans divers Mémoires insérés aux Tomes IX à XII des *Mathematische Annalen*. Dans le même ordre d'idées, il importe de signaler l'étude du roulement du cône isotrope sur lui-même; on y trouve un résumé de Mémoires publiés par l'Auteur dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e s., t. IX, 1905).

Un Chapitre nouveau est consacré à l'étude des mouvements à

un nombre quelconque de paramètres. M. Darboux indique les relations différentielles qui doivent exister entre les rotations et les translations partielles : cette théorie est rattachée à l'intégration des systèmes complets. On voit ainsi d'une façon très simple et très nette que, si les conditions d'intégration sont satisfaites, il existe un déplacement et un seul qui satisfait aux conditions données ; d'autre part, on voit très bien le parti qu'on peut tirer d'une solution particulière de ces équations différentielles pour arriver à la solution générale.

L'Auteur revient ensuite aux déplacements à deux variables qui jouent un rôle important dans l'étude des surfaces et des congruences. Il recherche le lieu des axes hélicoïdaux de tous les mouvements qui peuvent se produire à partir d'une position donnée. Ce lieu est une surface célèbre qui a été étudiée d'abord par Plücker et qui est connue sous le nom de *cylindroïde* ou mieux encore de *conoïde de Plücker*. L'équation de cette surface, rapportée à des axes convenablement choisis, est

$$z = h\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Cette surface possède de curieuses propriétés. Puisque la surface est du troisième degré, tout plan passant par une génératrice la coupe suivant une conique. On a ainsi sur la surface une série doublement infinie de coniques. *Toutes ces coniques se projettent sur le plan des xy suivant des cercles passant par l'origine*. Si d'un point fixe on abaisse des perpendiculaires sur les génératrices, les pieds de ces perpendiculaires engendrent une courbe plane qui reste invariable de forme quand le point fixe reste à une distance invariable de l'axe du conoïde. On a là, ainsi que l'a montré M. Appell (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXVIII, p. 261), une propriété caractéristique de la surface étudiée. L'Auteur indique, en outre, un certain nombre de modes de génération de cette surface ; nous signalerons les suivants :

*Étant données deux droites* (D) *et* ($\Delta$) *dont la perpendiculaire commune est la droite* (E), *les plus courtes distances de* (E) *et des droites qui rencontrent* (D), ($\Delta$) *engendrent un conoïde de Plücker.*

*Les perpendiculaires à des droites concourantes d'un plan*

*et à une droite fixe de l'espace engendrent un conoïde de Plücker.*

Dans le Livre II, M. Darboux étudie un cas particulier de deux familles conjuguées formées exclusivement de courbes planes; dans le cas particulier étudié, les courbes d'une famille sont situées dans des plans parallèles au plan $xy$; les courbes de l'autre famille sont dans des plans passant par l'axe des $z$; de plus, les développables circonscrites à la surface le long des courbes de la première famille sont des cônes ayant leurs sommets sur l'axe des $z$; pour la seconde famille, ce sont des cylindres dont les génératrices sont parallèles au plan des $xy$. Toutes ces surfaces peuvent être déformées d'une manière continue, de manière à conserver toutes ces relations géométriques. Les quadriques possèdent évidemment les propriétés qui viennent d'être signalées; on obtient ainsi une famille de surfaces applicables sur les surfaces du second degré; ces surfaces ont été découvertes par le géomètre russe Peterson.

Un nouveau Chapitre (Chap. X) est consacré à une classe particulière de surfaces de translation. On sait qu'on appelle ainsi une surface engendrée par une courbe de forme invariable animée d'un mouvement de translation. S. Lie et H. Poincaré ont cherché à déterminer toutes les surfaces qui peuvent, de deux ou plusieurs manières, être considérées comme des surfaces de translation; la solution donnée par ces deux éminents géomètres repose sur la théorie des fonctions abéliennes. L'Auteur donne de ce problème une solution nouvelle, qui n'exige aucune connaissance de la théorie des fonctions abéliennes et qui est à la fois simple et élégante. Je signale le résultat suivant : Si (C) est une des courbes qui engendrent la surface, le cône directeur des tangentes à cette courbe est du quatrième ordre; le cas où ce cône se décompose conduit à des résultats très intéressants.

La théorie de la représentation conforme a été complétée; citons, par exemple, la méthode de Gauss pour représenter l'ellipsoïde terrestre sur une sphère, le rapport de similitude demeurant le même en tous les points d'un parallèle. En appliquant cette méthode à un pays tel que la France, le rapport de similitude ne varierait pas, *dans toute l'étendue de la Carte*, de $\frac{1}{400000}$ de sa

valeur. M. Darboux expose ensuite une solution complète d'un problème posé par Lagrange :

*Trouver tous les tracés géographiques dans lesquels les méridiens et les parallèles sont représentés par des arcs de cercles.*

Dans le Livre III, nous avons d'abord une détermination simple des surfaces minima qui peuvent, de plus d'une manière, être considérées comme des surfaces de translation (Chap. III). Ensuite l'étude d'une surface minima découverte par Riemann; l'Auteur a démontré que cette surface est la surface minima réelle la plus générale qui puisse être engendrée par un cercle (Chap. VIII).

Signalons enfin (Chap. IX) une étude de congruences isotropes de Ribaucour et l'application de cette théorie aux courbes de Bertrand. M. Darboux indique un certain nombre de résultats élégants; ainsi :

*Toute courbe de Bertrand est ligne asymptotique d'une surface minima* (M) *qui se détermine sans aucun signe de quadrature. La ligne qui lui correspond sur la surface adjointe est une ligne de courbure sphérique de cette surface adjointe.*

Cette nouvelle édition est appelée à rendre de grands services à tous ceux qui s'intéressent à la Géométrie; je suis persuadé qu'elle obtiendra du public géomètre le succès que connut la première édition.

C. Guichard.

---

ENGELHARDT (Philipp). — Untersuchungen über die im Schlusswort des Lie'schen Werkes « Geometrie der Berührungstransformationen » angedeuteten Probleme. 1 brochure in-8, 65 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1910.

Les problèmes étudiés par M. Engelhardt dans ce travail ont été posés par Lie dans le Chapitre qui termine le premier Volume de son dernier Ouvrage, *Geometrie der Behrührungstransformationen* [1]. On sait que le premier Volume de cette belle œuvre,

[1] Analysé dans le *Bull. des Sc. math.*, 1897, p. 39.

rédigé en collaboration avec M. Scheffers, a seul paru avant la mort de Lie; quelques Chapitres, destinés par Lie au second Volume, ont été rédigés d'après ses Notes et publiés, peu après sa mort, dans les *Mathematische Annalen*.

Lie traite les problèmes suivants relatifs aux équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

1. Équations dont les caractéristiques sont des asymptotiques des surfaces intégrales.

2. Équations dont les caractéristiques sont des lignes de courbure des surfaces intégrales.

3. Équations dont les caractéristiques sont des lignes géodésiques des surfaces intégrales.

4. Équations telles que les normales aux surfaces intégrales appartiennent à un complexe de droites donné.

5. Équations dont les caractéristiques sont des lignes droites.

6. Équations telles que, sur chaque surface intégrale, il y ait $\infty^1$ lignes géodésiques, dont les tangentes appartiennent à un complexe donné.

Pour chacun de ces problèmes, Lie donne la condition analytique que doit remplir la fonction F et, sauf pour le troisième problème, il parvient à définir complètement les équations $F = 0$ répondant à la question, par des considérations géométriques, conformément à sa méthode préférée, la méthode de ses premiers Mémoires, où l'intuition géométrique joue un rôle prépondérant.

Lie se propose ensuite de combiner les six problèmes précédents deux à deux et il annonce qu'on peut résoudre complètement, à l'aide de considérations géométriques, les quinze nouveaux problèmes ainsi posés: mais il réserve la solution pour le second Volume de son œuvre qui devait être consacré, semble-t-il, aux équations aux dérivées partielles qui admettent des transformations de contact données.

Ce sont les quinze problèmes ainsi posés par Lie, problèmes obtenus en combinant deux à deux les six problèmes énoncés plus haut, que M. Engelhardt s'est proposé de traiter. Le problème (1, 2) avait été résolu par Lie; les problèmes (1, 5) et (3, 5) se

confondent avec le problème 5 lui-même. Il reste donc à étudier douze problèmes que M. Engelhardt envisage successivement.

En ce qui concerne les problèmes (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6) et (3, 4), M. Engelhardt se borne à donner des catégories étendues d'équations aux dérivées partielles répondant à la question, sans résoudre les problèmes dans toute leur généralité. Les six autres problèmes sont complètement résolus : l'Auteur les traite le plus souvent par des considérations géométriques, en utilisant les solutions données par Lie pour les problèmes énoncés plus haut.

S. Lattès.

---

PICARD (Émile). — Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft. — Autorisierte deutsche Aufgabe mit erläuternden Anmerkungen von P. und L. Lindemann. Un vol. in-8, IV-292 pages. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1913.

Le Livre de M. Picard vient se placer dans la série d'Ouvrages de philosophie scientifique, *Wissenschaft und Hypothèse*, dont la maison Teubner commençait, il y a quelques années, la publication par les Livres célèbres de Henri Poincaré.

M. et Mme Lindemann nous ont donné une traduction fidèle et consciencieuse faite sur la première édition [1], et enrichie de notes bibliographiques nombreuses et substantielles.

L'Ouvrage réalise, peut-on dire, un inventaire critique et philosophique de la science actuelle, une vue d'ensemble de ses parties diverses, de leurs rapports mutuels, de leur avenir possible. Il nous montre par l'étude d'une science vivante et agissante, le but poursuivi par les savants, l'idée qu'on doit se faire de la Science, ce qu'il est possible d'en attendre. Délimitée par l'exclusion des problèmes purement philosophiques, cette tâche considérable est coordonnée par les idées générales de l'*Introduction*.

Que faut-il entendre par explication scientifique ? De quelle importance, de quelle valeur sont les théories que les savants bâtissent de tous côtés, quel rôle jouent-elles ?

Points d'appui momentanés des constructions de l'esprit

---

[1] La 2e édition, revue et augmentée, a paru en 1913.

humain, elles disparaissent quand elles deviennent insuffisantes, laissant en général, à l'acquis de la Science, des éléments importants qu'elles ont fait découvrir. On voit apparaître, dans cette mobilité continuelle de la Science, les approximations successives qui tendent à la constituer et qui sont un de ses caractères essentiels.

Que sera la valeur de la Science? M. Picard remarque qu'on peut parler de ses diverses valeurs. L'une sera, peut-on dire, la Science pour la Science, pour sa beauté propre, pour l'honneur de l'esprit humain. Pour qui espère de la Science, l'explication du monde, sa valeur est tout autre. Elle est différente encore, et bienfaisante, en général, dans les manifestations éclatantes de sa puissance dans l'industrie, dans l'agriculture et d'autres domaines. Ainsi se constitue l'idée complexe que nous nous faisons de la Science.

Les diverses sciences sont d'ailleurs solidaires. La Physique tend à la forme mathématique, soulève d'intéressantes difficultés sur l'explication mécanique des phénomènes, pose sous une forme précise divers problèmes d'analyse. Les phénomènes de la vie, en première approximation, se ramènent à la Physico-Chimie et provoquent son développement. Ainsi, les diverses parties de la Science, se prêtant un mutuel appui, progressent ensemble.

C'est à ce point de vue général que sont examinées successivement les Sciences mathématiques, physiques et naturelles. Il serait difficile d'analyser entièrement un texte qui, par sa nature même, est *gonflé* de faits importants. Nous signalerons seulement quelques applications frappantes de considérations générales exposées plus haut.

Après Galilée, on fut conduit à poser le principe que les changements infiniment petits survenant dans un système de corps dépendent uniquement de l'état actuel. Il en résulte que les phénomènes physiques sont régis par des équations différentielles qu'on pourra écrire quand l'expérience aura fourni certaines lois. Un progrès immense est fait en Physique, et la théorie des équations différentielles acquiert en Mathématique une importance considérable.

L'équation de Laplace, rencontrée dans les problèmes d'équilibre calorifique, en Hydrodynamique, dans la théorie de l'attraction universelle, oriente la théorie des équations aux dérivées par-

tielles, pose des problèmes entièrement nouveaux de détermination d'intégrales par des conditions aux limites. Unissant entre elles des théories distinctes, elle suggère des solutions, introduisant les potentiels de double et simple couche, s'épanouit enfin en une floraison admirable qui n'est pas terminée.

La question de la propagation des ondes, qui a donné tant de beaux résultats intéressant la Physique et les Mathématiques, soulève encore de difficiles questions d'analyse. Dans le domaine immense des équations fonctionnelles, les premiers pas ont été faits, guidés par des problèmes de physique. La mécanique héréditaire, la théorie de la réfraction, récemment, posent des questions différentes. Partout l'analyse, indispensable au progrès des Sciences physiques, progresse avec elles.

Dans le Chapitre sur les principes de la Géométrie, M. Picard est conduit à examiner une opinion connue de Poincaré, d'après laquelle, mis en présence de l'expérience, nous choisirions, parmi les diverses interprétations possibles, la plus commode et la plus simple. C'est dire que, parmi les théories possibles relatives aux faits géométriques, nous faisons choix de la plus commode et la plus simple. M. Picard croit, au contraire, que la théorie euclidienne, rendant bien compte des faits géométriques et des faits physiques qui lui sont indissolublement liés, doit être regardée comme plus *vraie* que les autres systèmes géométriques; il se place au point de vue de l'évolution et regarde que la Géométrie a fait partie de la Physique dans des temps très anciens. Je ne crois pas cependant que ces vues nouvelles puissent clore une discussion déjà longue : elle touche, comme l'indique M. Picard à ce propos, à trop de domaines différents.

Signalons aussi la manière saisissante dont peut être conçue la question des approximations successives de la Mécanique, d'après Helmholtz et Hertz. Si l'on suppose que, sur les $p$ variables d'un système, un nombre $p-q$ $(q<p)$ corresponde à des masses cachées, échappant à nos mesures. L'intégrale dépendra seulement de $2q$ paramètres, on ne pourra plus concevoir qu'on change le signe des dérivées qui nous sont inaccessibles. L'irréversibilité d'un système, qui peut d'ailleurs être conservatif, s'explique. On peut rêver alors que certaines variables cachées devenant visibles, les approximations progresseront jusqu'au cas chimérique où $q$ étant

égal à $p$, nous serions ramenés à la réversibilité complète.

Dans tout le cours de l'Ouvrage, à propos de la Physique et ses différentes parties, de la Chimie, des Sciences de la nature, de la Médecine, se déroule la chaîne des approximations successives, des théories multiples qui meurent et renaissent, l'histoire des influences mutuelles des sciences, l'analyse de leurs tendances actuelles.

On ne saurait mieux exprimer l'impression produite par la contemplation de ce vaste tableau qu'en citant (à peu près) M. Picard lui-même (*Introduction* de la deuxième édition) : « La Science nous apparaît comme une puissance formidable, qui ne recule jamais et dont les conquêtes sont définitives. Il semble que tout lui soit possible et l'on doit reconnaître que les progrès faits depuis un siècle autorisent des espérances pour ainsi dire illimitées. »

Il n'est pas douteux que cet important Ouvrage, sous la forme que lui ont donnée M. et M^me^ Lindemann, ne trouve aussi en Allemagne le grand succès qui l'accueillit en France il y a quelques années.

G. Darmois.

---

HILBERT (D.). — Théorie des Corps de Nombres algébriques. Ouvrage traduit de l'allemand par A. Lévy et Th. Got, avec une Préface et des Notes de M. G. Humbert et des Notes de M. Th. Got. Un vol. in-4, xvi-380 pages, Paris, A. Hermann et fils, 1913.

L'analyse de l'Ouvrage allemand a été faite dans ce *Bulletin* (2^e^ série, t. XXXV, p. 246) par M. Got, et nous y renvoyons le lecteur; nous n'avons à nous occuper ici que de la traduction et des notes. La traduction a été faite avec grand soin. Il y aurait quelques errata à ajouter à ceux qui sont signalés à la fin du Volume. Me bornant à la première page du texte (qui n'est qu'une demi-page) j'en trouve plusieurs : lignes 8 et 9 du texte, au lieu de « la somme, la différence et le quotient », il faut lire « la somme, la différence, le produit et le quotient »; ligne 10, au lieu de « cette notion de domaine est un invariant », il faut lire... autre chose, car qu'est-ce qu'une notion qui est un invariant? ligne 15, au lieu de « le nombre qui détermine le corps $k$ » il faut lire « un nombre qui détermine le corps $k$ ». A ce point de vue, la fin de la traduction semble meilleure que le commencement, car sur la centaine d'errata

signalés, environ quatre-vingt appartiennent aux soixante-dix premières pages, tandis que les trois cents autres pages n'en contiennent guère qu'une vingtaine. Constatons de plus, pour être justes, que la plupart de ces errata n'ont aucune importance et qu'on aurait pu les omettre. Pendant que nous sommes sur ce sujet, signalons quelques errata aux errata; en particulier ceux qui sont marqués comme s'appliquant à la page 55 s'appliquent à la page 56.

Laissons ces minuties, qui seraient complètement négligeables dans un Ouvrage original, et parlons des Notes. Les trois premières, dues à M. G. Humbert, complètent quelques démonstrations qui ne sont qu'esquissées dans le corps de l'Ouvrage. Elles seront utiles; il ne faut pas oublier que M. Hilbert n'a voulu faire qu'un Compte rendu et non pas un Traité; c'est pourquoi ses démonstrations sont souvent un peu sommaires. La Note V, due à M. Got, est de même nature; il en est de même des quelques petites Notes qu'il a placées au bas des pages du texte, elles seront utiles pour les mêmes raisons. Dans la Note IV, M. Humbert applique certains résultats généraux au cas particulier des corps quadratiques.

Enfin la Note VI, la plus importante, due à M. Got, porte sur les recherches faites sur le grand théorème de Fermat, postérieurement à la démonstration donnée par Kummer de ce théorème dans le cas des exposants réguliers (démonstration qui se trouve dans le corps de l'Ouvrage). Le plus important des résultats auxquels elles ont conduit est de Kummer lui-même; il consiste dans la démonstration du théorème pour certains exposants non réguliers. Tout en suivant la marche de Kummer, M. Got y apporte les changements nécessaires pour la faire cadrer avec la conception actuelle des idéaux et avec les notations de M. Hilbert. Il l'a fait d'une façon élégante, et en abrégeant notablement les calculs de Kummer. Pour les autres résultats (Mirimanoff, Wieferich, Frobenius, Dickson), M. Got se borne à les énoncer.

Quelle que soit, d'ailleurs, l'ingéniosité déployée par ces Auteurs, les résultats ne sont pas nombreux; en particulier, le théorème de Fermat n'a été démontré, depuis Kummer, pour aucun nouvel exposant.

Ces Notes, dont le contenu et l'étendue (62 pages) sont importants, ajoutent beaucoup à l'intérêt de la traduction. Nous regretterons qu'il n'y en ait pas plus encore. Car il nous semble qu'une traduction pure et simple d'un Ouvrage mathématique dont l'original est dans une langue aussi répandue que l'allemand n'est guère utile (sauf peut-être pour des Ouvrages didactiques). Combien peut-il y avoir de lecteurs capables de s'intéresser à l'Ouvrage de M. Hilbert, et incapables de le lire dans son texte original? Bien peu, vraisemblablement. En tout cas, quand un Livre est aussi excellent que celui dont nous parlons, quoi de plus naturel que d'en donner une seconde édition, revue et mise au courant. Le *Bericht* date de 1894 (édité en 1897). Depuis ce temps, quelques progrès ont été accomplis, du côté de la multiplication complexe par exemple. On peut regretter qu'aucune Note n'en fasse mention.

E. Cahen.

---

MANSION (Paul). — Abriss der Theorie der Hyperbelfunktionen nebst einer rein analytischen Theorie der Kreisfunktionen. Nach der dritten französischen Auflage übersetzt. 1 vol. in-8. 44 pages. Liepzig. B.-G. Teubner. 1913.

Depuis que le Père V. de Riccati (S. J.) a considéré au XVIII^e siècle les fonctions hyperboliques, que Gudermann en a construit des Tables étendues insérées au *Journal de Crelle*, nombreux ont été les mathématiciens qui ont apporté quelque contribution à l'étude de ces transcendantes, et nombreux aussi les curieux qui s'y sont intéressés. Les monographies de Laisant, de Gunther et autres, ont été vite épuisées, et celle de M. Mansion, très brève et très claire, après avoir obtenu trois éditions belges, est aujourd'hui traduite en allemand.

L'Opuscule comprend l'exposé des propriétés fondamentales à partir de la définition au moyen d'exponentielles, une Table sommaire à 4 décimales, d'après Houël, l'interprétation géométrique, les développements des fonctions directes et inverses en séries de puissances, les applications à la résolution de l'équation du troisième degré, aux propriétés de l'hyperbole, de la chaînette, de la tractrice, de la pseudosphère, enfin un aperçu de la Trigonométrie

de Lobatschefsky. Il se termine par une théorie purement analytique des fonctions circulaires (indépendante du postulatum d'Euclide). Malgré quelques indications historiques, la bibliographie est un peu sommaire.

Actuellement, en France, tout élève de Mathématiques spéciales est habitué à manier les fonctions hyperboliques aussi aisément que les fonctions circulaires, et il fallait bien en venir là, puisque dans un grand nombre de questions d'analyse, il suffit d'un changement de signe pour introduire les unes ou les autres : cette catégorie d'étudiants trouvera ici le développement d'une leçon de son programme.

A. Boulanger.

---

MOORS (B.-P.). — Étude sur les formules (spécialement de Gauss) servant à calculer des valeurs approximatives d'une intégrale définie. Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. (Eerste Sectie.) Deel XI, n° 6. 1 fasc. gr. in-8, 43 pages, 3 planches. Amsterdam, Johannes Müller, 1913.

Lorsqu'une fonction $y = f(x)$ est développable en série

$$(1) \qquad y = f(x) = L_0 - L_1 x + L_2 x^2 - \ldots + L_n x^n - \ldots,$$

la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ peut se représenter par

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = L_0 - \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{3} L_2 - \ldots - \frac{1}{n+1} L_n + \ldots,$$

si toutefois la série est uniformément convergente.

Mais on peut, sans connaître les coefficients L, calculer une valeur *approchée* de l'intégrale définie I, si l'on connaît les valeurs des ordonnées $y$ correspondant à un certain nombre d'abscisses $x$. Il est clair d'ailleurs que, pour rendre l'erreur la plus petite possible, il y aura lieu de choisir convenablement ces abscisses $x$. Connaissant les abscisses les plus favorables, on multipliera les ordonnées correspondantes par certains coefficients R, et l'expression $\sum Ry$ donnera une valeur approximative de l'intégrale. Les valeurs numériques de ces coefficients R et des abscisses favorables correspondantes ont été calculées par Gauss avec 16 décimales pour les

cas de 1 à 7 ordonnées; R. Radau les a donnés en outre pour 8, 9 et 10 ordonnées, avec 10 décimales.

Dans la présente étude, M. B.-P. Moors examine l'influence, sur l'erreur commise, du nombre de décimales conservées dans les abscisses selon Gauss. Il se trouve que, dans bien des cas, on abrège sensiblement les calculs, sans nuire à l'exactitude du résultat, en conservant moins de décimales dans les valeurs des abscisses et en prenant un plus grand nombre d'ordonnées.

En particulier, *s'il manque des termes* au commencement de la série (1), cette lacune peut avoir une très grande influence sur les longueurs des abscisses les plus favorables; les 14 ou 15 dernières des 16 décimales de Gauss peuvent ainsi perdre toute leur valeur.

C'est pourquoi à la fin de son étude, M. Moors fait suivre la Table où les abscisses selon Gauss sont calculées avec 16 décimales, d'une seconde Table où il ne conserve que 2 décimales dans les valeurs de ces abscisses. Cette seconde Table donne, d'après l'Auteur, des résultats au moins aussi exacts que la première, avec des calculs bien moins longs, pourvu qu'on prenne un plus grand nombre d'ordonnées.

H. VERGNE.

---

DINGELDEY (FRIEDRICH). — SAMMLUNG VON AUFGABEN ZUR ANWENDUNG DER DIFFERENTIAL UND INTEGRALRECHNUNG. Zweiter Teil: *Aufgaben zur Anwendung der Integralrechnung*. Mit 96 Figuren im Text. (*B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. Band XXXII, 2.) 1 vol. in-8, IV-382 pages. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1913.

Ce Recueil de problèmes sur les parties élémentaires du Calcul intégral, ou plus précisément sur le Calcul des quadratures, s'adresse aux élèves des écoles industrielles. Il pourrait en France s'adapter fort bien à un cours tel que celui de M. Appell à l'École Centrale.

La sélection des exercices a été faite suivant la méthode préconisée autrefois par John Perry dans son excellent *Calculus for Engeneers* (Londres, 1897). L'Auteur a parcouru le cycle complet des études d'un ingénieur praticien (mécanique, physique, thermodynamique, cinétique des gaz, radiologie, hydraulique, résistance des matériaux, électrotechnique, chimie physique, théorie des

erreurs, navigation, etc.); il en a détaché toutes les questions où l'Analyse mathématique est utilisée et il les a classées en quelques groupes employant la même notion ou le même procédé. Par exemple, la seule intégrale $\int_a^b x^n\,dx$ ne lui donne pas moins de 48 pages de développements. Ces exercices ont été encartés, d'ailleurs, parmi d'autres d'un caractère traditionnel, ou du moins *académique*, comme dirait J. Perry.

La difficulté dans l'exécution d'une telle œuvre est de présenter assez simplement l'énoncé de chaque question pour que l'étudiant en saisisse bien le sens sans connaître la théorie d'origine qu'il ne verra qu'ultérieurement. M. Dingeldey s'en est tiré très heureusement, et son œuvre ne déconcertera pas un étudiant français comme l'eût fait le Livre de J. Perry.

Les principes sont rappelés en tête de chaque Chapitre, en sorte que l'Ouvrage se suffit à lui-même et l'enchaînement est tel que la lecture se poursuit d'un bout à l'autre avec un vif intérêt sans laisser l'impression d'un recueil de problèmes. Les étudiants de nos Facultés qui liront ce Livre verront que le contact continuel avec le concret n'empêche pas la hauteur des vues, et ils se trouveront initiés, sans s'en apercevoir, aux sciences les plus diverses.

A. Boulanger.

---

CULLIS (C.-E.). — Matrices and Determinoids. Volume I. University of Calcutta, *Readership Lectures*. 1 vol. in-8 jésus, XII-430 pages. Cambridge, at the University Press, 1913.

1. $m$ et $n$ étant deux nombres naturels, on sait ce qu'on entend par *matrice rectangulaire*

$$A = [a]_m^n = \begin{bmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1n} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ a_{m1}, & \ldots, & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$m$ est l'ordre *horizontal*, $n$ l'ordre *vertical*. Le plus petit de ces deux nombres (ou l'un de ces deux nombres, s'ils sont égaux) s'appelle l'*ordre effectif* de la matrice.

Si $m = n$, on dit que la matrice est *carrée*.

$a_{11}$ s'appelle l'*élément principal*; $a_{11}$, $a_{22}$, ..., $a_{jj}$, ... forment

la *diagonale principale*. La colonne à l'extrême gauche de A est dite *colonne principale*. Une suite de colonnes se trouvant à gauche de toutes les colonnes autres que celles de la suite, occupe dans A une *position principale*. De même, la plus haute ligne est dite *ligne principale* et si une suite de lignes se trouve au-dessus de toutes les lignes autres que celles de la suite, on dira qu'elle occupe dans A une position principale.

Si, dans une matrice, on permute des lignes ou des colonnes, la nouvelle matrice est dite *matrice dérangée dérivée* de A.

Si une matrice A′ se déduit de A en supprimant certaines lignes ou colonnes sans toucher à l'ordre relatif des autres lignes ou colonnes, on a une *matrice mineure rangée* de A. Si l'on supprime toutes les lignes au-dessous d'une ligne déterminée et toutes les colonnes à droite d'une colonne déterminée, on forme une matrice mineure rangée *occupant dans* A *une position principale*. Si, dans une matrice mineure rangée de A, on permute des lignes ou des colonnes, elle devient une matrice mineure *dérangée*.

Si l'on ne supprime que des lignes, ou bien que des colonnes, on a une matrice mineure *simple*.

Les matrices mineures, rangées ou dérangées, ou les dérangements de A constituent toutes les *matrices dérivées* de A.

2. Si un nombre aussi grand que possible d'éléments $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... est pris dans la matrice A de telle façon qu'il n'y en ait pas deux dans la même ligne, ni deux dans la même colonne, le produit $\alpha\beta\gamma$... est appelé *produit dérivé complet* appartenant à la matrice. Le nombre des facteurs est égal à l'ordre effectif de la matrice.

On appelle *produit dérivé d'ordre r* appartenant à la matrice A un produit $\alpha\beta\gamma$... formé de $r$ éléments choisis dans la matrice A, de façon qu'il n'y ait pas deux éléments dans la même ligne, ni deux éléments dans la même colonne. Si $r$ est plus petit que l'ordre effectif de la matrice, le produit dérivé est dit *incomplet*. Le nombre total des produits dérivés d'ordre $r$ est $P_r C_m^r C_n^r$.

3. Le passage d'un élément de la matrice à un élément contigu de la même ligne est appelé *pas horizontal en avant*, ou *en arrière;* on aura aussi le pas vertical en haut ou en bas, c'est-à-dire en arrière ou en avant. Si l'on parle de pas sans dire s'il est en avant ou en arrière, il s'agira d'un pas en avant.

4. Deux matrices sont dites *conjuguées* quand les lignes de

l'une sont les colonnes de l'autre. La matrice conjuguée de $A = [a]_m^n$ est désignée par la notation

$$A' = \overline{\overline{a}}^{\,m}_{\,n} = \begin{bmatrix} a_{11}, \ldots, a_{m1} \\ \ldots, \ldots, \ldots \\ a_{1n}, \ldots, a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Une matrice *conjuguée d'elle-même* est une matrice carrée $[a]_m^m$ telle que $a_{kj} = a_{jk}$ $(k, j = 1, 2, \ldots, m)$.

5. Le *déterminoïde* d'une matrice A est la somme algébrique de tous les produits complets, l'ordre des facteurs étant indifférent. Chaque produit est affecté d'un signe suivant la loi suivante : Soit $\alpha\beta\gamma\ldots$ un produit dérivé complet, dans lequel l'ordre des facteurs est indifférent. Dans la matrice A comptons le nombre total des pas horizontaux et verticaux, à partir de l'élément principal jusqu'à l'élément $\alpha$ ; soit $\alpha'$ ce nombre ; supprimons dans A la ligne et la colonne qui se croisent sur $\alpha$ ; appelons $A_1$ la matrice qui se déduit de A par cette suppression. Dans la matrice $A_1$, comptons le nombre total de pas horizontaux et verticaux conduisant de l'élément principal à l'élément $\beta$ ; soit $\beta'$ ce nombre, et ainsi de suite. Le signe cherché est celui de $(-1)^{\alpha'+\beta'+\gamma'+\cdots}$.

$\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots$ est appelé l'*affect* du produit $\alpha\beta\gamma\ldots$ La définition du signe est indépendante de l'ordre des facteurs.

Un déterminoïde est une fonction linéaire et homogène des éléments d'une rangée longue ; si l'on multiplie les éléments d'une rangée longue par un facteur $k$, le déterminoïde est multiplié par ce nombre. Si, dans une matrice, on permute deux rangées longues, le déterminoïde correspondant change de signe sans changer de valeur absolue, de sorte que, si deux rangées longues sont identiques, le déterminoïde est nul. On peut, dans un déterminoïde, sans changer sa valeur, ajouter aux éléments d'une rangée longue les éléments d'une autre rangée longue préalablement multipliés par un même facteur.

6. Un Chapitre est consacré à l'étude de l'affect d'un produit dérivé ; un autre à celle des *suites* ou matrices n'ayant qu'une rangée.

Prenons maintenant une matrice $A = [a]_m^n$ qu'on appelle sa *matrice fondamentale* ou *déterminoïde fondamental*, et une matrice dérivée $B = [a_{xy}]_\mu^\nu$. Soit $\omega'$ l'affect de la suite $[x_1, \ldots, x_\mu]$ dans la suite $[1, 2, \ldots, m]$ et $\omega''$ l'affect de la suite $[y_1, \ldots, y_\nu]$ dans

la suite $[1, 2, \ldots, n]$; $\omega'$ s'appelle l'affect vertical de B dans A, $\omega''$ l'affect horizontal de B dans A et $\omega' + \omega'' = \omega$ l'affect total de B dans A, ou simplement l'affect de B dans A.

On peut concevoir des matrices dérivées *étendues* ou *complétées :* on ajoute à droite ou au-dessous des éléments de la matrice dérivée des éléments de A avec le même ordre relatif que dans A. L'affect d'une matrice dérivée n'est pas altéré quand on l'étend ou qu'on la complète. Si $\omega$ est l'affect d'une matrice dérivée B dans la matrice fondamentale A, il est possible d'amener B à être une matrice principale de A par des mouvements en avant, horizontaux et verticaux, et le nombre total de ces mouvements est toujours égal à $\omega$; $\omega$ est le plus petit nombre possible de mouvements nécessaires pour cette opération.

Si B est un mineur rangé de la matrice fondamentale A et B′ un dérangement de B, on a

$$\text{aff. B}' \text{ dans A} = \text{aff. B}' \text{ dans B} + \text{aff. B dans A}.$$

Si B est un mineur dérangé de A et B′ un dérangement de B, on a

$$\text{aff. B}' \text{ dans B} + \text{aff. B dans A} = \text{aff. B}' \text{ dans A} + 2k,$$

$k$ étant un nombre entier positif ou nul.

Si D est une matrice carrée rangée dérivée de A et P un produit dérivé complet de D, on a

$$\text{aff. P dans A} = \text{aff. P dans D} + \text{aff. D dans A}.$$

Si D est dérangée,

$$\text{aff. P dans D} + \text{aff. D dans A} = \text{aff. P dans A} + 2k \qquad (k \geqq 0).$$

Si $\omega$ et $\omega'$ sont les affects de deux matrices mineures complémentaires rangées dont les ordres sont respectivement $\mu$, $\nu$; $\mu'$, $\nu'$, alors $\omega + \omega' = \mu\mu' + \nu\nu'$. Si B et C sont deux matrices mineures complémentaires rangées de la matrice fondamentale A, et si A′ et C′ sont les matrices déduites de A et C, en renversant à la fois les lignes et les colonnes, on a

$$\text{aff. B dans A} = \text{aff. C}' \text{ dans A}'.$$

7. Un déterminoïde est la somme algébrique des produits que l'on obtient en multipliant chaque élément affecté d'une rangée longue donnée par le déterminoïde mineur rangé complémentaire. Si l'on choisit deux rangées longues distinctes d'un déterminoïde et qu'on multiplie chaque élément de l'une d'elles par les facteurs correspondant aux éléments de l'autre dans le développement du déterminoïde suivant la deuxième rangée longue, la somme algébrique des produits est nulle.

Un déterminoïde est la somme algébrique de tous ses simples mineurs rangés ou dérangés pris chacun avec le signe déterminé par son affect dans le déterminoïde primitif.

Un simple mineur du déterminoïde fondamental $\Delta$ est dit *coupé long* ou *coupé court*, suivant que les rangées effacées dans $\Delta$ sont des rangées longues ou des rangées courtes; cela posé, un déterminoïde est la somme algébrique de tous les produits qu'on peut obtenir en multipliant chaque déterminant simple mineur affecté d'une matrice mineure coupée longue quelconque donnée par le déterminoïde mineur rangé complémentaire. (C'est la généralisation de la règle de Laplace relative aux déterminants.)

8. Deux matrices sont dites *semblables* quand elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. Elles sont *inversement semblables* si le nombre des lignes de l'une est égal au nombre des colonnes de l'autre. Deux matrices semblables sont dites *égales* quand tous leurs éléments de mêmes indices sont égaux chacun à chacun.

Deux matrices dissemblables sont égales si les matrices semblables qu'on peut en déduire par l'addition de rangées de zéros après les rangées existantes sont égales. Les deux matrices sont dites alors *conventionnellement égales*. Une matrice A dont tous les éléments sont des zéros est dite *matrice zéro*. On écrit alors $A = 0$.

Si A et B sont deux matrices semblables, $A \pm B = C$ définit une matrice C telle que $c_{jk} = a_{jk} \pm b_{jk}$. On conçoit de même l'addition algébrique d'un nombre quelconque de matrices semblables. Si les matrices sont dissemblables, on les rend semblables par l'addition finale d'un certain nombre de rangées de zéros.

Multiplier une matrice A par un nombre $k$, c'est multiplier par $k$ *tous* les éléments de la matrice. Le produit est désigné par $Ak$

ou $kA$ ; on a

$$k(A + B) = kA + kB,$$

$$(k_1 + k_2)(A + B) = k_1 A + k_1 B + k_2 A + k_2 B.$$

Si A est une matrice ayant $m$ rangées longues et si $k$ est un nombre, on a

$$\text{dét.}(kA) = k^m . \text{dét.} A.$$

Si $A = B$, on a aussi

$$kA = kB.$$

9. Considérons le produit formé par une chaîne de matrices facteurs

$$[a]_m^{\alpha'}[b]_\beta^{\beta'}[c]_\gamma^{\gamma'}[d]_\delta^{\delta'}[e]_\varepsilon^{\varepsilon'} \ldots [l]_\lambda^{n} = [x]_m^{n}.$$

Les lignes de la première matrice facteur et les colonnes de la dernière matrice facteur sont appelées *rangées actives*. Toutes les autres rangées des matrices facteurs sont des rangées passives.

La $j^{\text{ième}}$ rangée active de la première matrice *correspond* avec la $j^{\text{ième}}$ ligne de la matrice produit ; de même la $j^{\text{ième}}$ colonne de la dernière matrice facteur avec la $j^{\text{ième}}$ colonne du produit.

Soient $D = [d]_\delta^{\delta'}$, $E = [e]_\varepsilon^{\varepsilon'}$ deux matrices facteurs consécutives de la chaîne. La $j^{\text{ième}}$ colonne passive dans la matrice D, à gauche, sera dite correspondre à la $j^{\text{ième}}$ ligne dans la matrice E, à droite, aussi longtemps que les $j^{\text{ièmes}}$ rangées se présentent dans les matrices. Si $\delta' > \varepsilon$, il y aura des colonnes de D qui n'auront pas de lignes correspondantes dans E ; elles sont appelées colonnes *surabondantes*. Si $\delta' < \varepsilon$, il y aura dans E des lignes passives surabondantes.

Le produit sera de forme canonique si $\alpha' = \beta$, $\beta' = \gamma$, $\gamma' = \delta$, .... On peut le mettre sous cette forme soit en ajoutant des rangées de zéros, soit en supprimant des rangées surabondantes.

Si, par exemple,

$$[x]_m^{n} = [a]_m^{\alpha}[b]_\alpha^{\beta}[c]_\beta^{\gamma}[d]_\gamma^{n},$$

alors

$$x_{ij} = \sum_{u=1}^{\alpha} \sum_{v=1}^{\beta} \sum_{w=1}^{\gamma} (a_{iu}\, b_{uv}\, c_{vw}\, d_{wj}).$$

La matrice produit n'est pas changée par l'insertion ou la

suppression d'un nombre quelconque de rangées passives finales de zéros dans l'une quelconque des matrices facteurs. Si une rangée passive non surabondante dans une matrice facteur quelconque est une rangée de zéros, nous pouvons l'effacer, ainsi que la rangée passive correspondante qui se présente dans la matrice facteur précédente ou suivante, sans altérer la matrice produit. Réciproquement, on peut insérer une rangée passive non surabondante additionnelle n'importe où, dans l'une quelconque des matrices facteurs, et une rangée passive correspondante de zéros dans la position correspondante dans la matrice facteur adjacente convenablement choisie, et cela sans altérer la matrice produit. On peut, sans altérer la matrice produit, multiplier tous les éléments d'une rangée passive par $k$, et diviser par $k$ les éléments de la rangée correspondante ; ou encore, permuter d'une façon quelconque les rangées passives d'une matrice facteur, pourvu qu'on permute de la même façon les rangées passives correspondantes dans la matrice facteur adjacente convenablement choisie.

**10.** Les éléments d'une rangée donnée, dans la matrice produit, sont des fonctions linéaires et homogènes des éléments de la rangée active correspondante dans la chaîne. Les éléments appartenant à une rangée active donnée quelconque de la chaîne se présentent dans la matrice produit seulement dans les éléments de la rangée correspondante ; si une rangée active dans l'une ou l'autre des matrices facteurs extrêmes est une rangée de zéros, la rangée correspondante, dans la matrice produit, est une rangée de zéros. Nous pouvons effacer des rangées actives dans l'une des matrices facteurs extrêmes, ou dans les deux, pourvu qu'on efface les rangées correspondantes dans la matrice produit. De même on peut remplacer les rangées correspondantes qui précèdent par des rangées de zéros ; on peut insérer des rangées actives additionnelles de zéros n'importe où dans l'une des matrices facteurs extrêmes, ou dans les deux, pourvu qu'on insère aussi des rangées correspondantes de zéros dans la matrice produit. On peut permuter les rangées actives dans l'une des matrices facteurs extrêmes, ou dans les deux, pourvu qu'on fasse exactement la même permutation sur les rangées correspondantes de la matrice produit. On peut multiplier tous les éléments d'une rangée active de la chaîne par un nombre $k$ pourvu qu'on multiplie aussi tous les éléments de la

rangée correspondante de la matrice produit par $k$. On peut additionner aux éléments d'une rangée active de l'une quelconque des matrices facteurs extrêmes les éléments correspondants d'une autre rangée active de la même matrice, chacun d'eux étant multiplié par la même quantité $k$, pourvu qu'on fasse la même opération sur les rangées correspondantes de la matrice produit.

11. Si une matrice facteur est remplacée par une autre, qui lui soit conventionnellement égale, la matrice produit n'est pas changée, ou elle est remplacée par une autre matrice qui lui est conventionnellement égale. Réciproquement, si $X = AB \ldots KL$, et si $X'$ est conventionnellement égale à $X$, on aura $X' = A'B \ldots KL'$, où $A'$ et $L'$ sont conventionnellement égales à $A$ et $L$ respectivement.

La conjuguée d'un produit d'un nombre quelconque de matrices prises dans un ordre donné est identique au produit des conjuguées des différentes matrices facteurs prises dans l'ordre inverse.

Si l'on multiplie tous les éléments d'une matrice facteur par $k$, la matrice produit sera multipliée par $k$ (tous les éléments seront multipliés par $k$). Si l'une des matrices facteurs est une matrice zéro, le produit sera une matrice zéro. Si l'une des matrices facteurs est une matrice unité, on peut l'omettre. Un produit de matrices unités est une matrice unité.

12. Si la passivité du produit AB est moindre que son ordre effectif, on a dét. $AB = 0$. Si la passivité du produit AB n'est pas moindre que son ordre effectif, réduisons le produit AB au produit $A'B'$ de deux matrices carrées d'ordre $\eta$ en effaçant des rangées correspondantes passives dans les deux matrices facteurs, et des rangées actives dans la matrice facteur la plus grande. Soient $\Delta$, $\Delta'$ les deux déterminants des deux matrices carrées $A'B'$ et $\omega$, $\omega'$ leurs affects dans les matrices A, B. On a

$$\text{dét. } AB = \Sigma[(-1)^{\omega+\omega'}\Delta\Delta'].$$

La somme s'étend à tous les couples possibles de déterminants d'ordre $\eta$ dérivés de A et de B, respectivement de la manière indiquée. Si A et B sont deux matrices carrées,

$$\text{dét. } AB = \text{dét. } A. \text{ dét. } B.$$

La même équation a lieu si la plus petite des deux matrices A et B est une matrice carrée. Pour le cas d'un nombre quelconque de matrices facteurs, $AB \ldots DE \ldots ST = X$, si l'une des passivités $\alpha, \beta, \ldots, \delta, \varepsilon, \ldots, \rho, \sigma$ est moindre que l'ordre effectif $\eta$, on a

$$\text{dét.}\, X = 0.$$

Sinon, dans un couple quelconque de matrices facteurs adjacentes de la chaîne, effaçons les couples de rangées passives correspondantes jusqu'à ce que le nombre des couples de rangées passives correspondantes soit réduit à $\eta$, et supposons que X soit alors réduit à X'. Si cela a été fait de toutes les façons possibles, X est la somme de termes tels que dét. X'.

Dans la matrice facteur de la chaîne qui a la plus grande activité, effaçons des rangées actives de façon à réduire son activité à $\eta$ et supposons que X soit alors réduit à X'; si cela est fait de toutes les façons possibles, dét. X est la somme de termes tels que $(-1)^{\omega}$ dét. X' où $\omega$ est l'affect de la matrice extrême réduite dans la matrice extrême primitive.

Si la passivité des deux matrices facteurs consécutives D, E de la chaîne est égale à l'ordre effectif $\eta$, de sorte que ces deux matrices contiennent exactement $\eta$ couples de rangées passives correspondantes, on a

$$\text{dét.}(AB \ldots DE \ldots ST) = \text{dét.}(AB \ldots D)\,\text{dét.}(E \ldots ST).$$

13. On définit comme il suit une *matrice de déterminants mineurs* d'une matrice fondamentale $X = [x]_m^n$. Soit $k$ un nombre qui ne dépasse pas le plus petit des nombres $m, n$; $[m_1 m_2 \ldots m_k]$ un mineur d'ordre $k$ de la suite $[1.2 \ldots m]$, et $[n_1 n_2 \ldots n_k]$ un mineur d'ordre $k$ de la suite $[1.2 \ldots n]$; ces suites mineures sont respectivement en nombres $C_m^k$, $C_n^k$. Ici, deux suites mineures d'une suite fondamentale donnée sont regardées comme distinctes si l'une n'est pas un simple dérangement de l'autre. Prenons $C_m^k = \mu$ valeurs distinctes de la suite mineure $[m_1 m_2 \ldots m_k]$ rangées dans n'importe quel ordre. On les appellera $1^{\text{ième}}, 2^{\text{ième}}, \ldots, p^{\text{ième}}, \ldots, \mu^{\text{ième}}$ valeurs; prenons de même $C_n^k = \nu$ valeurs distinctes de la suite mineure $(n_1 n_2 \ldots n_k)$ qu'on appellera $1^{\text{ième}}, 2^{\text{ième}}, \ldots, q^{\text{ième}}, \ldots, \nu^{\text{ième}}$ valeurs. Soit la matrice simple mineure de X formée en ne retenant que ses $m_1^{\text{ième}}, m_2^{\text{ième}}, \ldots, m_k^{\text{ième}}$ lignes et en les rangeant

dans cet ordre; soit de même la matrice simple mineure de X obtenue en ne retenant que ses $n_1^{\text{ième}}$, $n_2^{\text{ième}}$, ..., $n_k^{\text{ième}}$ colonnes et en les rangeant dans cet ordre. La première s'appelle *mineur horizontal* de X d'ordre réduit $k$ correspondant à la suite $[m_1 m_2 \dots m_k]$, et la deuxième, *mineur vertical* de X d'ordre réduit $k$ correspondant à la suite $[n_1 n_2 \dots n_k]$. Soit

$$\xi_{pq} = [x_{mn}]_k^k = \begin{vmatrix} x_{m_1 n_1} & \dots & x_{m_1 n_k} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ x_{m_k n_1} & \dots & x_{m_k n_k} \end{vmatrix},$$

où $[m_1 m_2 \dots m_k]$, $[n_1 n_2 \dots n_k]$ ont respectivement leurs $p^{\text{ième}}$ et $q^{\text{ième}}$ valeurs. La matrice $[\xi]_\mu^\nu$ est appelée une *matrice complète de déterminants mineurs non affectés de l'ordre k de* X. On peut avoir des matrices complètes de déterminants mineurs affectés d'ordre donné $k$. Si $\omega$ et $\omega'$ sont les affects vertical et horizontal du déterminant mineur $\xi_{pq}$ dans la matrice fondamentale $[x]_n^m$, si l'on pose $\xi'_{pq} = (-1)^{\omega+\omega'}\xi_{pq}$, la matrice envisagée est $[\xi']_\mu^\nu$.

Considérons le produit $X = ABC \dots ST$. Soient $\eta$ l'ordre effectif du produit, $k$ un nombre quelconque qui n'est pas plus grand que $\eta$. Si l'une quelconque des passivités est moindre que $k$, alors toute matrice complète de déterminants mineurs, affectés ou non affectés, d'ordre $k$ de la matrice produit X, est une matrice zéro. Si aucune des passivités n'est moindre que $k$, alors chaque matrice complète de déterminants mineurs, affectés ou non affectés, d'ordre $k$ de la matrice produit X, est égale au produit d'une certaine suite de matrices complètes correspondantes formées avec les déterminants mineurs (affectés ou non) d'ordre $k$ des matrices facteurs A, B, C, ..., S, T.

14. Le *rang* d'une matrice dont les éléments sont constants est le plus grand ordre que puisse avoir un déterminant dérivé qui ne s'évanouit pas. Une matrice zéro est de rang zéro. Le rang d'une matrice ne peut dépasser son ordre effectif. S'il est moindre que l'ordre effectif, la matrice est dite *dégénérée*, sinon on dit que la matrice est non dégénérée.

Une matrice *singulière* est une matrice dont le déterminoïde est nul; si le déterminoïde n'est pas nul, la matrice est dite *non singulière*. Le rang d'un déterminoïde est le même que celui de la matrice.

Soit $A = [a]_m^n$ une matrice à éléments constants. On dit qu'il y a relation entre les lignes ou leurs matrices quand il existe des nombres $h_1, h_2, \ldots, h_m$ qui ne sont pas tous nuls et tels qu'on ait

$$(1) \quad h_1[a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}] + h_2[a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}] + \ldots + h_m[a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn}] = 0.$$

Cette matrice équation équivaut au système

$$\begin{aligned} h_1 a_{11} + \ldots + h_m a_{m1} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_1 a_{1m} + \ldots + h_m a_{mm} &= 0, \end{aligned}$$

si $h_i \neq 0$, la $i^{\text{ième}}$ ligne (ou sa matrice) est dite *liée* avec les autres lignes. Quand il n'existe pas de relations telles que (1), les lignes sont dites non liées (indépendantes).

Des considérations analogues ont lieu pour les colonnes. S'il existe une relation quelconque entre les lignes ou entre les colonnes d'une matrice carrée, le déterminant de la matrice s'évanouit. Si $\Delta$ est un déterminant dérivé non nul de la matrice A, les lignes et les colonnes de A qui se présentent dans $\Delta$ ne peuvent être liées.

Si la matrice A a pour rang $r$, si $\Delta_r$ est un de ses déterminants dérivés d'ordre $r$ ne s'évanouissant pas, les lignes (ou les colonnes) qui se présentent dans $\Delta_r$ ne sont pas liées; mais toutes les autres lignes sont liées avec celles qui se présentent dans $\Delta_r$ (il en est de même pour les colonnes).

Si $s$ rangées parallèles d'une matrice A ne sont pas liées, elles forment une matrice simple mineure de rang $s$, ayant au moins un déterminant dérivé non nul d'ordre $s$.

Si $r$ est le rang de la matrice A, il est possible de trouver $r$ rangées non liées de chaque espèce, mais on n'en peut trouver plus de $r$ : ces $r$ rangées choisies, chacune des autres est liée avec celles-là. Si toutes les lignes (ou colonnes) d'une matrice A sont liées avec $r$ d'entre elles, le rang de A ne peut dépasser $r$; si ces $r$ rangées sont elles-mêmes indépendantes, le rang est $r$; réciproquement, si le rang est $r$, ces $r$ rangées sont indépendantes. S'il existe une relation entre certaines des rangées actives de l'une ou l'autre des matrices facteurs extrêmes dans un produit formé par une chaîne de matrices facteurs, la même relation existe aussi entre les rangées correspondantes de la matrice produit.

Si $\Delta_r$ est un déterminant dérivé d'ordre $r$ non nul de la matrice A, et si tous les déterminants dérivés de A d'ordre $r+1$ qui contiennent $\Delta_r$ comme mineur s'évanouissent, alors tous les déterminants mineurs d'ordre $r+1$ de A s'évanouissent, et la matrice A est de rang $r$. Si tous les déterminants dérivés de A d'ordre $r+s$ qui contiennent $\Delta_r$ s'évanouissent, tous les déterminants dérivés de A d'ordre $r+s$ s'évanouissent, et le rang de A ne peut dépasser $r+s-1$.

Si $X = ABC\ldots ST$, le rang de X ne peut dépasser le rang de l'une quelconque des matrices facteurs.

Le rang d'une matrice reste inaltéré si on la multiplie à droite ou à gauche par une matrice carrée non dégénérée, à condition que le produit formé soit un produit canonique.

Si une rangée d'une matrice est liée avec quelques-unes des rangées parallèles, le rang de A est égal au rang de la matrice déduite de A en supprimant cette rangée.

Si une matrice a pour rang $r$, et si nous fixons notre attention sur $s$ rangées parallèles non liées de A, $s < r$, nous pouvons toujours déterminer une suite de $r$ rangées de A parallèles à celles-là, non liées, et contenant les $s$ rangées considérées.

Si une matrice n'est pas dégénérée, chaque matrice complète de ses déterminants mineurs d'ordre $s$ est non dégénérée pour toutes les valeurs possibles de $s$. Si la matrice a pour rang $r$, si $s > r$, la matrice complète des déterminants mineurs d'ordre $s$ a pour rang zéro; si $s < r$, son rang est $C_r^s$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $[a]_m^n$ ait pour rang $r$ est que les matrices complètes de ses déterminants mineurs d'ordre $s \leq r$ aient pour rang

$$C_r^s = \frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{1.2\ldots s}.$$

15. Une équation matrice du premier degré est une équation de la forme

$$A_1XB_1 + A_2XB_2 + \ldots + A_rXB_r = C,$$

où les $A_j$, les $B_j$ et C sont des matrices connues à coefficients constants. On se bornera aux équations réductibles à la forme $AXB = C$.

Quand tous les éléments de la matrice solution X sont finis, la solution est *finie*. Si l'un au moins de ces éléments est infini,

X pourra être appelé une solution *infinie* de l'équation. Si $X = A$ et si X et A sont des matrices semblables, cela revient à $x_{jk} = a_{jk}$. Si les matrices ne sont pas semblables, l'égalité est alors conventionnelle. Une telle égalité est alors impossible à moins que ceux des éléments de A qui n'ont pas de correspondants dans X soient des zéros.

L'équation $X + A = B$ revient à $X = B - A$.

L'équation $AX = C$, C et X étant des matrices semblables, n'a qu'une solution si A est une matrice carrée non dégénérée ou non singulière; de même $XB = C$; de même enfin $AXB = C$ :

Prenons l'équation $AXB = C$,

$$[a]_m^\rho [x]_\rho^\sigma [b]_\sigma^n = [c]_m^n,$$

$$A' = [a, c]_m^{\rho, n} \qquad \text{et} \qquad B' = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}_{\sigma, m}^n$$

seront les matrices augmentées correspondantes. Lorsque les matrices augmentées A', B' ont respectivement pour rangs $r$ et $s$, en effaçant $m - r$ lignes correspondantes de A et de C, et $n - s$ colonnes correspondantes de B et de C, l'équation peut être ramenée à une équation irréductible de la forme

$$[a]_r^\sigma [x]_\rho^\sigma [b]_\sigma^s = [c]_r^s.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $AXB = C$ ait une ou plusieurs solutions finies est que A' ait le même rang que A et B' le même rang que B; si ces rangs sont $r$ et $s$, la solution générale exprime $rs$ des éléments inconnus en fonctions linéaires (en général non homogènes) des $\rho\sigma - rs$ autres éléments inconnus, auxquels on peut donner des valeurs arbitraires.

La condition nécessaire et suffisante pour que $AXB = 0$ conduise nécessairement à $X = 0$ est que le rang de A soit égal à sa passivité, de même le rang de B, égal à sa passivité. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $AXB = 0$ ait des solutions non nulles est que le rang de l'une des matrices facteurs extrêmes soit moindre que sa passivité. Les solutions infinies de l'équation $AXB = C$ sont données par la formule

$$[x]_\rho^\sigma = k[X]_\rho^\sigma,$$

où $k$ est un nombre infini, et $[X]_2^z$ une solution finie non nulle de l'équation $AXB = 0$.

16. La solution d'un système d'équations linéaires est un cas particulier du problème précédent, car les équations

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

sont équivalentes à l'unique équation matrice

$$[a]_m^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad \text{ou à} \qquad [x_1 x_2 \ldots x_n] \overline{\underline{a}}_n = [c_1 c_2 \ldots c_n].$$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & c_n \end{bmatrix} \text{ est la matrice augmentée de } A = [a]_m^n,$$

et l'on applique les théorèmes précédents, qui conduisent aux règles connues de la résolution des équations linéaires avec les solutions finies ou infinies. Le cas particulier des équations linéaires et homogènes est étudié. L'équation

$$[a]_r^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0.$$

dans laquelle le rang de $[a]_r^n$ est $r$, a toujours exactement $nr$ solutions non nulles finies indépendantes, etc. Les résultats sont trop connus pour que j'insiste.

17. Dans l'analyse qui précède, j'ai cherché à donner une idée de l'étude consciencieuse et approfondie de la théorie des matrices que constitue ce Livre. Toutes les définitions, tous les théorèmes sont illustrés de nombreux exemples et accompagnés d'exercices. L'effort considérable fait pour élucider d'une façon parfaite tous les fondements de cette théorie ne sera pas inutile. Sans doute, les applications indiquées dans le premier Volume ne sont pas nombreuses, car elles se réduisent à l'étude des systèmes d'équations linéaires; mais l'Auteur nous promet deux autres Volumes.

R. Le Vavasseur.

SECO DE LA GARZA (RICARDO). — LES NOMOGRAMMES DE L'INGÉNIEUR Préface de MAURICE D'OCAGNE. Avec 121 nomogrammes et un transparent en celluloïd. 1 vol. in-8 carré; XII-192 pages; 85 planches. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

Ce Livre s'adresse uniquement aux praticiens, à ceux des chantiers et à ceux des bureaux d'études. C'est un Recueil à l'usage de l'Ingénieur de Travaux publics.

Nous tenons à saisir l'occasion qui nous est donnée d'en parler dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* pour signaler à nouveau l'utilité d'une collaboration intime entre théoriciens et techniciens. Ceux-ci ont de plus en plus besoin de l'aide de ceux-là, en raison du développement de la matière qui peut être soumise au calcul, d'une part, et en raison de l'augmentation des exigences relatives à la précision des résultats à obtenir, d'autre part. Leur rapprochement, malheureusement trop rare encore, est utile des deux côtés. Chez tous il fortifie l'esprit, lui donnant de la sûreté et le poussant en avant en lui faisant acquérir un sens plus profond des réalités chez les uns, en lui permettant des vues plus précises et des compréhensions plus larges chez les autres. Chez tous il doit donc enrichir l'intuition, et il en sera ainsi lorsque de chacun des deux côtés on travaillera en portant souvent ses regards, plus souvent qu'aujourd'hui, sur l'autre rive.

Nous estimons qu'à l'heure présente l'appel doit surtout être adressé aux théoriciens. En effet, l'âpre concurrence qui anime maintenant la vie industrielle a ouvert à ce sujet les yeux d'une grande partie des techniciens. Mais celui qui est dans la vie active s'y trouve absorbé, le temps lui manque pour s'adonner aux études supérieures de science pure, études qui sont généralement indispensables, en tout cas très profitables, pour mettre en état de conduire la théorie dans les applications. Le spéculatif doit donc venir à lui.

En remarquant que l'utilisation technique de la théorie ne peut être faite largement que par un esprit doué d'un sens pratique très avisé, nous voyons que les savants dont le concours pourra être précieux dans le sens dont nous parlons se réduiront à peu près uniquement à ceux qui auront travaillé ce côté de la science. Par

suite, il est désirable que beaucoup d'entre les théoriciens cherchent à exercer leur goût dans cette direction.

Le praticien a besoin de solutions conduisant simplement et rapidement aux résultats. Les problèmes ainsi posés seront de toute première importance au point de vue des applications, et en même temps ils apparaîtront souvent comme du plus haut intérêt au point de vue purement spéculatif; il leur arrivera de mettre l'esprit des théoriciens sur des voies nouvelles. Cette large perspective n'est-elle pas faite pour tenter les esprits vigoureux alliés à un cœur généreux.

Tout ceci a déjà été dit, par des savants éminents en particulier. Si nous nous permettons de le répéter ici c'est que nous ne voyons pas la Société mathématique de France s'occuper des applications; les Mémoires qui y sont présentés ne se rapportent pour ainsi dire jamais à la science de l'Ingénieur. Nous aimerions voir cette Société se développer de ce côté. Encore une fois, tous en profiteraient. Le praticien cultivé y viendrait entretenir et augmenter les connaissances théoriques qu'il lui faut posséder pour être digne de figurer dans l'état-major industriel d'une nation d'avant-garde. Alors, dans l'étude de sa technique, il risquerait beaucoup moins qu'aujourd'hui de se trouver gêné, ou même arrêté, par le manque de théorie, au point de vue de la connaissance et au point de vue du mécanisme d'utilisation, de sorte que son effort pourrait se concentrer davantage sur le côté pratique, qui serait d'ailleurs plus largement éclairé.

La Nomographie est certainement l'une des applications des théories mathématiques qui sert le plus aux praticiens; c'est ainsi que M. Maurice d'Ocagne a pu réunir, à l'École des Ponts et Chaussées, une collection de plus de 300 nomogrammes distincts. Quant au théoricien, lorsqu'il cherche les formules pouvant rentrer dans une représentation graphique donnée, par exemple, il y rencontre des problèmes d'algèbre pure ou relatifs à la résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur, problèmes souvent très délicats, et dont beaucoup n'ont pas encore reçu de solution.

M. le capitaine du génie Seco présente une série d'applications de la méthode des points alignés, méthode due à M. Maurice

d'Ocagne, et dont l'étude lui a permis de déterminer un si large développement du domaine de la Nomographie; dans cette série nous trouvons le simple alignement, le double alignement en équerre, le double alignement concourant; nous y avons la représentation de formules à 8 variables (1).

Ce qu'est un nomogramme et quel est son but, M. Maurice d'Ocagne le rappelle, très simplement et avec une grande clarté, dans la Préface de l'Ouvrage de M. Seco de la Garza; cette Préface est en grande partie la reproduction d'une Communication faite par son Auteur au IV^e Congrès international des mathématiciens (Rome, 1908).

Un premier Chapitre de préliminaires débute par quelques pages où sont donnés les noms des ingénieurs, militaires ou civils, qui ont établi les premiers nomogrammes, et de ceux qui ont récemment étudié des représentations nomographiques. M. Maurice d'Ocagne se place en avant, non seulement en raison de sa contribution particulièrement importante aux progrès de la Nomographie, mais encore parce qu'il est le fondateur de cette science, vu que c'est lui qui, le premier, a coordonné dans une étude d'ensemble les différentes théories de la représentation graphique des équations. Ce Chapitre se termine par des indications générales sur l'emploi des échelles des nomogrammes à points alignés, suivant le nombre des variables et suivant la grandeur des données.

Les Chapitres suivants se rapportent aux nomogrammes qui sont réunis à la fin du Livre. Au moyen d'exemples concrets, ils indiquent la façon de se servir de ces nomogrammes, en se conformant aux clefs qui y figurent; en outre, ils donnent des Tableaux numériques et quelques conseils pratiques relatifs aux questions envisagées. Mais rien n'est dit au sujet de l'établissement des nomogrammes considérés; quelquefois même la formule correspondante n'est pas rappelée. On n'y trouve aucune théorie.

Nous terminerons ce compte rendu par une indication sommaire des sujets des planches et des données des Tableaux.

Sur la résistance des materiaux, les nomogrammes font connaître

---

(1) *Exemple :* On a une locomotive dont les caractéristiques sont : tous les essieux couplés, $37$ tonnes de poids total, diamètre des roues motrices $= 38^{cm}$, course des pistons $= 50^{cm}$. On veut connaître le poids qu'elle pourra remorquer avec une vitesse de $30^{km}$ à l'heure, et aussi la tension de vapeur nécessaire.

les dimensions à donner aux pièces comprimées ou aux pièces soumises à la flexion, puis celles que doivent avoir les pièces des fermes de combles de différentes sortes, les épaisseurs nécessaires dans les divers types de murs de soutènement, enfin les efforts supportés par les pièces des ponts en poutres armées, ou par celles des ponts suspendus; des Tableaux donnent ici des charges de sécurité et des densités, pour les matériaux de construction et les terrains, les charges uniformes équivalentes au train type ou à des troupes déterminées, et la vitesse approximative d'un cours d'eau d'après la nature du fond.

Relativement aux communications, des nomogrammes donnent les surfaces des profils en travers dans les différents cas, d'autres les flèches et les cordes des arcs circulaires, et les deux derniers concernent la traction d'une locomotive à vapeur.

Sous ce titre, les Tableaux sont nombreux : conditions de marche des troupes d'après les pentes; largeurs des diverses routes; dévers et excès de largeur d'une voie de chemin de fer en courbe, en fonction du rayon de la courbe et de la vitesse des trains; résistances à la traction des trains des différents genres; résistances à la traction dans les courbes, d'après le rayon; répartition du poids d'une locomotive sur ses essieux; poids des locomotives d'après le type; vitesses maxima des trains et rayons des roues motrices; poids et dimensions des voitures et des wagons, pour différentes sortes.

Viennent ensuite des nomogrammes sur les mines explosives et leur emploi pour obtenir des démolitions ou des ruptures. Un Tableau indique la disposition des charges dans différents cas de démolition.

Et pour finir la série, on trouve la représentation des formules de résolution des triangles rectilignes, celle des formules relatives aux aires (triangle, quadrilatère, ellipse, segment parabolique, surface des corps ronds), et celle des formules relatives aux volumes (tronc de prisme, tronc de pyramide, tas de sable, pontons, tronc de cylindre, tronc de cône, secteur sphérique, segment paraboloïde, tore, tranche sphérique), la dernière planche se rapportant au cubage des arbres.

A cet endroit se placent, avec quelques remarques très simples sur la mesure des longueurs et sur celle des angles, sur le terrain,

un Tableau de correspondance entre les pentes et les degrés, une Table des longueurs des arcs, des cordes et des tangentes de la circonférence de rayon 1, et des diamètres, circonférences et aires de cercles correspondants, et aussi des Tables de poids spécifiques (matériaux de construction, substances diverses, fer forgé), puis une Table des résistances à la traction sur des voies de différentes natures.

Le texte se termine sur un Appendice où sont données quelques indications des plus élémentaires sur la vérification des graduations des échelles vulgaires, et sur celle de leurs positions.

HENRI TRIPIER.

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

TODHUNTER (J.). — *Trattato sul Calcolo : I. Calcolo differenziale. II. Calcolo integrale.* 2 vol. in-8, VIII-476 p. et VIII-451 p. Naples, B. Pellerano. 12 L.

BURALI-FORTI (C.) et MARCOLONGO (R.). — *Analyse vectorielle générale. Applications physico-mécaniques.* In-8, XII-144 p. Pavia, Mattei e C. 5 L.

KATZ (D.). — *Psychologie u. mathematischer Unterricht.* (*Abhandlungen üb. den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Veranlasst durch die internationale Unterrichtskommission. Hrsg. v. *F. Klein.* 8e fasc.). In-8, IV-120 p. avec 12 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 3 m. 20.

ADHÉMAR (R. D'). — *Leçons sur les Principes de l'Analyse.* T. II : Fonctions synectiques. Méthodes des majorantes. Équations aux dérivées partielles du premier ordre. Fonctions elliptiques. Fonctions entières. Augm. d'une Note sur les séries normales par *Serge Bernstein.* In-8, VII-297 p. avec 34 fig. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

BENSAUDE (Joaquim). — *L'Astronomie nautique au Portugal à l'époque des grandes découvertes.* Gr. in-8, 290 p. avec fig. Bern, Akadem. Buchh. v. M. Drechsel. 10 m.

CHÂTELET (A.). — *Leçons sur la Théorie des Nombres.* (Modules, entiers algébriques, réduction continuelle.) In-8, X-156 p. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr. 50.

1re Partie.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

---

INSTITUT DE FRANCE. ACADÉMIE DES SCIENCES. — PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE TENUES DEPUIS LA FONDATION DE L'INSTITUT JUSQU'AU MOIS D'AOUT 1835, publiés, conformément à une décision de l'Académie, par MM. les Secrétaires perpétuels. Tome I : An IV-VII (1795-1799). 1 vol. in-4 jésus (32,5 × 25), IV + IV + 680 pages. Hendaye (Basses-Pyrénées), Imprimerie de l'Observatoire d'Abbadia, 1910. (En vente chez Gauthier-Villars, Paris.)

De nos jours, tous les « honnêtes gens » sont tenus au courant des questions agitées à l'Académie des Sciences par les journaux et les revues, tandis que les professionnels trouvent une ample moisson de documents dans les fameux *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences*, collection incomparable qui comprend aujourd'hui plus de 150 volumes. Mais cette publicité ne date pas d'un siècle : la loi du 9 floréal an IV, qui a créé l'Institut, avait décidé que les séances ordinaires seraient privées et intérieures. Ce ne fut qu'en 1825 que le docteur A. Bertrand parvint, grâce à beaucoup d'habileté, à initier les lecteurs du journal *Le Globe* aux débats de l'Académie ; à partir de 1830, sa tâche fut facilitée : Arago fit en effet réserver aux représentants de la presse un banc dans la salle des délibérations. En 1831, A. Bertrand mourait et le docteur Louis Raulin prenait la continuation de son œuvre dans le journal *Le Temps*. A la fin de chaque année, L. Raulin réunissait ses articles en un volume. L'accueil tout à fait favorable que rencontra cette publication décida l'Académie à se charger elle-même de faire connaître ses travaux, et, en 1835, Arago et Flourens commencèrent à faire paraître les *Comptes rendus hebdomadaires*.

Pour la période antérieure, il n'y avait jusqu'à présent point d'autre source d'information que les registres manuscrits des Procès-verbaux des séances tenues par l'Académie des Sciences. « Depuis longtemps déjà, écrit M. Darboux, ces Procès-verbaux

étaient considérés comme un monument des plus précieux pour tous ceux qui s'occupent de l'Histoire des Sciences. Il ne se passait pour ainsi dire de semaine sans que quelque chercheur, ou quelque érudit, vînt demander à notre Commission administrative l'autorisation de les consulter, et de faire des recherches, presque toujours couronnées de succès, dans les Archives de notre Compagnie. » Les Secrétaires perpétuels ont pensé « que la publication intégrale de ces documents, d'un intérêt si exceptionnel, contribuerait à mettre en lumière les travaux de nos illustres prédécesseurs et permettrait aux historiens de la Science d'éclaircir bien des points demeurés, aujourd'hui encore, douteux ou obscurs ».

Mais il s'agissait de publier 160 Registres in-folio, partant de 1666, — et d'y joindre bien des pièces annexes nécessaires. « Nos successeurs, écrit encore M. Darboux, ne craindront pas d'envisager cette œuvre dans son ensemble. Pour nous, à qui le temps et les moyens étaient mesurés, il nous a paru que nous devions, en quelque sorte, courir au plus pressé. Et nous avons proposé à l'Académie de commencer par publier seulement la partie de nos Procès-verbaux qui s'étend depuis la fondation de l'Institut en l'an IV de la République jusqu'à l'année 1835.... Notre proposition a reçu de l'Académie l'accueil le plus favorable. Son exécution aura l'inappréciable avantage de faire, en quelque sorte, remonter la publication des *Comptes rendus* jusqu'à la date même de la fondation de l'Institut. Et d'ailleurs, la partie que nous avons ainsi choisie se rapporte à la plus belle époque de la Science française, celle où des hommes tels que Lagrange, Laplace, Lamarck, Cuvier, Monge, etc. faisaient partie de l'Académie. »

Le premier Volume, que vient de publier M. Gaston Darboux, comprend les séances du 6 nivôse an IV (26 décembre 1795) au 26 fructidor an VII (12 septembre 1799).

La Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut, qui remplaçait alors l'ancienne Académie des Sciences, se réunissait le premier et le sixième jour de chaque décade, le soir, à 5 heures et demie, et l'on peut juger de l'assiduité de ses membres par le tableau de présence inséré à la fin du Volume.

Les Sections qui intéressent les lecteurs de ce *Bulletin* comprirent, durant notre période, les membres suivants :

*Mathématiques.* — Lagrange, Laplace, Borda, Lacroix, Bossut, Legendre, Delambre;

*Arts mécaniques.* — Monge, Le Roy, Carnot, Périer, Vandermonde, Prony, Bonaparte, Berthoud;

*Astronomie.* — Lalande, Méchain, Le Monnier, Cassini, Pingré, G. de Bory, Messier, Jeaurat.

Vandermonde et Pingré moururent bientôt; Lacroix et Cassini ne furent nommés qu'en l'an VII; Méchain, Le Monnier, Carnot ne parurent jamais, Delambre et Monge guère, et Bonaparte seize fois. Par contre, Bossut, Lagrange, Legendre, Prony, Le Roy, Lalande, Bory, Messier, Jeaurat assistaient très régulièrement aux séances, Laplace très fréquemment.

Un tel Volume ne s'analyse pas : nous allons le parcourir en glanant çà et là des choses intéressantes ou curieuses que nous lierons à peine en une gerbe grossière. Certes on pourrait désirer un autre choix: autant de lecteurs, autant de glanes différentes. Mais nous espérons que le nôtre suffira pour engager un grand nombre de personnes à refaire pour leur compte notre promenade.

Le 6 nivôse an IV, la Classe constitue ainsi son Bureau: Lagrange, président; Laplace, vice-président; Lacépède, secrétaire; Haüy, vice-secrétaire. Les questions des locaux, du règlement intérieur, des publications retinrent d'abord l'attention, mais dès la seconde Séance commença la lecture des Mémoires.

Les premiers Mémoires lus (11 nivôse) furent un travail de Lalande, sur une nouvelle détermination de l'orbite de Mercure et un autre de Cuvier sur la circulation dans les animaux dits à sang blanc.

Le premier Rapport, dû à la Section de Chimie, sur l'invitation du Bureau central de la Commune de Paris, concerne une poudre annoncée comme pouvant remplacer la poudre à poudrer: l'usage de cette préparation est déclaré nuisible.

Dès la sixième séance (1 pluviôse), un citoyen offre de communiquer ce qu'il appelle sa découverte du mouvement perpétuel, lorsqu'il sera sûr d'une récompense. Le Secrétaire est chargé de lui répondre que la Classe n'a aucune récompense à accorder pour cet objet. A cette occasion, un membre propose de faire connaître par les journaux que l'Institut ne s'occupera jamais d'aucune ques-

tion relative à la *quadrature du cercle* et à la *trisection de l'angle*, ou au *mouvement perpétuel*.

Le 28 pluviôse an IV, la Classe charge son Président de proposer en son nom à l'Assemblée générale de l'Institut, d'arrêter que l'Institut national, ni aucune de ses Classes ne s'occupera de l'examen d'aucun ouvrage imprimé. Le 21 ventôse, elle déclare que, les privilèges dont l'obtention était nécessaire pour la publication des travaux des savants n'existant plus, elle ne peut point s'occuper d'examiner si un ouvrage mérite ou non d'être imprimé.

Le 1er germinal an IV, un projet de machine aérostatique susceptible de direction par le Cn Rey est déclaré inexécutable: les rapporteurs estiment qu'il ne contient aucune vue dont on puisse faire application utile, même en changeant les dimensions, pour obtenir une force ascensionnelle suffisante.

Le 26 germinal, un curieux compte rendu de Charles et de Monge envisage les télégraphes sous le double rapport de la mécanique et de la politique, tandis que Delambre transmet un exposé de ses opérations pour la mesure de l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barcelone.

Le 6 floréal, un ingénieur des Ponts et Chaussées du Havre, Girard, fait parvenir un Mémoire sur la contraction de la veine fluide : Borda et Prony, chargés d'examiner ce remarquable travail, n'en rendront compte que le 11 frimaire an VI; mais ils constateront alors que l'Auteur « éclaire avec succès la pratique des arts du flambeau de la Géométrie ». A signaler en passant l'emploi du mot *hydrauliste*, aujourd'hui abandonné et qu'on pourrait bien reprendre.

Six mois écoulés, conformément au règlement, la Classe procède à la nomination d'un Président et de deux Secrétaires : sont élus Laplace, Lacépède et Prony.

Le 26 floréal, Hallé lit, au nom de Laplace et au sien, un Rapport d'une belle clarté, qui repose de la rhétorique pleine d'emphase alors à la mode: il s'agissait d'un travail statistique de Mourgues sur les naissances, mariages et morts de la ville de Montpellier, de 1772 à 1792. Les Commissaires dégagent les principales conséquences des calculs faits par l'Auteur.

Le 6 prairial, Fourcroy et Bayen rendent compte de leur examen de crayons adressés à l'Institut par le Ministre de l'Intérieur et

dont le Cⁿ Conté, peintre et physicien, est l'inventeur. « Le but de l'Auteur a été de substituer aux crayons d'Angleterre et d'Allemagne, que la guerre a rendus plus rares et plus chers, de nouveaux crayons artificiels, qui, en multipliant nos ressources en ce genre, pussent en même temps affranchir la France d'un tribut qu'elle a payé jusqu'ici à ses voisins, et créer une branche d'industrie, trop peu ou trop mal cultivée jusqu'à ce moment dans la République française ».

Le 16 prairial, Delambre couvre de fleurs Lefrançois Lalande neveu, à l'occasion d'une nouvelle détermination de la hauteur du pôle à Paris ($48^\circ\ 10'\ 15''$) : son historique de la question et sa discussion des procédés de mesure sont intéressants.

Le 21 prairial, la Classe arrête les sujets des prix qu'elle décernera pour la première fois dans ses assemblées publiques de messidor an VI et de vendémiaire an VII.

*Sujet du prix de Physique :* Comparaison de la nature, de la forme et des usages du foie dans les diverses classes d'animaux.

*Sujet du prix de Mathématiques :* Construction d'une montre de poche propre à déterminer les longitudes en mer, en observant que les divisions indiquent les parties décimales du jour, ou que le jour soit divisé en dix heures, l'heure en cent minutes et la minute en cent secondes.

Le 1er messidor, à propos de l'élection de Saussure, la Classe « s'empresse de témoigner son respect pour la Constitution ».

Le 16 thermidor, Prony signale un moyen de convertir un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif, dont les allées et venues soient d'une grandeur arbitraire, — moyen qui figure dans tous nos Traités de Cinématique.

Le 1er vendémiaire an V (1796), Borda est élu président et Jussieu remplace Lacépède comme Secrétaire.

Le 6 du même mois, Hallé et des Essartz exécutent de main de maître un charlatan électrothérapeuthe du nom de Sans.

Le 11, Rapport remarquable de Legendre et Lagrange sur un travail de Duvillard concernant l'établissement d'une Caisse nationale d'économie, et où l'on trouve l'origine de la mathématique financière.

Le 16 brumaire, Broussonet demande de partir en qualité de l'un des membres de l'Institut chargés de voyager pour le progrès

des Sciences : il indique le *Maroc*, comme le pays où il préférerait d'être envoyé et montre tous les avantages qui pourraient résulter d'un voyage dans cette partie de l'Afrique.

Le 1er frimaire, Parmentier répond à une double question du Ministre de la Guerre : Le son conservé dans la composition du pain peut-il être nuisible à la santé des soldats ? S'il est reconnu qu'on peut l'y admettre, dans quelle proportion peut-on l'y laisser ? Il se montre nettement opposé à l'usage du pain complet. Le même jour, Legendre apprécie un nouveau moyen de faire la multiplication des entiers proposé par le Cn Vera.

Le 6 nivôse, Rapport de Vauquelin sur des étoffes imperméables à la pluie.

Le 11, Rapport étendu de Legendre sur le Traité de Calcul différentiel et intégral dont Lacroix venait d'entreprendre la publication.

Le 16 pluviôse, Berthoud lit, sur deux montres imaginées par l'horloger Gautrin, une étude lumineuse, modèle d'analyse cinématique.

Le 1er germinal, Fourcroy est porté à la présidence et Prony est réélu Secrétaire.

Le 11, Rapport sur l'établissement d'une maison d'inoculation, qui eût été le premier embryon de l'Institut Pasteur.

Le 16, présentation par Prony du peson à ressort et à cadran imaginé par Régnier, et qui a figuré longtemps dans les Manuels de Physique.

Le 21, Le Roy et Brisson étudient minutieusement un fusil inventé par l'arquebusier Lefaure : selon eux, « il serait fort à souhaiter qu'on tentât d'en faire usage dans les troupes de la République ».

Le 6 floréal, le Cn Venturi, professeur de Physique à Modène, lit le commencement d'un Ouvrage qu'il a entrepris, sur la vie et les manucrits de Léonard de Vinci.

Le 16 prairial, Lagrange présente à la Classe un exemplaire de sa *Théorie des fonctions analytiques*, et, le 26, Carnot adresse ses *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*.

Le 26 thermidor, Rapport très étendu de la section de Chimie sur la manière de purifier le salpêtre, à la demande du Ministre des Finances.

Le 1er fructidor, curieuse lettre du médecin Fodéré qui, avec beaucoup de dignité, se plaint de la dureté de la Classe dans l'appréciation de ses Ouvrages, — et de fait, *tous* les rapports sont inspirés par une critique acerbe, impitoyable ; *tous* sont dépourvus de cette bienveillance dont ne se départ jamais l'Académie actuelle.

Le même jour, la Commission des Finances présente un projet de budget pour l'an VI, rempli de détails intéressants.

Le 21 fructidor, l'emploi du nouveau système de poids et mesures républicains est rendu obligatoire pour toutes les publications de la Classe et pour les Mémoires qui seront présentés à son examen.

Prony lit un Rapport sur des expériences d'hydraulique de Venturi, qui sont aujourd'hui devenues classiques.

Durant l'an VI, les Présidents seront Lacépède, puis Bossut ; les Secrétaires, Prony et Lassus, puis Lassus et Lefèvre-Gineau.

Le 6 vendémiaire, collecte en faveur d'un publiciste malheureux; mais la Classe « arrête que dorénavant il ne lui sera présenté aucune demande de l'espèce de celle du Cn Grunwald ».

Le 11 du même mois, Rapport de Lagrange et Bossut sur un Mémoire de Callet, intitulé *Considérations sur la sommation de certaines suites périodiques* (il s'agit des suites infinies du type $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$ dont Daniel Bernoulli s'était déjà occupé).

Le 21 brumaire, élection du Cn Buonaparte, ou plutôt présentation à l'Assemblée générale de l'Institut qui choisira, parmi Buonaparte, Dillon, Montalembert, dans l'ordre des suffrages le successeur du Cn Carnot exilé. Il y avait douze candidats et les trois premiers se suivaient de près. Comme nouveau titre, dans la Séance suivante, le Général en chef de l'Armée d'Italie fait transmettre à la Classe par le Directoire exécutif l'annonce du Traité de paix qu'il a conclu avec la maison d'Autriche.

Le 21 frimaire, lumineux Rapport sur un balancier perfectionné applicable à la fabrication de la Monnaie.

Le 6 nivôse, Bougainville, membre de la Classe des Sciences morales et politiques, lit une Notice sur des larves qui s'étaient introduites dans des bouteilles pleines de vin, par des trous qu'elles avaient faits au travers des bouchons.

Le 26 nivôse, dans une lecture de Le Roy : « Il paraît que, parmi

les modernes, le Dr Hooke est le premier qui ait eu l'idée du télégraphe, car... le 21 mai 1684, il lut à la *Société Royale de Londres* un écrit intitulé : *Discours dans lequel on donne le moyen de faire connaître sa pensée à une grande distance ;* ce qui est véritablement l'objet du télégraphe. » Voilà donc un précurseur d'Amontons et de Chappe.

Le 11 ventôse, Prony analyse un Ouvrage important du Cn Girard, intitulé : *Traité analytique de la résistance des solides, et des solides d'égale résistance, auquel on a joint une suite de nouvelles expériences sur la force et l'élasticité spécifique des bois de chêne et de sapin.*

Ce Livre, que continueront Navier et Barré de Saint-Venant, présente, comme introduction, une exposition raisonnée des travaux des géomètres et des physiciens sur la résistance des corps depuis Galilée; il contient beaucoup de vues qui ont été adoptées, notamment en ce qui concerne les solides d'égale résistance.

En germinal, sont adoptés les sujets de prix à délivrer en l'an VII et en l'an VIII.

*Sujets de Mathématiques :* 1° Déterminer par un grand nombre d'observations, au moins 600, les plus exactes, de la longitude de l'apogée et des nœuds de la Lune, quelles sont les erreurs de nos meilleures Tables et particulièrement des Tables de Masson.

2° Construire des modèles de machines à l'aide desquelles on puisse secourir les personnes retenues et menacées de périr dans des maisons incendiées.

*Sujets de Physique :* 1° Rechercher, par des expériences exactes, quelle est l'influence de l'air atmosphérique, de la lumière, de l'eau, de la terre, dans la végétation.

2° Indiquer les substances terreuses et les procédés propres à fabriquer une poterie résistante aux passages subits du chaud au froid, et qui soit à la portée de tout le monde.

Le 11 germinal, Callet présente ses *Tables portatives de logarithmes*, et Hallé lit un long Rapport en réponse à une demande du Ministre de la Police, relative à un projet de nettoiement des rues de Paris par lavage à grande eau : il s'agissait de charrier dans la Seine toutes les immondices, d'inaugurer presque le tout à l'égout. Le Rapport est rempli de réflexions judicieuses sur les difficultés de réalisation du projet.

A signaler, le 6 floréal, un très curieux Rapport sur un *Barême typographique* du Cⁿ Couret-Villeneuve, ancien imprimeur, qui se flattait de mettre fin aux dilapidations des entrepreneurs de certains ateliers appartenant à la République.

Le 16 floréal, sur la proposition d'un membre, il est arrêté que, quand un Mémoire mathématique sera présenté, le Président invitera l'Auteur à donner un précis de sa méthode, à mettre ses principaux calculs sur le tableau, à les expliquer et en donner le résultat.

Le 1er prairial, Herschell signale la découverte de quatre nouveaux satellites de sa planète (Uranus) ; il annonce aussi que le mouvement des deux anciens est rétrograde et que leurs orbites sont presque perpendiculaires à l'écliptique (contrairement à ce qui se passe pour les satellites des autres planètes).

Le 11 du même mois, Rapport sur un baromètre de l'invention du Cⁿ Conté, directeur de l'École nationale aérostatique de Meudon.

Le 26, le prix de Mathématiques est partagé entre les auteurs de deux montres, qu'on reconnaît, à l'ouverture des plis cachetés, être toutes deux l'œuvre de Louis Berthoud.

Le prix de Physique, sur les fonctions du foie n'est pas décerné. De l'unique Mémoire présenté, les Commissaires ont douté un instant si l'Auteur était dans son sérieux, ou s'il n'avait pas plutôt voulu faire une satire du langage que quelques personnes conservent néanmoins de nos jours. Cuvier insiste sur « le besoin où l'on est encore dans bien des lieux en France, d'une instruction saine et raisonnable, puisqu'un homme qui sait écrire, qui possède quelque teinture des lettres, et *à qui la santé de plusieurs citoyens est confiée* (car il parle souvent de sa pratique) a pu croire qu'une production aussi informe était de nature à être présentée à l'Institut », et ce besoin est toujours resté actuel.

Le 21 messidor, rapport judicieux de Bossut sur le Bélier hydraulique de Montgolfier et Argand, dont on prétendait, de nos jours, tirer parti pour l'utilisation de la houille blanche. La conclusion est encore à retenir.

Le 21 thermidor, Prony et Borda rendent compte des *Recherches sur les meilleures manières de déterminer les longitudes à la mer*, de Callet.

En l'an VII (soit à partir du 22 septembre 1798), les Présidents seront Jussieu, puis Cousin ; les Secrétaires Lassus et Lefèvre-Gineau.

Le 11 vendémiaire, superbe et considérable Étude de Borda et Levêque, à l'occasion d'un Mémoire du lieutenant de vaisseau Maingon, intitulé *Carte trigonométrique servant à réduire la distance apparente de la Lune au Soleil ou à une étoile, en distance vraie, et à résoudre d'autres questions de pilotage.*

Le 1er frimaire, le Ministre de l'Intérieur demande quelle est l'unité qui, dans le nouveau système de mesures, doit remplacer ce que les fontainiers appellent *pouce d'eau.*

Le 6 nivôse, Rapport de Legendre et de Lagrange sur un Mémoire de Burmann, professeur de commerce à Mannheim, intitulé *Formules de développement, de retour et d'intégration.* Le principal résultat est cette série de Burmann qu'on trouve dans le *Traité d'Analyse* d'Hermann Laurent (t. III, p. 351) et à laquelle se rattache la série de Wronski.

Le 21, Mémoire de l'ingénieur Cachin sur *Caen port de mer.*

Le 16 germinal, Laplace lit un long Rapport approbatoire sur plusieurs Mémoires de Parceval, concernant le calcul intégral aux différences partielles et ses applications aux équations des fluides et de la propagation du son, des vibrations des lames élastiques et des cordes vibrantes dans un milieu résistant comme la vitesse. Il termine ainsi : « La considération attachée par l'Institut à ce genre de recherches peut seule entretenir en France l'étude de la haute géométrie, si nécessaire aux progrès des Sciences, et dans laquelle les découvertes deviennent chaque jour plus difficiles et plus rares. »

Le 21 prairial, Rapport de Le Roy et Brisson sur une demande du Ministre de l'Intérieur, touchant l'aérostation et le mérite de Montgolfier : il contient des détails d'histoire peu connus et dont il faudrait faire état dans une histoire de l'aviation.

Le 11 messidor, un Mémoire de Bouvard, intitulé *Rectification des moyens mouvements de la Lune par les éclipses anciennes et modernes*, fixe l'attention de la Classe : il s'agit surtout de 32 éclipses observées par les Arabes et dont trois seulement étaient alors connues.

Le 25, amusant Rapport sur l'emploi du rhum dans certaines affections catarrhales.

Le 21 thermidor, examen d'un Mémoire de Murol ayant pour titre *Essai sur la forme et la position les plus avantageuses des ailes d'un moulin à vent ;* lecture d'un travail de Girard sur le mouvement d'ascension et d'abaissement des vagues de la mer, appliqué comme force motrice aux diverses machines connues, ainsi qu'à plusieurs machines d'une invention nouvelle.

Le 26, lettre du Ministre de l'Intérieur, par laquelle il demande quels sont les moyens à employer pour le nettoyement des statues de marbre.

Le 16 fructidor, Fourcroy et Vauquelin annoncent la découverte de l'urée.

Le 21, Laplace présente à la Classe son *Exposition du système du monde* et son *Traité de Mécanique céleste.*

Le 26, Coulomb donne une nouvelle Méthode pour déterminer l'inclinaison des aiguilles aimantées.

Une énumération aussi sèche — où nous n'avons rien mentionné des Sciences naturelles — ne peut donner qu'une idée très faible de l'intensité de la vie qui animait la première Classe de l'Institut. Mais elle suffit au moins, croyons-nous, pour montrer la part considérable prise par ce Groupe à toutes les manifestations de de l'activité sociale : ses membres ne se sont pas retirés dans une tour d'ivoire, et, loin d'envisager la Science en dilettantes, ils ne voulurent jamais la séparer de ses applications ; âpres dans leurs critiques, ils ne furent pourtant pas des pessimistes, et, en toutes circonstances, ils témoignèrent d'un patriotisme généreux.

Le Volume est d'une correction remarquable ; à peine peut-on relever un lapsus (qui sans doute figurait au registre) : le 16 fructidor an VII (p. 619), la séance ouvre et est levée à six heures. De plus, à la dernière page, on lit cette mention : « Le présent Volume a été composé avec des caractères de la maison Turlot, dits Louis XV. Ce type a été choisi, malgré son prix élevé, à cause de son aspect extrêmement reposant pour la vue. » En fait, la lecture se poursuit sans fatigue oculaire : puissent en prendre bonne note et s'en souvenir, à l'occasion, tels éditeurs devenus pitoyables à leur clientèle.

A. Boulanger.

VERNERI (JOANNIS). DE TRIANGULIS SPHAERICIS LIBRI QUATOR. *De meteoroscopiis libri sex cum prooemio.* GEORGII IOACHIMI RHETICI. II. *De meteoroscopiis.* Herausgegeben von JOSEPH WÜRSCHMIDT, unter Benutzung der Vorarbeiten von Dr A. BJÖRNBO. Mit einem Vorwort von EILHARD WIEDEMANN und 97 Figuren im Text (*Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* Begründet von MORITZ CANTOR. Heft XXIV, 2). 1 vol. in-8, v-260 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1913.

Jean Werner, de Nüremberg, fut, assurément, le plus illustre continuateur de Georges de Peurbach et de Jean Müller de Königsberg (Regiomontanus). Comme ceux-ci, il fut surtout préoccupé d'améliorer la théorie de la précession des équinoxes. Pour y parvenir, il compliqua le système proposé par les *Tables Alphonsines;* aux deux sphères mobiles qu'on avait, d'après ces tables, superposées à la sphère des étoiles fixes pour en expliquer le mouvement, Werner en adjoignit une troisième. Copernic devait bientôt s'élever contre la complexité de la théorie admise par Werner et fonder, sur de tout autres principes, une théorie de la précession des équinoxes beaucoup plus exacte et qui ravit, d'emblée, tous les suffrages.

Si les hypothèses copernicaines reléguèrent bientôt dans l'oubli les travaux de Werner au sujet de la précession des équinoxes, elles ne détournèrent aucunement l'intérêt des œuvres accomplies par le même astronome en Trigonométrie sphérique.

Werner, en effet, avait composé un Traité divisé en deux Parties. La première Partie, intitulée *De triangulis sphaericis* et formée de quatre Livres, avait pour objet l'étude de la Trigonométrie sphérique proprement dite. La seconde partie, intitulée *De meteoroscopiis* et contenant six Livres, est consacrée aux applications astronomiques de cette science, et à l'usage d'instruments propres aux diverses observations célestes.

L'Ouvrage de Werner avait été imprimé une première fois à Cracovie, en 1557, par le disciple favori de Copernic, Georges Joachim Rhéticus. Rhéticus l'avait accru d'une préface.

Axel Anthon Björnbo avait entrepris la réédition de cet Ouvrage, d'après l'édition de Rhéticus et d'après un manuscrit conservé, sous le n° 1259, dans le fond latin de la Biliothèque nationale. En 1907, il avait donné la réimpression du traité *De triangulis sphae-*

*ricis*, avec une reproduction photographique de la préface de Rhéticus, dans la collection : *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, qu'a fondée le professeur Moritz Cantor.

La mort a saisi A. A. Björnbo avant qu'il ait pu donner le Traité *De meteoroscopiis*. Sur l'indication de M. E. Wiedemann, l'Académie de Bavière a confié à M. Würschmidt le soin de tirer parti des matériaux réunis par le savant bibliothécaire de Copenhague. M. Würschmidt a mené cette tâche à bien avec le plus grand soin. En particulier, pour faciliter la lecture des raisonnements de Werner, il a eu soin de mettre, au bas de chaque page, un abrégé, rédigé dans le style et avec les notations modernes, des démonstrations que contient cette page.

Nous serait-il permis de formuler ici un vœu ? Ce serait que la publication du Traité de Werner fût complétée par la réimpression de son Livre sur la théorie de la précession des équinoxes. Ce Livre est, aujourd'hui, à peu près introuvable. Déjà, au XVII^e siècle, il était devenu si rare que Riccioli, dans l'*Almagestum novum*, était réduit à en parler d'après l'analyse qu'Érasme Oswald Schreckenfuchs en avait donnée, en 1556, dans ses *Commentaria in novas theoricas planetarum Georgii Purbachii*.

PIERRE DUHEM.

---

HENSEL (KURT). — ZAHLENTHEORIE. 1 vol. in-8, XII–356 pages. Berlin und Leipzig, G.-J. Göschen, 1913.

Le titre de ce Livre est trompeur, car le Livre donne plus que le titre ne promet. Il est vrai que le nom de l'Auteur suffit à nous prévenir qu'il ne s'agit pas d'une Théorie des Nombres ordinaire, et qui même, d'après ses dimensions, ne serait qu'une Théorie des Nombres élémentaire. Il s'agit en réalité d'une théorie des nombres $g$-adiques, de ces nombres inventés par M. Hensel, et qu'il présente ici de façon que la Théorie des Nombres ordinaire en apparaît comme un cas particulier. Il l'avait déjà traitée dans le premier Volume, seul paru jusqu'à maintenant, de sa *Theorie der Algebraischen Zahlen*, analysée dans ce *Bulletin* par

M. J. Tannery [1]; mais là, le but n'était pas le même. D'ailleurs, dans ce dernier Ouvrage, la base était toujours supposée un nombre premier. L'abandon de cette hypothèse entraîne quelques modifications. A cause de cela, on me permettra de reprendre après M. Tannery l'exposé de la théorie. Je supposerai $g = 10$, ce qui simplifiera l'écriture.

Soit d'abord un entier, par exemple $m = 1834$; il est égal à

$$1.10^3 + 8.10^2 + 3.10 + 4.$$

M. Hensel l'écrit, en l'ordonnant suivant les puissances croissantes de 10, sous la forme

$$4 + 3.10 + 8.10^2 + 1.10^3,$$

ou plus simplement 4.381. On remarquera que le premier chiffre 4 est le reste de la division de $m$ par $g$, autrement dit, ce chiffre $a_0$ est caractérisé par les relations

$$(1) \qquad 0 \leq a_0 < g, \qquad a_0 \equiv m \pmod{g}.$$

Alors $\frac{m - a_0}{g}$ est un entier $m_1$ et, en opérant sur $m_1$ comme on l'a fait sur $m$, on détermine la suite des chiffres de $m$.

Soit maintenant un nombre fractionnaire dont le dénominateur est premier avec $g$. Il faut d'abord remarquer qu'à beaucoup de points de vue, ces nombres se comportent comme les entiers, et on peut les appeler les entiers (mod $g$). Ils forment un anneau, c'est-à-dire qu'ils se reproduisent par addition, soustraction, multiplication. Mais le rapport de deux entiers (mod $g$) n'est pas toujours un entier (mod $g$); il y a donc lieu de parler d'un entier (mod $g$) divisible par un autre ou non. On peut alors parler de la congruence de deux de ces nombres suivant un certain module et, en particulier, de la congruence (mod $g$). Ceci fait, on démontre qu'étant donné un entier (mod $g$), il existe un entier ordinaire $a_0$ satisfaisant aux deux mêmes conditions (1) que plus haut. Alors $\frac{m - a_0}{g}$ est un entier (mod $g$) $m_1$, et en opérant sur $m_1$ comme on l'a fait sur $m$, on détermine une suite de chiffres, qu'on peut appeler le développement $g$-adique de $m$. Seulement, cette

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XXXIII, p. 10.

suite est indéfinie. Elle est d'ailleurs périodique à partir d'un certain chiffre. Réciproquement, toute suite infinie de chiffres, périodique à partir d'un certain chiffre, peut être considérée comme le développement $g$-adique d'un entier (mod $g$).

Par exemple, $\frac{13243}{233}$ a pour développement hensélien de base 10, la suite $1,\overline{7213}\,\overline{213}$. De même que, pour les entiers ordinaires, il y a une relation très simple entre ce développement et le développement ordinaire en décimales

$$\frac{13243}{333} = 39,\overline{768}\,\overline{768}\ldots$$

Pour déduire le second du premier, on renverse la partie non périodique, ce qui donne $71$, et l'on retranche le nombre $\overline{31},2\,\overline{312}\ldots$, obtenu en renversant la période et faisant exprimer au premier chiffre du nombre obtenu des unités de l'ordre de celles du premier chiffre du nombre précédent.

On obtient ainsi

$$71 - 31,2\,\overline{312}\ldots = 39,\overline{768}\,\overline{768}\ldots.$$

(Je ne sais pourquoi M. Hensel, dans aucun de ses deux Ouvrages, ne fait remarquer cette relation si simple.)

Pour le nombre entier 1834 dont le développement hensélien de base 10 est $4.831$, on a

$$1834 = 4 + 3.10 + 8.10^2 + 1.10^3.$$

Il est bien évident qu'une telle relation ne subsiste pas pour un nombre qui n'est entier que (mod $g$), et qu'on n'a pas

$$\frac{13243}{333} = 1 - 7.10 + 2.10^2 + 1.10^3 - \ldots,$$

car la série du second membre est divergente. On a cependant avantage à admettre une telle égalité, étant entendu qu'elle ne signifie rien de plus que le fait que la suite des opérations indiquée plus haut, appliquée au nombre $\frac{13243}{333}$, donne la suite $1,\overline{7213}\,\overline{213}$.

Enfin, le développement hensélien s'applique aussi aux nombres rationnels, non entiers (mod $g$), car un tel nombre est toujours égal à un nombre $m$, entier (mod $g$), divisé par une certaine

puissance de $g$, soit $g^r$. Alors si $m$ est représenté par la série

$$a_0 + a_1 g + a^2 g^2 + \ldots,$$

on représentera $\frac{m}{g^r}$ par la série

$$a_0 g^{-r} + a_1 g^{-r+1} + \ldots + a_{r-1} g^{-1} + a_r a + a_{r+1} g + \ldots$$

ou plus simplement par la suite des chiffres

$$a_0\, a_1 \ldots a_{r-1} a_r,\ a_{r+1} \ldots.$$

L'idée qui a guidé M. Hensel, il nous la livre dans sa Préface en ces mots : « On peut assigner comme but, à la Théorie des Nombres élémentaire, la résolution du problème suivant :

*Chercher les relations qui existent entre les nombres rationnels entiers ou fractionnaires, d'une part, et un nombre fondamental $g$, fixe, arbitraire d'ailleurs, d'autre part.*

Ce problème, on le résout complètement et, dans toute son étendue, en développant ces nombres en séries infinies

$$m = a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + \ldots$$

procédant suivant les puissances entières de $g$. C'est seulement par la considération de cette série prolongée jusqu'au bout qu'on obtient une solution complète du problème. Si, par contre, on se borne aux termes du début, comme on le fait ordinairement dans la Théorie des Nombres, on obtient des résultats approchés qui pourront naturellement être d'une grande importance pour certaines questions déterminées. Mais jamais on ne pourra, par ces approximations, approfondir complètement et sûrement les relations entre le nombre $m$ et le nombre fondamental $g$. »

Mais la question qui se présente à l'esprit et à laquelle le passage précédent ne répond pas, est la suivante : Comment se fait-il que le développement ordinaire en numération à base $g$, ne présente pas les mêmes avantages ? Vu sa relation si simple avec le développement hensélien, il semble qu'il devrait donner absolument la même chose. Tout au plus, le développement hensélien pourrait-il être plus commode. Mais c'est qu'en réalité la portée de ce dernier est bien plus grande, et voici comment on peut se la représenter.

Dans le développement ordinaire, on ne se borne pas aux développements périodiques, on considère aussi des développements non périodiques. Ils représentent les nombres irrationnels, et les nombres rationnels ne sont plus que des cas très particuliers dans l'ensemble des nombres réels. On sait tout l'avantage qui résulte de cette introduction des nombres irrationnels dans le calcul ordinaire. Or, le développement hensélien est susceptible d'une généralisation analogue. Si l'on considère, en effet, une suite infinie, non périodique, de chiffres (un chiffre étant un entier $a$ tel que $0 \leqq a < g$), rien n'empêche de l'appeler aussi un nombre $g$-adique.

Les nombres rationnels ne sont plus alors que des cas très particuliers dans l'ensemble des nombres $g$-adiques. Seulement, et c'est ce qui fait la valeur de la découverte de M. Hensel, l'ensemble des nombres $g$-adiques est essentiellement différent de celui des nombres ordinaires. Il est visible, en effet, que le développement hensélien ne peut s'appliquer aux nombres irrationnels. [En généralisant le développement hensélien, en y admettant des coefficients qui ne soient plus entiers au sens ordinaire du mot, mais seulement entiers (mod $m$), on peut trouver une infinité de ces développements qui convergent vers un nombre irrationnel donné, mais considérés comme nombres henséliens, ils ne sont pas égaux entre eux. Cette notion, utilisée par M. Hensel, dans sa théorie des nombres algébriques, n'est pas employée dans l'Ouvrage dont nous rendons compte]. De plus, l'ensemble des nombres réels ne dépend pas de la base dans laquelle ils sont écrits. Entre le nombre écrit 3,14159.... dans la numération décimale, et le nombre écrit 3,05033.... dans la numération de base 6, il y a une relation simple qu'on exprime en disant qu'ils sont égaux à un même nombre $\pi$. Au contraire, entre deux ensembles de nombres henséliens de bases différentes $g$ et $g'$, il n'y a de relation simple que dans des cas particuliers, par exemple, lorsque l'une des bases divise l'autre.

C'est ainsi que les ensembles de nombres henséliens apparaissent comme essentiellement nouveaux et plus particulièrement appropriés à l'étude des relations des nombres avec une base $g$. Par exemple, l'équation $x^m = 1$ n'a dans l'ensemble des nombres réels, que deux racines au plus. Dans l'ensemble des nombres

complexes, elle en a $m$. Dans l'ensemble des nombres $g$-adiques, elle en a un nombre dépendant de $g$. Soit par exemple $m = p - 1$, $p$ étant un nombre premier. Dans l'ensemble des nombres $p$-adiques, l'équation a $p - 1$ racines. Et il se trouve que ces racines sont dans le rapport le plus étroit avec les $m$ racines de la congruence $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. A chaque racine hensélienne de l'équation, correspond une racine de la congruence, et réciproquement.

Voici maintenant l'analyse du Livre.

Les Chapitres I et II sont consacrés aux notions élémentaires de la Théorie des Nombres ordinaire; le Chapitre III, au développement hensélien des nombres rationnels; le Chapitre IV, au développement hensélien en général. Les définitions des opérations élémentaires sur les nombres henséliens se résument en ceci : qu'on opère comme si ces nombres étaient des séries ordonnées suivant les puissances de $g$. Seulement on est ainsi forcé d'introduire des développements $\Sigma b_n g^n$ où les $b$ sont des entiers ne satisfaisant plus nécessairement aux conditions $0 \leqq b < g$. Ceux où les $b$ satisfont tous à ces conditions sont dits *réduits*. Il y a alors une infinité de développements pour un même nombre hensélien, dont un seul réduit, et l'on se trouve amené à l'énoncé suivant : En appelant valeur approchée du $k^{\text{ième}}$ ordre ($k \geqq 0$) d'un nombre hensélien, le développement limité en s'arrêtant dans ce nombre au terme $b_k g^k$; pour que deux développements représentent le même nombre, il faut et il suffit que leurs valeurs approchées du $k^{\text{ième}}$ ordre soient congrues $\pmod{g^{k+1}}$ quel que soit $k$.

Le Chapitre V est consacré à l'étude des relations que nous avons annoncées plus haut entre les nombres henséliens de base $g$, et ceux de base $g'$ diviseur de $g$. Le résultat particulièrement important est que l'étude des nombres henséliens de base $g$ se ramène à celle des nombres henséliens de bases $p, q, \ldots$ (facteurs premiers de $g$). D'où l'on est conduit à étudier ces systèmes à base première $p$. Dans un tel système, la division de deux nombres est possible et univoque, sauf si le diviseur est nul. Ceci correspond au fait que, dans la Théorie des Nombres ordinaires, la division $\pmod{p}$ est possible et univoque, sauf si le diviseur est $\equiv 0 \pmod{p}$. Ces systèmes forment donc des corps et non pas seulement des anneaux.

Ces corps sont étudiés dans les Chapitres VI, VII et VIII. L'Auteur cherche, au moyen de définitions appropriées, à y établir un calcul assez analogue à celui des nombres ordinaires. Dans le nombre

$$A = a_\alpha p^\alpha \quad a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} \quad \ldots \qquad [a_\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}], \qquad (\alpha \quad 0).$$

$p^\alpha$ s'appelle la *valeur absolue* de A; quant à $\alpha$, il est dit le *numéro d'ordre* de A. On dit qu'un nombre $p$-adique $\gamma$ est plus petit qu'un nombre $p$-adique $\delta$, si le numéro d'ordre de $\gamma$ est plus grand que celui de $\delta$. Si les deux numéros d'ordre sont les mêmes, on dit que $\gamma$ et $\delta$ sont de même grandeur (ce qui ne veut pas dire *égaux*). Si $\gamma$ et $\delta$ sont des nombres rationnels, la relation de grandeur qu'on vient de définir n'a aucun rapport avec la relation de grandeur ordinaire, d'ailleurs elle varie suivant la base. Les définitions des mots *limite* et *série convergente* ont absolument la même forme que pour les nombres ordinaires, bien qu'elles aient une tout autre signification. La condition de convergence d'une série est bien plus simple que pour les séries de nombres ordinaires, car elle se réduit à ceci : *Pour qu'une série soit convergente, il faut et il suffit que le terme général tende vers zéro.* En particulier, l'Auteur considère les séries entières, de la forme $\Sigma a_n x^n$, où les $a$ et $x$ sont des nombres $p$-adiques et il démontre l'existence d'un rayon de convergence. On peut aussi considérer des produits infinis. La série exponentielle est la série $\Sigma \frac{x^n}{n!}$, le logarithme est défini comme fonction inverse. Toutes ces analogies de forme entre les nombres $p$-adiques et les nombres ordinaires sont d'autant plus remarquables qu'elles correspondent en réalité à des propriétés complètement différentes. Il ne faudrait pas croire d'ailleurs que ces analogies se poursuivent jusqu'au bout. Ainsi, la série exponentielle ne converge pas pour toute valeur de $x$, et les nombres $p$-adiques n'ont pas tous des logarithmes.

Vient ensuite la théorie des équations algébriques. Une équation particulièrement importante est l'équation $x^{p-1} - 1 = 0$ dont nous avons parlé plus haut.

Le Chapitre IX reprend les questions précédentes pour les nombres $g$-adiques, $g$ n'étant plus premier.

Le Chapitre X s'occupe des équations binomes en général, c'est-à-dire de la forme $x^{\mu} = A$, $\mu$ étant un entier ordinaire et A un entier $p$-adique quelconque. Toutes ces questions correspondent à des questions de théorie des nombres, et elles en donnent la solution avec la plus grande facilité.

Le Chapitre XI est consacré à la loi de réciprocité, le Chapitre XII aux éléments de la théorie des formes quadratiques binaires et ternaires, théorie qui est poussée jusques et y inclus la notion de genre. Le théorème fondamental qu'à tout genre satisfaisant à la relation fondamentale correspondent des classes, est démontré d'une façon simple, mais en s'appuyant sur le théorème de Dirichlet sur les nombres premiers d'une progression arithmétique, théorème qui, lui, est admis. Dans toute ces questions, les nombres $p$-adiques interviennent d'une façon efficace. Dans ce dernier Chapitre, M. Hensel introduit une idée nouvelle. Désignant par $k(p)$ le corps des nombres $p$-adiques, il désigne par $k(p_\infty)$ le corps des nombres réels ordinaires. Ces derniers peuvent alors s'appeler les nombres $p_\infty$-adiques, et beaucoup d'énoncés se trouvent valables à la fois pour tous les corps $k(p)$, même si $p = p_\infty$. Voici, par exemple, la définition des diviseurs d'une forme quadratique : un nombre $p$ est un diviseur d'une forme $f(x, y, \ldots)$ lorsqu'il y a des nombres $p$-adiques qui, mis à la place de $x, y, \ldots$, annulent cette forme. Si $p$ est un nombre premier, on retombe sur la définition ordinaire des diviseurs d'une forme. Si $p = p_\infty$ on retombe sur la distinction entre formes définies et formes indéfinies.

Maintenant, et pour nous résumer, il est bien certain que, dans le Livre que nous venons d'analyser, on ne trouve pas de résultat nouveau de Théorie des Nombres, et que les démonstrations ne sont pas plus simples que les démonstrations ordinaires. Mais le but de l'Auteur était surtout de montrer comment l'étude d'un anneau (celui des nombres entiers) se ramène à celle de corps (ceux des nombres $p$-adiques). De plus, pour bien juger ce Livre, il ne faut pas le séparer de celui sur la Théorie des Nombres algébriques. C'est dans ce dernier que le nouvel outil, forgé par M. Hensel, acquiert toute sa valeur et permet, dans la question de la divisibilité, par exemple, des simplifications très remarquables. Souhaitons donc que le second Volume de ce bel

Ouvrage ne se fasse pas trop attendre. Les trois Volumes de la *Theorie der algebraischen Zahlen* et de la *Zahlentheorie* formeront, par leur ensemble, l'une des publications mathématiques les plus remarquables de ces dernières années.

E. Cahen.

---

PETRÉN (Louise). — Extension de la méthode de Laplace aux équations

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{1i}(x, y) \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \, \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n} A_{0i}(x, y) \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0.$$

(*Lunds Universitets Ärsskrift*. N. F., Afd. 2, Bd. 7, Nr. 3. *Kongl. fysiografiska sällskapets handlingar*. N. F. Bd. 22, Nr. 3.) 1 vol. in-4, II-165 pages. Lund, Imprimerie Häkan Ohlsson, 1911.

L'équation aux dérivées partielles d'ordre $n$

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} A_{1i}(x, y) \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \, \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n} A_{0i}(x, y) \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0$$

admet, lorsque $A_{1,n-1} \neq 0$, deux systèmes de *caractéristiques* distincts, dont l'un, $x = \text{const.}$, est multiple d'ordre $n - 1$. Lorsque $A_{1,n-1} = 0$, il n'y a plus qu'un seul système de caractéristiques, $x = \text{const.}$, qui est alors d'ordre $n$.

L'équation (1) peut être regardée comme généralisant la suivante :

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0;$$

cette dernière a fait l'objet de nombreux travaux. Euler a déjà donné des exemples d'équations du type (2) admettant certaines intégrales de forme particulière, dépendant d'une fonction arbitraire d'une seule variable, et qu'on a nommées plus tard « intégrales de la forme d'Euler ». Laplace a donné une méthode célèbre pour reconnaître si l'équation (2) admet une intégrale de la forme d'Euler, et, dans ce cas, pour ramener au moyen de certaines transformations, l'intégration de l'équation (2) à celle d'une équation de même type qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre et, par conséquent, est immédiatement intégrable.

Plusieurs auteurs, parmi lesquels il convient de citer, entre autres Legendre, Imschenetsky et surtout M. Darboux, ont étendu et beaucoup généralisé les travaux de Laplace.

Il était naturel d'essayer d'appliquer à l'équation linéaire (1) d'ordre $n$ les méthodes qui réussissent pour l'équation linéaire du second ordre (2). C'est précisément l'objet de ce Mémoire, où l'Auteur montre que la plupart des résultats établis pour l'équation (2) sont encore valables pour l'équation plus générale (1), en traitant à part le cas où tous les systèmes de caractéristiques de l'équation (1) coïncident et celui où $n - 1$ seulement coïncident.

Il n'est pas possible de résumer en quelques lignes les résultats très généraux obtenus, ni de rappeler les divers cas particuliers envisagés. Disons seulement, pour ne mentionner qu'un des points les plus importants, que l'existence de solutions de la forme d'Euler soit pour l'équation (1), soit pour l'équation *adjointe*, permet de diminuer l'ordre de l'équation proposée, au moyen de certaines transformations qui généralisent celles de Laplace pour l'équation (2) : pour obtenir les intégrales de la forme d'Euler, il suffit d'ailleurs, suivant le principe de la méthode de Laplace, d'intégrer des équations différentielles linéaires, qui sont en général du premier ordre.

L'équation (1) d'ordre $n$ jouit donc des principales propriétés de l'équation du second ordre (2).

H. Vergne.

---

MITZSCHERLING (Arthur). — Das Problem der Kreisteilung. *Ein Beitrag zur Geschichte seiner Entwicklung*. Mit einem Vorwort von Dr Heinrich Liebmann. Mit 210 Figuren im Text., 1 vol. in-8, vi-214 p. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1913.

Quiconque suit l'évolution historique des sciences, même des plus abstraites, est frappé par la remarque que l'aiguillon le plus puissant à la recherche des vérités nouvelles a toujours été fourni par les « problèmes », offerts aux penseurs, soit pour les exigences de la vie sociale, soit par le désir de savoir, ou par l'orgueil de vaincre des difficultés nouvelles. Cette circonstance ressort de la manière la plus saisissante dans les premières phases de dévelop-

pement des sciences ; elle se présente évidente à ceux qui étudient les origines du calcul infinitésimal, comme à ceux qui cherchent les origines de la recherche géométrique. En effet, il est impossible de nier que les problèmes ayant pour but de mesurer le cercle, de diviser un angle en trois parties égales, de construire un cube qui soit le double d'un cube donné ont merveilleusement servi à découvrir de nouveaux théorèmes, à forger de nouveaux tours de raisonnement, à concevoir de nouvelles figures géométriques. L'ancienne question de construire des polygones réguliers a été également féconde pour notre science : en conséquence, comme depuis longtemps on a songé à écrire des histoires de ces célèbres problèmes-là [1], il est bien naturel qu'un projet analogue se soit présenté par rapport au dernier, aujourd'hui que ce problème peut se considérer comme épuisé dans ses lignes générales, aujourd'hui que des ouvrages sur les courbes particulières remarquables mettent sous les yeux les définitions et les propriétés des lignes qui furent employées pour le résoudre. Il était donc facile de prévoir l'apparition prochaine d'une histoire de la question dont il s'agit : l'Auteur de l'Ouvrage que nous analysons s'est donné la tâche de l'écrire, et il s'en est tiré d'une manière si satisfaisante qu'il est à regretter qu'une mort prématurée l'empêche d'entendre les louanges qui accueilleront sa première (et hélas ! aussi dernière) publication, et que lui accorderont tous ceux qui s'intéressent à la diffusion des notices historiques exactes et complètes sur toutes les branches des mathématiques.

Pour donner à nos lecteurs une idée du plan général de l'Ouvrage dont il s'agit, nous remarquerons que, pour construire un polygone régulier dont on connaît le côté, il suffit d'inscrire dans un cercle un tel polygone et d'appliquer ensuite une transformation de similitude convenablement choisie. D'ailleurs, la question d'inscrire dans un cercle un polygone régulier de $n$ côtés est au fond identique à celle de diviser en $n$ parties égales un angle

---

[1] MONTUCLA, *Histoires des recherches sur la quadrature du cercle*, avec une addition concernant les problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle (Paris, 1831) ; REIMER, *Historia problematis de cubi duplicatione, sive inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas* (Gottingæ, 1798).

de 360°, qui est à son tour un cas particulier de la division d'un angle en parties égales. Il s'ensuit que les recherches qui visent à la construction des polygones réguliers se partagent actuellement en deux classes : les unes donnent la construction directe de ces polygones, tandis que les autres font dépendre cette construction du problème de la polysection des angles ; voilà la raison de la division en deux Parties, également importantes, de l'Ouvrage que nous analysons.

L'Auteur commence la première Partie en interrogeant les plus anciens monuments existants pour en tirer des témoignages relatifs aux connaissances qu'on avait aux débuts de la civilisation sur des polygones réguliers particuliers. Après, il énumère les constructions par la règle et le compas de quelques-unes de ces figures que nous avons héritées des anciens Grecs, puis il résume les étonnantes découvertes que fit Gauss sur ce sujet et qui, sans doute, représentent l'addition la plus importante que les modernes surent faire à la géométrie élémentaire classique. En descendant à des détails plus menus, l'Auteur expose les différentes méthodes élémentaires par lesquelles on construisit les plus simples d'entre les « polygones de Gauss » : constructions par la règle et le compas, constructions par la règle seule lorsqu'on a sur le tableau un cercle fixe (Steiner), constructions par le seul compas (Mascheroni). Il finit par l'examen des perfectionnements qu'on atteint en appliquant au problème considéré la Géométrographie de E. Lemoine.

On trouve ensuite les constructions approchées que l'on connaît de certains polygones particuliers ; quelques-unes exigent seulement l'emploi de la droite et du cercle, mais, pour les autres, il faut avoir recours à des courbes spéciales. Par rapport à celle de la première espèce, il est bon de remarquer qu'on pourra apporter quelques perfectionnements à ce qu'expose l'Auteur en utilisant le Μετρικά d'Héron d'Alexandrie, excellent Ouvrage qui semble lui avoir échappé. A. Mitzscherling clôt la première Partie de son Livre en faisant connaître des procédés imaginés par des théoriciens pour construire certains polygones réguliers à l'aide d'un système d'équerres et des instruments construits par les praticiens pour graduer un cercle en bois ou en métal.

L'Auteur passe ensuite à la question de diviser un angle en parties égales, en s'occupant avant tout de la trisection. Sur ce

thème il s'arrête longtemps, en nous offrant la monographie la plus complète que nous possédons sur ce célèbre problème. Pour démontrer que ce jugement n'est pas exagéré, nous remarquerons que, après avoir établi l'impossibilité de la trisection en général par voie élémentaire et avoir fait connaître certains angles pour lesquels il est possible par la règle et le compas, l'Auteur expose tour à tour les méthodes de trisection imaginées dans l'Antiquité et au moyen âge par les Grecs et les Arabes, après les constructions basées sur l'emploi des sections coniques et enfin celles ou l'on se sert des courbes algébriques du troisième ou du quatrième ordre ([1]). On connaît encore des procédés approchés pour diviser un angle en trois parties égales et des instruments qui mènent à ce but : l'Auteur y consacre quelques pages extrêmement intéressantes.

Mitzscherling, dans son exposition de nos connaissances relatives au problème de la polysection d'un angle, suit une voie parallèle à celle qu'il a parcourue en s'occupant de la trisection. En effet, après quelques remarques générales sur la possibilité de résoudre ce problème par la géométrie d'Euclide, il étudie avant tout avec soin toutes les courbes sectrices connues, en considérant celles qui sont algébriques séparément des autres ([2]); il examine ensuite les procédés approchés, en mesurant dans chaque cas (comme il fit, d'ailleurs, dans tous les cas analogues) l'erreur commise; il finit en décrivant la nature et l'emploi des appareils polysecteurs connus.

Dans chaque occasion, il ne se borne pas à des indications superficielles; au contraire, il donne des renseignements complets sur les méthodes et sur les figures géométriques employées, sans épargner les formules, les calculs, les figures ; de la sorte, son Livre est bien plus et bien mieux qu'un simple travail historique : c'est un précieux complément aux traités de Géométrie. Dans les mains d'un maître habile, il servira à rendre moins aride l'exposé de plusieurs théories : par conséquent, il fournit un argument d'une

---

([1]) S'il ne s'était pas borné aux sectrices planes, il aurait pu ajouter l'hélice cylindrique ordinaire.

([2]) Cette section de l'Ouvrage de Mitzscherling forme une excellente monographie des courbes trisectrices sur lesquelles nous nous permettrons une simple remarque : pourquoi l'Auteur transforme-t-il (p. 117) le mathématicien *Gaston Albert Gohierre de Longchamps* en *Guido de Longchamps?*

valeur hors ligne en faveur de l'introduction de l'élément historique dans l'enseignement des mathématiques élémentaires.

Nous ne saurions finir mieux ce compte rendu qu'en reproduisant ici les remarques originales par lesquelles l'Auteur prend congé de ses lecteurs :

« C'est un tableau à plusieurs couleurs que les pages précédentes nous ont présenté à la façon d'un kaléidoscope ; c'est une page de l'histoire de l'évolution de l'esprit humain qui nous montre comment une seule difficulté eut le pouvoir de développer les ressources de l'intelligence en des directions toujours nouvelles. Le problème de la division du cercle était sans doute, à son origine, un problème pratique ; toutefois, il devient un problème fondamental de la jeune géométrie. Mais l'homme ne tarda pas à reconnaître que les liens, dont il s'efforçait de se délivrer pour parvenir à son but désiré, étaient trop étroits, car ils formaient un obstacle aux envolées audacieuses de son imagination ; il arriva à les rompre et, de cette manière, il occupa une région nouvelle et bien plus haute de sa science. Il eut alors l'intuition géniale, la conscience immédiate que, de la sorte, il avait dépassé des bornes réelles. Toutefois, il manquait encore la preuve rigoureuse qu'aucune puissance du monde ne saurait atteindre ces bornes et faire rentrer la division du cercle et les problèmes analogues sous les anciens points de vue. Il arriva en conséquence que, jusque dans ces derniers temps, une quantité extraordinaire d'énergies intellectuelles fut employée pour atteindre un but insaisissable. Et même, lorsque cette démonstration fut tracée et que, en même temps, l'ancien champ de la division du cercle fut extraordinairement élargi et complètement dominé, même alors, plusieurs conservèrent l'ancien doute, car cette démonstration n'était pas géométrique, au sens ordinaire de ce mot, et par suite elle ne satisfaisait pas tous ceux qui, suivant trop étroitement Newton, considèrent les nombres et les figures géométriques comme des choses tout à fait hétérogènes. Par conséquent, ce ne sont pas seulement les exigences de la pratique qui produisirent des essais récents plus ou moins heureux de solution de notre problème, puisque plusieurs voulurent sérieusement obtenir la victoire sur l'ancienne énigme. Devons-nous blâmer les auteurs de ces essais malheureux, parce qu'ils poursuivaient un fantôme qu'il était impossible de rejoindre ? Nous pensons que non ;

car on ne doit jamais oublier que chaque manifestation de l'esprit humain produit un progrès dans l'évolution générale. Par conséquent, en jugeant avec justice les résultats des travaux examinés dans les pages précédentes, nous devons seulement nous étonner de l'infinité d'impulsions qu'a pu donner, dans le cours des siècles, un seul problème d'un aspect extrêmement simple. »

GINO LORIA.

FITZ-PATRICK (J.). — EXERCICES D'ARITHMÉTIQUE : ÉNONCÉS ET SOLUTIONS. Avec une Préface de J. TANNERY. Troisième édition entièrement refondue et considérablement augmentée. 1 vol. gr. in-8. VII-709 pages. Paris, A. Hermann et Fils, 1914.

La première édition de ce Livre a reçu de J. Tannery de justes éloges : c'était une œuvre soignée, d'un caractère théorique, qui ne s'adressait qu'à une élite. Comme nos programmes utilitaires, fabriqués pour les intelligences moyennes, n'ont pas augmenté cette élite, tout au contraire, MM. Hermann ont cru bien faire en transformant l'Ouvrage de MM. Fitz-Patrick et Chevrel, pour qu'il pût rendre service à un plus grand nombre d'élèves.

A l'ancien choix d'exercices de valeur éducative se trouve maintenant substitué un recueil encyclopédique de tous les problèmes sérieux qu'on a rencontrés dans les Revues et les Livres, ou qui ont été proposés dans les examens et les concours. Le nombre des questions est passé de 465 à 1329, dont 292, groupés dans les deux derniers Chapitres avec un numérotage spécial, s'adressent surtout à l'Enseignement primaire supérieur.

Pour ne pas grossir démesurément le Volume (le nombre des pages est de 709 au lieu 485), il a fallu supprimer les résumés qui figuraient en tête de chaque Chapitre et qui formaient le squelette d'un excellent Cours d'Arithmétique, une Note de Matrot sur un théorème de Bachet et diverses Notes des Auteurs eux-mêmes. Il a fallu renoncer à donner la solution de tous les exercices : pour un certain nombre, on s'est contenté de renvoyer aux *Récréations mathématiques* de Rouse Ball, à des Revues, telles que les *Nouvelles Annales*, la *Nouvelle Correspondance mathématique* de Catalan (si difficile à trouver), etc.; pour d'autres, aisés à traiter, on a seulement mentionné la réponse. Il a fallu enfin recourir à un

stratagème de composition typographique qui eût réjoui J. Tannery et qui évite au lecteur la tentation de jeter un coup d'œil sur la solution avant d'avoir suffisamment essayé ses forces; les solutions ont été séparées des énoncés (comme dans le vieux Recueil de problèmes de Frenet).

Le titre ne porte plus le nom de l'un des Auteurs du travail original, M. Chevrel, la refonte étant due à M. Fitz-Patrick seul.

Enfin, les éditeurs ont eu l'heureuse idée de donner en appendice une Note où M. Ernest Lebon a exposé les principes de la méthode originale par laquelle il a entrepris de construire une Table des facteurs premiers des nombres compris entre 1 et 100000000.

V. Boulanger.

---

ANNUAIRE POUR L'AN 1914 PUBLIÉ PAR LE BUREAU DES LONGITUDES. Avec des Notices scientifiques. 1 vol. in-18 (15 × 10), pages VII-502 + A.1 - A.8 — B.1 — B.107 + C.1 — C.34 + D.1 — D.42. Paris, Gauthier-Villars.

Par application de la Loi du 9 mars 1911, les heures, comptées de 0 heure à 24 heures à partir de minuit, des divers phénomènes sont exprimées en *temps légal*, c'est-à-dire en temps moyen de Paris, diminué de neuf minutes vingt et une secondes.

M. H. Andoyer a rédigé les notions fondamentales de l'Astronomie et l'ensemble des données relatives aux satellites. M. Rocques-Desvallées a donné les notions indispensables sur les calendriers en usage chez les différents peuples. M. P. Puiseux s'est chargé de l'Article sur la constitution physique de la Lune. MM. G. Bigourdan et H. Deslandres ont respectivement rédigé des explications sur la Sismologie et sur la Physique solaire. M. P. Hatt a expliqué les cadrans solaires d'une manière entièrement nouvelle. M. L. Schulhof a exposé en détail les particularités relatives aux comètes apparues en 1912 et a mis à jour les tableaux relatifs aux comètes périodiques. M. de Gramont a communiqué les données relatives aux spectres stellaires. M. E.-H. Amagat a rédigé une Note entièrement nouvelle sur l'équation d'état, le point critique et les états correspondants pour les fluides. MM. C. Raveau et Ch. Marie ont refondu les tableaux qui renferment les données physiques et chimiques.

Trois Notices scientifiques terminent ce Volume :

Celle de M. P. Hatt s'occupe *De la déformation des images dans les Lunettes*, quand il s'agit d'objets de formes géométriques définies.

Celle de M. G. Bigourdan donne un exposé très clair de trois questions, dont les deux premières intéressent certainement tout le monde : 1° *Le Jour et ses divisions;* 2° *Les Fuseaux horaires;* 3° *L'Association internationale de l'Heure.* Bien que ce travail occupe plus de cent pages, on le lira entièrement avec le même intérêt et souvent avec grand profit.

Celle de M. B. Baillaud est relative à *la 17e Conférence générale de l'Association géodésique internationale*, tenue à Hambourg, le 17 septembre 1912; mais l'Auteur regrette de n'avoir pu faire un Compte rendu complet parce que, au moment où il écrivait (juillet 1913), il ne possédait que les procès-verbaux des séances et le *Rapport*, présenté par M. F.-R. Helmert, *Sur les travaux du Bureau central pendant les cinquantes premières années de l'Association géodésique internationale.*

Ce petit Livre, à cause des renseignements si variés qu'il donne, a sa place marquée sur la table de travail de l'astronome, du physicien, du chimiste, du mathématicien. On peut même dire qu'il est, au seul point de vue du Calendrier, plus utile à tout le monde qu'un Almanach.

Er. L.

## MÉLANGES.

### L'ABBÉ BOSSUT.

(**A l'occasion du centenaire de sa mort**);

PAR M. E. DOUBLET,
astronome à l'Observatoire de Bordeaux.

L'abbé Charles Bossut est mort le 14 janvier 1814. Il semble donc que le moment soit favorable pour rappeler le souvenir de cet homme éminent, un peu oublié aujourd'hui.

Il était né le 11 août 1730, à Tartaras, village de la banlieue immédiate de Lyon, selon Lalande et, selon d'autres, à Tarare, près de Saint-Étienne. Il n'avait que 6 mois quand il perdit son père, Barthélemy Bossut. Heureusement, un des oncles paternels du pauvre orphelin se chargea de veiller sur lui et de lui donner les éléments d'instruction nécessaires pour qu'il pût entrer au collège de Lyon, ce qu'il fit à l'âge de 14 ans.

Ses études furent excellentes, et, une véritable bonne fortune pour lui, c'est que, dans ce collège, dirigé par les Jésuites, le professeur de Mathématiques était un homme remarquable, le P. Béraud, né à Lyon en 1702, mort dans la même ville en 1777.

Une preuve du mérite du P. Béraud, c'est qu'il a formé quatre élèves dont les noms survivent : Montucla, Bossut, Lalande et le chevalier de Fleurieu, officier du plus haut mérite, à qui la Nation n'a pas encore payé sa dette, car aucun de nos navires de guerre ne porte son nom, bien qu'il ait rendu des services incomparables à la Marine.

Ajoutons que le P. Béraud avait établi dans l'enceinte du collège un petit observatoire où ses disciples favoris pouvaient s'initier à l'astronomie pratique. C'est là que Lalande se forma en partie. Enfin, il était encore le conservateur de la collection des médailles qui appartenait à la ville de Lyon et qui était déposée dans les bâtiments du collège. Le P. Béraud avait donc des connaissances à la fois très étendues et très variées. C'était bien le maître qu'il fallait à des élèves d'élite, tels que ceux que nous venons de nommer.

Dès le collège, Bossut lut les merveilleux *Éloges académiques* de Fontenelle. Il est à croire que le P. Béraud avait facilité cette lecture, cependant assez peu orthodoxe. Quoi qu'il en soit, le jeune écolier désira vivement faire connaissance avec l'illustre secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, et osa entrer en correspondance directe avec lui.

Plus que nonagénaire, Fontenelle possédait encore ses facultés intellectuelles. Si égoïste qu'il ait été, si l'on s'en rapporte à une tradition vraisemblable, il semble bien qu'il aimait la jeunesse. Voici ce qu'il répondit à Bossut, qui n'était guère, à tout prendre, qu'un collégien : « *Je vous prie de me donner de temps en temps des nouvelles de votre marche. J'ai un pressentiment qui me dit que vous irez loin, mais je ne pourrai vivre assez pour jouir*

*de vos succès* » (¹). Cela suffit pour que le jeune homme fît le voyage de Paris et rendit visite à Fontenelle, qui lui fit bon accueil et le présenta à Clairaut et à d'Alembert.

Dès la fin de sa philosophie, Bossut avait pris l'habit ecclésiastique; toutefois, bien qu'il ait gardé cet habit et le titre d'abbé jusqu'en 1792, il ne semble pas qu'il ait dépassé les ordres mineurs. Il n'est pas sans importance, puisqu'il s'agit d'un homme du XVIII^e siècle, d'ajouter qu'il a été un catholique convaincu d'un bout de sa vie à l'autre. Il n'a rien eu de commun avec les « abbés », si nombreux de son temps, qui scandalisaient à la fois le monde et l'Eglise, tels, par exemple, que l'abbé Dubois ou l'abbé de Périgord, pour ne nommer que les deux plus fameux.

Bossut était donc très éloigné de d'Alembert par les opinions. Il n'en fut pas moins le collaborateur du grand géomètre quand celui-ci rédigeait la partie mathématique de l'*Encyclopédie*. Mais, en arrivant à Paris, il avait encore beaucoup à apprendre. Le P. Béraud lui avait peut-être donné quelques leçons de calcul différentiel, mais n'avait pu faire plus pour un élève unique. A Paris, nous voyons Bossut étudier l'*Analyse des infiniment petits*, Ouvrage que le marquis de L'Hôpital avait publié en 1696. Il y trouva quelque difficulté, ayant de la peine à concevoir qu'on pût négliger, sans une erreur quelconque, une quantité infiniment petite, en comparaison d'une quantité finie. Il confia son embarras à un fameux géomètre (apparemment à d'Alembert) qui lui répondit : « *Admettez les infiniment petits comme une hypothèse, étudiez la pratique du calcul, et la foi vous viendra.* » La foi vint, en effet, et Bossut se convainquit que la métaphysique de l'analyse infinitésimale est la même dans le fond que celle de la méthode d'exhaustion des anciens géomètres.

On sait que, dans ses dernières années, Newton renvoyait à Moivre ceux qui venaient lui demander des éclaircissements sur quelques points de ses Ouvrages, en leur disant : « *Voyez M. de Moivre, il sait cela mieux que moi.* ». De même, en pareille circonstance, d'Alembert disait : « *Voyez Bossut.* »

---

(¹) Dans son *Histoire des Mathématiques*, qu'il publia à l'âge de 80 ans, Bossut a écrit ces mots : « Le célèbre Fontenelle, que j'ai eu l'honneur de connaître dans les dernières années de sa vie et dont je me rappelle les bontés avec attendrissement, etc. ».

Celui-ci peut donc être considéré comme le principal disciple de d'Alembert, et même comme son seul disciple immédiat, car d'Alembert, on le sait, n'a jamais été professeur, à la différence de Newton, d'Euler, des grands Bernoulli.

Bossut se lia aussi avec l'académicien Camus, examinateur des élèves du Génie et de l'Artillerie. Ce dernier, qui vécut de 1699 à 1768, est surtout connu comme mécanicien, quoiqu'il ait accompagné Maupertuis en Laponie (1736), pour prendre part à la célèbre mesure d'un arc de méridien.

Camus présenta le jeune géomètre à M. d'Argenson, Ministre de la Guerre, qui, reconnaissant son mérite, le nomma, en 1752, professeur à l'École du Génie qui avait été fondée à Mézières 4 ans auparavant. Le souvenir de cette École n'est pas encore effacé : on sait que Monge y enseigna pendant longtemps et qu'il en avait fait, pour ainsi dire, une première ébauche de l'École Polytechnique.

Bossut n'était pas à Mézières depuis un an, qu'il fut nommé correspondant de l'Académie des Sciences. Il n'avait pas 23 ans!

Il faut dire qu'à cette époque, les sciences étant beaucoup moins cultivées qu'elles ne le sont aujourd'hui, une pareille distinction, accordée à un tout jeune homme, n'était pas aussi surprenante qu'on pourrait le croire au premier abord. Quand La Caille, par exemple, devint académicien à l'âge de 28 ans, il pouvait passer pour un candidat d'âge mûr; Clairaut fut nommé à 18 ans, d'Alembert à 24, Jérôme de Lalande à 21. De nos jours, quand M. Poincaré est devenu membre de l'Institut, il avait 33 ans et, sans doute, était un des plus jeunes membres de l'Académie.

Bossut resta à Mézières jusqu'en 1768. Pendant son séjour dans cette ville, il travailla beaucoup. Notamment, il composa, à l'usage de ses élèves, un Cours complet de Mathématiques, plusieurs fois réédité sous des titres légèrement différents. La dernière édition, publiée par Didot en 1800, se composait de sept Volumes in-8° : *Arithmétique et Algèbre*, 1 vol.; *Géométrie et Application de l'Algèbre à la Géométrie*, 1 vol.; *Mécanique*, 1 vol.; *Hydrodynamique*, 2 vol.; *Calcul différentiel et intégral*, 2 vol. Cet Ouvrage a rendu de grands services; mais il ne faut pas s'étonner qu'il soit délaissé depuis longtemps.

(*A suivre.*)

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DOLBNIA (JEAN). — ŒUVRES MATHÉMATIQUES, publiées sous les Auspices de l'École supérieure des Mines de l'Impératrice Catherine II, à Saint-Pétersbourg, avec une Préface de GASTON DARBOUX et une Notice sur la Vie et les Travaux scientifiques de Dolbnia, par NICOLAS KRYLOFF. 1 vol. gr. in-8°, XIV-348 pages, Paris, A. Hermann et fils, 1913.

Ce Volume ne contient pas les Œuvres complètes de Dolbnia, mais seulement les Mémoires qu'il a publiés dans des périodiques français, et en particulier dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*.

Pour donner un avis autorisé sur ces Mémoires, on ne saurait mieux faire que de citer l'appréciation qu'en donne M. Darboux, dans la Préface qu'il a écrite pour ce Volume. « Ces Mémoires, dit l'illustre géomètre, en parlant des travaux qu'il recevait de Dolbnia, étaient admirablement rédigés, dans un français très pur et très élégant, et ils roulaient sur les théories les plus élevées et les plus délicates de l'Analyse.... Je suis convaincu d'avance qu'ils trouveront de nouveaux lecteurs, aussi bien dans le pays d'Hermite et d'Halphen que dans celui de Tchebycheff et de Zolotareff. Ce que je puis affirmer, c'est que, dans notre pays, déjà au moment de leur publication, ils faisaient grand honneur à leur Auteur et à leur pays d'origine ».

M. Nicolas Kryloff nous donne dans ce Volume une attachante Notice sur Jean Dolbnia. On peut seulement regretter que des raisons, que l'on croit deviner, n'aient pas permis à M. Kryloff de nous donner des détails plus précis sur les difficultés que Dolbnia rencontra au cours de sa carrière.

Fils d'un simple soldat, Dolbnia entra à l'École des Mines de Saint-Pétersbourg, mais à sa sortie, il renonça à la carrière d'ingénieur, malgré les attraits matériels qu'elle aurait pu avoir pour lui. Il suivit les cours de l'École pédagogique supérieure pour devenir, à 23 ans, professeur dans l'enseignement secondaire. Vers l'âge de

45 ans, il devint professeur à l'École des Mines et, sauf une courte interruption, conserva ces fonctions jusqu'à sa mort, en 1912, à 59 ans. Le long séjour de Dolbnia dans l'enseignement secondaire, qui, pendant la plus grande partie de sa vie, lui laissa peu de loisirs pour ses travaux, retarda le développement de sa carrière scientifique. On ne peut qu'admirer, avec M. Kryloff, « l'énergie et la force de volonté d'un professeur » qui, malgré des conditions d'existence fort dures, trouvait tout de même l'occasion de travailler aux recherches les plus abstraites. M. Kryloff nous fait connaître également les qualités précieuses que Dolbnia apportait dans son enseignement et les succès qu'il y obtenait : succès dus, non seulement à une parole élégante et facile, mais aussi à un travail assidu de préparation : « Devant le tableau, disait-il, la craie à la main, il est trop tard pour réfléchir... Tout le travail préparatoire doit être fait d'avance, car les hésitations du professeur se reflètent sur la faculté d'assimilation de ses élèves... Une leçon n'est jamais assez bien faite ».

On trouvera, dans les Mémoires de Dolbnia, le même souci de clarté qu'il apportait dans son enseignement. A maintes reprises, on constate ses efforts pour donner une forme de plus en plus simple et de plus en plus précise à l'exposition des diverses théories qu'il aborde et à l'énoncé des résultats auxquels elles conduisent. On ne pourrait guère, sans une analyse extrêmement détaillée, donner une idée exacte du nombre de faits analytiques intéressants contenus dans ces Mémoires. Cette richesse les rend précieux pour ceux qui auront à s'occuper des théories étudiées par Dolbnia. A un point de vue plus modeste, on trouvera dans cet Ouvrage, en raison du soin avec lequel Dolbnia conduisait ses calculs aussi loin que possible, une source abondante d'exercices intéressants sur les équations algébriques, les fonctions elliptiques et les intégrales abéliennes. Contentons-nous de donner quelques indications sur la nature des sujets traités dans les Mémoires que rassemble ce Volume.

Trois Mémoires traitent de la résolution par radicaux des équations algébriques de degré premier. L'Auteur complète les démonstrations que Kronecker avait données de formules énoncées par Abel et donne aux racines une forme encore plus précise que celle qu'avait donnée Kronecker. Dolbnia montre comment, en parti-

culier, on peut, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, résoudre les équations de degré 5 ou 7, résolubles par radicaux.

Les autres Mémoires se rapportent à la théorie des fonctions elliptiques et des intégrales abéliennes. On peut citer à part divers Mémoires consacrés à l'addition des intégrales elliptiques d'espèce quelconque, à l'analogie des fonctions elliptiques et des fonctions trigonométriques, à la théorie des périodes des intégrales abéliennes, à la détermination du genre des équations algébriques binomes, ainsi qu'un intéressant Mémoire où Dolbnia montre comment on peut étudier les propriétés des fonctions définies par l'inversion d'intégrales abéliennes de première espèce, de genre un, et utiliser ces propriétés pour obtenir, d'une manière logique, l'expression de ces fonctions à l'aide de la fonction $\wp$ de Weierstrass. Les Mémoires qu'il reste à signaler sont relatifs à la réduction des intégrales elliptiques et des intégrales abéliennes dépendant d'une équation algébrique binome et, comme cas particulier des méthodes employées, à la transformation des fonctions elliptiques.

Dans une série de Mémoires sur les intégrales pseudo-elliptiques, parus de 1890 à 1895, Dolbnia considère, en désignant par $R(x)$ un polynome et par H une constante, les intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{R(x)}}, \qquad \int \frac{(x+H)\,dx}{\sqrt[m]{R(x)}},$$

dans des cas très nombreux où le calcul de ces intégrales se ramène au calcul d'intégrales elliptiques et cherche à quelles conditions ces intégrales s'expriment au moyen de logarithmes de fonctions algébriques. Cette question avait été traitée dans un cas particulier par Tchebycheff et Zolotareff. L'habileté avec laquelle Dolbnia applique à ce problème les fonctions de Weierstrass lui permet de simplifier la résolution du problème abordé par ses devanciers et d'étendre sa solution à beaucoup de nouveaux cas. Dans des Mémoires ultérieurs, Dolbnia revient assez souvent sur cette question des intégrales pseudo-elliptiques, lorsqu'il rencontre des intégrales abéliennes se ramenant aux intégrales elliptiques et résout ainsi le problème posé dans des cas très variés. On peut rattacher au même ordre d'idées un Mémoire où Dolbnia donne des démonstrations très simples de certains théorèmes d'Abel sur le développement en fraction continue $\sqrt{R(x)}$ et la périodicité de ce déve-

loppement dans certains cas particuliers. On sait que cette dernière circonstance a une influence sur la possibilité d'exprimer au moyen de logarithmes l'intégrale

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}},$$

lorsque $\mathrm{R}(x)$ est du $4^e$ degré.

Dans une autre série de Mémoires parus de 1896 à 1907, Dolbnia étudie de nombreux cas de réduction d'intégrales abéliennes dépendant d'une équation binome. Il essaie de relier par une idée générale les divers exemples connus de réduction d'intégrales abéliennes. Ne se contentant pas « des substitutions accidentelles, n'ayant d'autre raison qu'un simple hasard » par lesquelles certaines de ces intégrales sont ramenées aux intégrales elliptiques, il réussit par une méthode très simple et fort ingénieuse, à donner pour toute une catégorie d'intégrales, la raison pour laquelle ces intégrales se ramènent à des intégrales relatives à une relation de genre moindre et se ramènent en particulier aux intégrales elliptiques. Cette méthode étant malheureusement loin de pouvoir s'appliquer à tous les cas, Dolbnia recherche les cas de réductibilité que l'on peut obtenir, soit par l'emploi de transformations biquadratiques, soit par l'emploi de transformations de la forme $y = \varphi(x)$, $\varphi$ étant une fonction rationnelle. Cette étude est faite, soit par l'emploi de méthodes purement algébriques, soit par l'emploi des méthodes utilisant la théorie des fonctions. Dans les divers Mémoires consacrés à ce sujet, Dolbnia perfectionne de plus en plus les procédés qu'il emploie, de manière à examiner d'une façon simple des transformations de plus en plus compliquées.

Il arrive ainsi à retrouver les divers cas connus de réduction d'intégrales abéliennes et à en donner un grand nombre d'autres.

Les méthodes employées par Dolbnia le conduisent tout naturellement à étudier, comme cas particulier de la transformation des intégrales abéliennes, la théorie de la transformation des fonctions elliptiques et il consacre, à ce sujet, divers Mémoires pleins d'aperçus ingénieux sur une question déjà si étudiée.

Henri Dulac.

LORIA (GINO). — LE SCIENZE ESATTE NELL'ANTICA GRECIA. Seconda edizione totalmente riveduta, con 122 figure nel testo (*Manuali Hoepli*). 1 vol. in-16, XXIV-973 pages. Milano, Ulrico Hoepli, 1914.

Cet Ouvrage de M. Loria avait été précédemment publié dans les Mémoires de l'Académie de Modène. Sa réimpression dans la Collection des Manuels Hoepli lui donnera sans doute toute la diffusion qu'il mérite : cette Histoire des Mathématiques grecques sera vite classique, en Italie comme hors d'Italie.

Les lecteurs du *Bulletin* connaissent déjà cet Ouvrage par les savants comptes rendus que Paul Tannery ([1]) a consacrés aux trois premiers Livres de sa première édition. J'insisterai donc ici sur les Livres IV et V, après avoir rappelé le sujet des trois premiers Livres et indiqué les principales modifications qu'ils ont subies. Ces modifications n'ont rien d'essentiel : le plan général du Livre, très heureux compromis, comme on le verra par la suite, entre l'ordre chronologique et l'ordre par matières, n'a pas été modifié; des remaniements partiels ont seulement été rendus nécessaires par de récentes découvertes historiques.

Voici en quels termes, dans sa Préface, M. Loria caractérise son Livre : « C'est une exposition, autant que possible complète, des conquêtes faites par les Grecs dans le champ où ils laissèrent leurs plus glorieuses traces; exposition faite par un mathématicien pour des personnes qui, bien que pouvant ne disposer que d'un modeste bagage scientifique, s'intéressent à la Mathématique. On a donc banni toutes les discussions de nature exclusivement philologique pour, au contraire, s'attacher à tout ce qui pouvait expliquer comment et pourquoi les sciences mathématiques purent graduellement se constituer et se développer. »

C'est une exposition aussi peu dogmatique que possible; M. Loria laisse son lecteur libre de choisir entre les diverses solutions proposées pour un problème historique déterminé. Il se contente de lui fournir les éléments de son choix en dégageant avec le plus grand soin, même lorsqu'il prend parti, pour chacune des théories en présence, la part d'hypothèse et la part scientifiquement démontrée, en donnant de nombreux extraits de mathé-

---

([1]) *Bull. des Sc. math.*, 1894, p. 5; 1895, p. 265; 1901, p. 85.

maticiens anciens. Ces extraits font de son Livre une excellente anthologie méthodique des œuvres mathématiques grecques : il développera peut-être, et ce serait une heureuse influence, le goût peu répandu de la lecture de ces œuvres.

La part d'initiative que M. Loria laisse à son lecteur, la collaboration constante qu'il lui demande, ne sont pas les moindres charmes de son Livre : il est de ceux qui n'enseignent pas seulement l'histoire, mais comme elle se fait, et parce qu'une discipline en formation est plus attirante qu'une discipline faite, il est de ceux qui peuvent développer le goût des études historiques. On ne peut pas faire de plus grand éloge.

Le Livre I est consacré à l'histoire des géomètres grecs précurseurs d'Euclide. La Géométrie, à laquelle aucune des Écoles philosophiques qui se sont succédé dans la période pré-euclidienne n'est restée indifférente, se trouve ainsi, à l'époque gréco-alexandrine, mûre pour des expositions systématiques comme celle d'Euclide, et rencontre une ambiance favorable au développement de génies tels qu'Archimède et Apollonius : l'histoire de cette période gréco-alexandrine, que M. Loria nomme *âge d'or de la Géométrie*, forme le Livre II de son Ouvrage. Le Chapitre de ce Livre relatif à Archimède a dû subir quelques modifications dues à la célèbre et récente découverte de son œuvre sur *la Méthode*. Peut-être peut-on regretter que M. Loria se soit contenté d'en donner la lettre-préface, sans analyser ces méthodes de démonstrations mécaniques qui sont un des titres de gloire du géomètre Syracusain. Le Livre III (*Le substratum mathématique de la Philosophie naturelle des Grecs*) est consacré aux recherches géométriques faites par eux à propos d'Astronomie, de Physique ou de Géodésie. Il est bien à sa place naturelle, car les principaux travaux qui y sont étudiés (ceux de Hipparque, Ptolémée, Héron) suivent ceux d'Archimède et d'Apollonius et précèdent le déclin de la Géométrie grecque dont il sera question au Livre IV. Un événement important s'est produit depuis la publication de la première édition du Livre de M. Loria : c'est la publication du Traité des *Métriques* de Héron, découvert par Schöne à Constantinople. M. Loria en donne une analyse très détaillée et quelques extraits importants : en particulier, le prélude historique

du premier Livre des Métriques. Il s'efforce ensuite d'en dégager la physionomie de Héron qui lui apparaît « non comme un Newton créateur du Calcul infinitésimal, mais comme un Euler qui en ordonne, en les complétant et les perfectionnant, les doctrines fondamentales ».

Le Livre IV de l'Ouvrage de M. Loria est consacré à la période qu'on a nommée parfois *période gréco-romaine*, ou *ère des commentateurs*, et que M. Loria appelle *âge d'argent* de la Géométrie (*periodo argenteo*). C'est sans contredit une période de décadence, mais la Géométrie grecque y brille encore parfois d'un vif éclat. C'est de plus une époque très importante pour l'historien : la plupart des renseignements que nous ayons sur l'*âge d'or de la Géométrie* nous viennent des commentateurs de l'*âge d'argent;* sans eux, il serait impossible d'écrire l'histoire de la période pré-euclidienne. M. Loria divise les géomètres de l'âge d'argent en trois catégories : les uns (Pappus) complétèrent les recherches de l'âge d'or, d'autres ne sont que de modestes commentateurs, d'autres enfin étudièrent la philosophie et les méthodes de la Géométrie. Je pense que cette distinction n'a rien d'absolu, car Géminus de Rhodes, à qui est consacré le Chapitre I du Livre IV, appartient autant à la première catégorie qu'à la troisième. Il nous est connu par des citations de Proclus qui lui attribue entre autres des perfectionnements de la théorie des parallèles et une classification des sciences; le passage de Proclus où est exposée la classification des Sciences de Géminus est donné par M. Loria *in extenso*. Quels furent les écrits de Géminus? Le médiocre Traité d'Astronomie qui nous est parvenu sous son nom est-il de lui et peut-il permettre de déterminer l'époque de sa vie? Ce sont des questions très délicates que M. Loria examine à la fin de ce Chapitre. Après quelques indications sur Théon de Smyrne (la partie astronomique de son œuvre a été étudiée au Livre III à propos des idées cosmologiques de Platon), l'Auteur étudie le géomètre le plus important de l'âge d'argent, Pappus. Il précise d'abord l'importance historique de son œuvre, discute les faibles connaissances que nous possédons sur sa vie. Il analyse ensuite, avec le plus grand détail, sa célèbre *Collection mathématique*, justifiant ces détails par le fait que cette Collection, dernière grande œuvre de la Géo-

métrie grecque, est une vaste encyclopédie donnant une bonne idée d'ensemble du développement de la Géométrie grecque à l'âge d'argent. Il indique en terminant les renseignements que Proclus nous donne sur les Commentaires que Pappus aurait faits des *Éléments d'Euclide*, et, d'après un manuscrit arabe signalé par Wœpcke, une esquisse probable du Commentaire de Pappus au Livre X de ces Éléments. Le Chapitre IV (le *Néo-Platonisme*) débute par un bref historique du développement de la secte néo-platonicienne. Les *Commentaires aux Éléments d'Euclide* de Proclus, principal représentant de cette secte, tirent leur importance de ce qu'ils sont, avec la *Collection mathématique* de Pappus, la plus riche source de l'histoire de la Géométrie grecque. Avec justesse, M. Loria caractérise ainsi les *Commentaires* : « Euclide avait prononcé une sentence de divorce entre la mathématique et la philosophie, Proclus soutint leur réconciliation ». Puis il s'efforce de déterminer quels auteurs Proclus a plus particulièrement pillés pour établir ses Commentaires; il termine par leur analyse. La fin de ce Chapitre est consacrée à trois néo-platoniciens successeurs de Proclus : Marinus, Isidore d'Alexandrie, Damascius. Dans le Chapitre V, l'Auteur s'occupe d'Eutocius qui n'a mérité de sortir de l'oubli que par les renseignements historiques qu'il nous donne; M. Loria parle brièvement de ses Commentaires aux Ouvrages d'Archimède : *Sur la sphère et le cylindre* et *Sur la mesure du cercle*, et de ses Commentaires aux quatre premiers Livres des *Coniques* d'Apollonius. Le dernier géomètre important de l'époque gréco-romaine, Sérénos, est au contraire plein d'originalité : son Opuscule *Sur la section du cylindre* est digne de l'âge d'or de la Géométrie; son Ouvrage *Sur les sections du cône* (étude comparative des sections passant par le sommet), dont M. Loria donne, comme du premier, quelques extraits, le révèle très expert en la discipline que M. Zeuthen a nommée *Algèbre géométrique*.

L'Arithmétique grecque est développée dans le cinquième et dernier Livre de l'Ouvrage de M. Loria.

Il s'occupe d'abord, au Chapitre I, de la plus humble de ses formes, l'*art du Calcul* : numération parlée, procédés de calcul digital des Grecs (probablement analogues à ceux que décrit

Nicolas Rhabdas, un Grec du XIIIe siècle, dans une lettre dont M. Loria donne un important extrait), numération écrite. Il examine ici la question de la provenance et de l'âge du dernier système de numération écrite des Grecs, pour appuyer finalement l'opinion de Gow qui le considère comme inventé à Alexandrie à l'époque de Ptolémée Philadelphe. Il montre ensuite comment, dans son *Arenarius*, Archimède, suivi dans cette voie par Apollonius, perfectionna le système de numération des Grecs, lui donnant une puissance infinie. L'exposé du matériel arithmétique des Grecs se termine par l'exposé de leurs notations pour les fractions. L'étude des procédés de calcul des Grecs est délicate, car nous n'avons conservé aucun vrai manuel de calcul. Il faut donc, comme le dit M. Loria, les « épier et les surprendre pendant qu'ils opèrent ». C'est ainsi qu'il étudie les procédés employés par les Grecs pour effectuer les quatre opérations fondamentales, procédés qui, après l'introduction par Apollonius de la notion de πυθμήν, sont à peine inférieurs aux nôtres. La fin de ce Chapitre est consacrée au problème délicat de reconstituer les méthodes qui permirent aux Grecs de calculer avec de bonnes approximations des racines carrées et cubiques. C'est le premier développement de la science des nombres, né du désir d'y trouver une explication de l'Univers, que l'Auteur étudie dans le Chapitre II : l'*Arithmétique dans l'École de Pythagore*. J'y signale en particulier quelques pages sur l'origine de notre système décimal; M. Loria y indique les raisons qui ont pu faire croire (un passage de la Géométrie de Manlius Boetius) que notre système de numération provient des Pythagoriciens, et y fait un bon exposé des recherches sur cette question. Les Chapitres III et IV : l'*Arithmétique dans l'Académie* et l'*Arithmétique mystique*, sont consacrés à l'étude de l'arithmétique grecque avant Diophante. L'Auteur a fort bien dégagé les grandes lignes de son développement : d'abord Platon et ses disciples qui ne font qu' « exposer, parfois développer et plus souvent appliquer » les idées de Pythagore; puis, à l'âge d'or de la Géométrie, l'étude des nombres elle-même repose sur la représentation des nombres par des segments et des produits par des aires (Euclide : cette partie de l'œuvre d'Euclide a été étudiée dans le Livre III); une réaction se manifeste ensuite contre ces tendances, sans que les Néo-Pythagoriciens et les

Néo-Platoniciens (Nicomaque de Gérase, Théon de Smyrne, Jamblique, Domninus de Larissa) sachent éliminer de l'Arithmétique l'élément mystique, ni la construire avec la rigueur qu'avait acquise la Géométrie. Ce sera l'œuvre de Diophante. Le Chapitre V, qui lui est consacré, débute par l'exposé des recherches effectuées pour déterminer l'époque de sa vie : il semble bien qu'on puisse, avec Paul Tannery, le faire vivre sous Antonin le Pieux. M. Loria commence l'étude de son *Arithmétique* par quelques indications sur les divinations tentées pour en restituer les sept Livres perdus. Puis, après un clair exposé de la symbolique de Diophante, il donne une liste des équations résolues par celui-ci, liste bien faite pour montrer l'étendue de ses connaissances. Il essaie ensuite de dégager les méthodes de Diophante : Diophante traite les équations ou les systèmes déterminés à peu près comme nous les traiterions; en analyse indéterminée, il ne recherche pas les solutions entières, mais seulement rationnelles et se contente d'en obtenir une. M. Loria parcourt encore une fois l'*Arithmétique* pour relever les propriétés des nombres qui y sont appliquées; il termine ce Chapitre en examinant la question de l'originalité de Diophante, pour conclure très vraisemblablement que ce dernier a surtout exposé et mis au point les connaissances arithmétiques de son temps. Ceci le rapproche d'Euclide. Du Chapitre VI, *Récréations mathématiques des Grecs*, nous donnerons une idée suffisante par l'énoncé de ses différents sous-titres : Les problèmes de l'Anthologie, Le *problème de la couronne* d'Archimède, La seconde Lettre de Rhabdas, Le *problème des bœufs* d'Archimède, Moschopulos et les mathématiciens de Byzance. Un Appendice, bref exposé des tentatives faites pour déterminer le *nombre nuptial* de Platon, termine le Livre V et dernier.

En résumé, on voit que l'Ouvrage si complet et si méthodique de M. Loria mérite à tous les points de vue d'attirer et de retenir l'attention des historiens de la Science grecque.

JOSEPH PÉRÈS.

VIVANTI (Giulio). — Lezioni di Analisi infinitesimale. 1 vol. gr. in-8. 1911, XI-648 pages. Pavie, Mattei, Speroni e C., 1911.

Ces Leçons paraissent destinées surtout à des étudiants qui, abordant pour la première fois l'étude de l'Analyse, ont l'intention de poursuivre ensuite leurs études mathématiques. Pour ces étudiants, les principes doivent être établis d'une façon assez rigoureuse pour qu'ils n'aient pas trop à revenir sur leurs pas plus tard, et cependant la rigueur ne doit pas exclure la simplicité; il faut que ce premier cours constitue une armature solide qui soutiendra l'édifice entier de leurs études ultérieures et sur laquelle pourront s'insérer les diverses théories qu'ils auront à approfondir. Le Livre de M. Vivanti remplit parfaitement ce but. Les conditions restrictives nécessaires pour la validité des énoncés sont toujours données explicitement et, malgré cela, l'Auteur s'attache avant tout aux cas les plus importants pour les applications, en n'abordant qu'avec mesure les types les plus généraux de fonctions dont l'étudiant aura à s'occuper s'il étudie plus tard les méthodes modernes et les résultats les plus récents de la théorie des fonctions. M. Vivanti s'est limité aux fonctions de variables réelles. Après avoir établi les notions fondamentales relatives aux nombres, aux ensembles, aux limites, aux fonctions, à la continuité, il étudie successivement les dérivées et intégrales des fonctions d'une variable, puis de plusieurs variables, les applications géométriques de l'Analyse, les équations différentielles, les équations aux dérivées partielles du premier ordre, les éléments du Calcul des variations. L'Ouvrage se termine par un Appendice relatif au Calcul vectoriel.

Nous venons de dire dans quel esprit sont développées ces Leçons; nous signalerons maintenant quelques points particuliers.

La fusion en une discipline unique du Calcul différentiel et du Calcul intégral, qu'ont adoptée la plupart des auteurs modernes, est réalisée ici d'une façon plus profonde encore qu'elle ne l'est généralement. C'est ainsi que la deuxième partie contient tout d'abord la définition de la dérivée et celle de l'intégrale d'une fonction d'une variable; puis chaque théorème relatif aux intégrales est précédé ou suivi, chaque fois qu'il y a lieu, du théorème correspondant relatif aux dérivées; par exemple, le théorème d'après lequel le produit de deux fonctions intégrables dans un intervalle

est intégrable dans le même intervalle est suivi du théorème relatif à la dérivée du produit de deux fonctions dérivables en un point; de même, la règle de dérivation des fonctions de fonctions est suivie de la méthode d'intégration par substitution. Le calcul des dérivées et celui des intégrales des fonctions élémentaires ne vient qu'après l'étude de ces propriétés générales.

Pour les applications géométriques, l'Auteur a tenu à calculer les divers éléments d'une courbe, rayon de courbure, rayon de torsion, par les méthodes les plus directement rattachées aux définitions : ce ne sont pas toujours les méthodes les plus simples, mais ce sont celles que retrouvera le plus facilement l'étudiant plus exercé aux calculs analytiques qu'aux raisonnements géométriques. C'est sans doute pour cette raison que les formules de Frenet-Serret ne sont démontrées que par une pure vérification de calcul sans recours aux indicatrices sphériques des tangentes et des binormales et qu'elles ne sont données que tout à la fin de cette théorie, au lieu d'être rattachées à la définition même de la courbure et de la torsion, ce qui amènerait des simplifications dans le calcul des rayons de courbure et de torsion. Ce dernier point de vue conviendrait d'ailleurs à un cours de Géométrie différentielle plutôt qu'à un cours d'Analyse où les applications géométriques ne sont données que pour illustrer les notions fondamentales de dérivée et d'intégrale et pour exercer l'étudiant à la pratique des règles de dérivation et d'intégration. Le point de vue de M. Vivanti est donc parfaitement légitime.

Signalons encore la méthode originale employée pour l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants. La méthode classique suppose qu'on a étendu aux exponentielles à exposant imaginaire les règles de dérivation établies dans le cas de l'exposant réel et, par conséquent, qu'on a défini la dérivée d'une fonction de variable complexe. M. Vivanti s'étant placé, dans tout le cours de son Livre, au point de vue réel, a préféré éviter l'introduction des imaginaires et il y est parvenu par une méthode élégante qu'il avait déjà exposée ailleurs [1] et qui est le déve-

---

[1] G. Vivanti, *Un tentativo di Eulero di evitare le quantità complesse nella integrazione delle equazioni differenziali lineari.* (*Bibliotheca mathematica : Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenchaften,* Leipzig, Teubner, 3. Folge, X. Band, 1910.)

loppement rigoureux d'une tentative faite par Euler dans le même but.

Dans un Appendice de 33 pages, M. Vivanti donne les principes fondamentaux du Calcul vectoriel, d'après le système minimum de MM. Burali-Forti et Marcolongo, ainsi que les applications géométriques de ce calcul à différentes questions relatives aux courbes planes ou gauches. Le lecteur trouvera dans cet Appendice un exposé très clair des principes du Calcul vectoriel; l'Auteur n'a pas cherché comme MM. Burali-Forti et Marcolongo à donner toujours au calcul géométrique une forme absolue, indépendante des coordonnées : il a pensé, avec raison, que les lecteurs auxquels le Livre s'adresse, étant initiés à l'emploi des coordonnées cartésiennes, il n'y avait aucun intérêt pour eux à se passer de ces coordonnées et qu'il valait mieux utiliser leurs connaissances dans cet ordre au profit de la concision et de la clarté. L'étude de cet Appendice constitue d'ailleurs une excellente préparation à la lecture des Ouvrages de MM. Burali-Forti et Marcolongo, où le Calcul vectoriel est développé sous une forme absolue, indépendante de tout système de coordonnées, ce qui présente un intérêt incontestable au point de vue logique.

S. Lattès.

---

VIVANTI (Giulio). — Esercizi di Analisi infinitesimale. 1 vol. gr. in-8, VIII-470 pages, Pavia, Mattei, Speroni, e C., 1913.

Cette excellente collection d'exercices ne tardera pas à prendre place dans les Bibliothèques à côté des recueils classiques consacrés aux exercices et problèmes sur le Calcul différentiel et intégral. Elle est appelée à rendre de grands services à de nombreuses catégories d'étudiants, non seulement en Italie, mais encore dans d'autres pays. La question de la langue ne saurait en effet offrir de difficultés, le texte étant nécessairement très bref et facile à comprendre, même pour celui qui n'a aucune connaissance de la langue italienne.

Les *Esercizi di Analisi infinitesimale* de M. G. Vivanti, professeur à l'Université de Pavie, s'étendent sur l'ensemble du champ de l'Analyse. Au nombre de 575, ces exemples et problèmes com-

prennent, comme tous les recueils de cette nature, de nombreuses applications géométriques du Calcul différentiel et intégral. Selon l'Auteur, plus des deux tiers des questions sont nouvelles. Chaque problème est suivi de sa résolution, ou tout au moins d'indications concernant la marche à suivre.

Les problèmes ont été groupés d'après l'ordre suivi par M. Vivanti dans ses *Lezioni di Analisi infinitesimale* (Pavie, 1911, voir ce *Bulletin*, 1914, p. 107) :

I. Préliminaires, limites, continuité, infiniment petits. — II. Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable. — III. Dérivées et intégrales des fonctions de plusieurs variables. — IV. Applications géométriques : courbes planes, courbes gauches et surfaces. — V. Equations différentielles, ordinaires et aux dérivées partielles. — VI. Calcul des variations.

H. Fehr.

---

PASCH (Moritz). — Lecciones de Geometria moderna. Traducción anotada de la primera édición alemana con adiciones del Autor, por J.-G. Alvarez Ude y J. Rey Pastor. (*Junta para Ampliación de estudios é Investigaciones cientificas.*) 1 vol. gr. in-8, xi-288 pages. Madrid, Eduardo Arias, 1913.

La Société mathématique espagnole a inauguré en 1913 la série de publications, entreprise d'accord avec la Ligue pour le développement des études et recherches scientifiques, par l'édition de la traduction espagnole, faite par MM. Alvarez Ude et Rey Pastor, de l'Ouvrage de M. Moritz Pasch intitulé *Vorlesungen über neuere Geometrie*, paru en mars 1882. Cet Ouvrage contient le premier exposé rigoureux des principes de la géométrie projective linéaire, devenue indépendante de la théorie euclidienne des parallèles.

L'Auteur se propose d'abord de faire ressortir l'origine empirique des concepts géométriques ; après l'énumération des axiomes strictement nécessaires au développement logique, vient l'étude des concepts fondamentaux du point, de la droite et du plan.

Un Chapitre spécial, consacré à l'étude des figures en perspective, prépare l'introduction de la division harmonique de quatre points, définie par la propriété du quadrilatère complet qui est

déduite du théorème de Desargues. M. Pasch étudie ensuite l'homographie et la dualité, en se bornant au point, à la droite et au plan, sans parler des éléments imaginaires.

Jusque-là tout a été développé d'une manière purement géométrique, indépendamment de la notion de mesure. Cette notion s'introduit à la fin de l'Ouvrage, pour la définition de l'invariant fondamental de la Géométrie projective, le rapport anharmonique de quatre éléments.

Soit U un élément fondamental pris dans la multiplicité à une dimension considérée : deux couples d'éléments AB et A'B' seront dits équivalents si l'élément U a même conjugué harmonique par rapport aux couples AB' et BA'. C'est cette notion d'équivalence relative à un élément fondamental qui joue le rôle de la notion d'égalité et permet de définir la mesure d'un couple d'éléments.

L'Ouvrage se termine par la définition et le calcul des coordonnées de points et de plans.

R. Deltheil.

---

RUNGE (Carl). — Graphical Methods. Columbia University Lectures. (*Ernest Kempton Adams*, Research Fund, 1909-1910). 1 vol. in-8°, IX-148 pages. New York, Columbia University Press, 1912.

Cet Ouvrage reproduit la substance de Conférences données par M. C. Runge à l'Université Colombia, ce qui explique qu'il ait été rédigé en anglais. L'Auteur dit expressément, dans l'Introduction, qu'il a cherché à enseigner les méthodes graphiques dans leur forme la plus généralisée, pour faciliter leur application aux problèmes techniques autres que ceux pour lesquels elles ont été inventées.

Le corps de l'Ouvrage est divisé en trois Chapitres :

I. *Calcul graphique :* arithmétique graphique ; fonctions entières ; résolution des équations algébriques ; systèmes d'équations linéaires ; calcul des nombres complexes.

II. *Représentation graphique des fonctions* (1) : ce Chapitre

(1) C'est ce qu'on appelle ordinairement la *Nomographie ;* nous ignorons si c'est par aversion pour les racines grecques que l'Auteur a mis à l'index ce nom proposé il y a plus de vingt ans, et dont le droit de cité n'est, que nous sachions, contesté nulle part.

comprend les paragraphes suivants : Fonctions d'une variable (échelles fonctionnelles) ; règle à calcul (échelles glissantes) ; coordonnées rectangulaires anamorphosées ; fonctions de deux variables (abaques cartésiens ordinaires et anamorphosées) ; représentation d'un plan sur un autre plan ; autres méthodes de représentation des relations entre trois variables (points alignés) ; relations entre quatre variables (points à deux cotes).

III. *Méthodes graphiques du Calcul différentiel et intégral :* Quadratures graphiques ; différentiation graphique ; équations différentielles du premier ordre ; équations différentielles du second ordre et des ordres supérieurs.

Dans le cadre un peu serré où l'Auteur a fait tenir la suite de ses Conférences, la part faite à l'algèbre graphique, et particulièrement à la résolution des équations, paraît plutôt succincte ; en revanche, ses études sur l'intégration des équations différentielles des divers ordres présentent des extensions très intéressantes et très personnelles des procédés relatifs au premier ordre.

Dans son ensemble, le sujet a été traité avec la maîtrise qu'on pouvait attendre d'un professeur aussi éminent que M. Runge ; mais on se demande pourquoi, contrairement aux mœurs actuelles, il a été aussi avare de renseignements bibliographiques. Le renvoi pour la littérature du sujet, mis à la fin de l'Introduction, donnera une idée bien inexacte de cette littérature en la réduisant à deux articles de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Encore vaudrait-il mieux que le lecteur fût renvoyé à l'édition française, beaucoup plus complète, de ladite Encyclopédie.

Dans le même ordre d'idées, on regrettera que l'Auteur ait passé sous silence les noms des principaux initiateurs : au Chapitre I, Cousinery ; au Chapitre II, Lalanne et d'Ocagne ; au Chapitre III, Massau et Runge lui-même. Il n'est également pas équitable de donner l'impression qu'avant ce travail les méthodes graphiques n'avaient pas été enseignées *sous leur forme la plus généralisée*, alors qu'au contraire il en existait déjà une codification systématique dans la Nomographie de d'Ocagne, où la théorie générale éclaire lumineusement tout le champ du sujet et fait apercevoir d'un seul coup d'œil toutes les possibilités d'applications.

Indépendamment même de tels travaux d'ensemble, ce ne serait que justice de ne pas laisser ignorer les noms des inventeurs de

principes aussi féconds que ceux de l'anamorphose (§ 8 et 9) ou des points alignés (§ 11 et 12). Tout cela, bien entendu, n'est dit que pour le principe et l'on ne saurait en faire grief à M. Runge, qui laisse tout autant dans l'ombre la part très importante qui lui revient dans l'intégration graphique des équations différentielles (§ 15 et 16).

A. Goupil.

LECAT (Maurice). — Bibliographie du Calcul des Variations, 1850-1913. 1 vol. gr. in-8, IV — 113 pages. Gand, Ad. Hoste, 1913.

Les Mémoires relatifs au Calcul des Variations sont très nombreux. Ils sont souvent insérés dans des Recueils peu répandus, parfois sous des titres n'annonçant pas qu'il s'agit de variations. Aussi n'est-il pas rare qu'un chercheur s'aperçoive que les résultats auxquels il est arrivé ont été signalés longtemps avant lui. C'est pourquoi il a paru opportun à M. Lecat de publier une Bibliographie des travaux sur le Calcul des Variations pour compléter les Ouvrages de Woodhouse, de Giesel, de Todhunter. Ce dernier Ouvrage étant complet jusqu'en 1850, c'est à partir de cette date que M. Lecat commence son utile travail. Il y a d'abord la liste alphabétique des Auteurs, avec les titres de leurs Ouvrages, avec les titres des Recueils qui renferment leurs Mémoires, avec toutes les indications de dates et de pages ; il y a ensuite une liste à peu près chronologique des travaux des Auteurs avec une courte indication bibliographique.

L'Opuscule de M. Lecat comprend la liste des travaux qui « utilisent » le calcul des variations ou qui « s'y rattachent ». Il n'est pas accompagné d'un Index par ordre de matières, parce que cet Index existe dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*.

L'Auteur a publié ce Livre pour faciliter aux géomètres la tâche préliminaire dans leurs recherches relatives à l'une des plus belles branches des Mathématiques.

Er. L.

HAAG (J.). — Cours complet de Mathématiques spéciales. Tome I : *Algèbre et Analyse*, 1 vol. gr. in-8, VI-402 pages. — Exercices du Cours de Mathématiques spéciales. Tome I : *Algèbre et Analyse*, 1 vol. gr. in-8, IV-219 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1914.

Ces deux Volumes, qui ne forment qu'un Ouvrage, sont les premiers d'une œuvre complète que M. Haag se propose de publier sous le nom de *Cours complet de Mathématiques spéciales*.

Le programme de la classe de Mathématiques spéciales a subi en 1904 de profondes modifications : simplification de la Géométrie analytique, développement de l'Analyse mathématique, suppression des théories qui relèvent de l'Algèbre supérieure.

A côté des excellents Traités déjà parus en Analyse, en Géométrie analytique, en Mécanique, depuis cette orientation nouvelle de l'enseignement, l'Ouvrage de M. Haag se présente comme un tout homogène dont les différentes parties sont reliées, non seulement par la communauté du titre, mais par le mutuel secours qu'elles se prêtent, la Géométrie analytique expliquant, éclairant certaines propositions d'Analyse. En lisant le premier Tome, on comprend déjà que certains Chapitres ou certains développements sont écrits en vue de leurs applications à la Géométrie; le lien est si étroit que, pour certaines questions d'Algèbre ou d'Analyse, l'Auteur a dû renvoyer aux Tomes II et III de son Ouvrage; on ne saurait le lui reprocher : il conviendra seulement que l'étudiant ne s'astreigne pas à lire le Livre dans l'ordre des différents Tomes, mais commence simultanément l'étude de l'Algèbre et de la Géométrie analytique.

M. Haag a pris le mot « Mathématiques spéciales » dans son sens le plus large; il n'a pas voulu se borner exactement aux limites un peu rigides d'un programme de concours et, bien qu'il se soit très profondément pénétré de l'esprit de la réforme de 1904, bien qu'il présente son Livre comme le Cours qu'il a professé au Lycée de Douai, à de légères modifications près, il a songé, non seulement aux candidats aux grandes écoles, mais à tous ceux qui veulent « aborder avec fruit l'enseignement supérieur des mathématiques » et à qui il faut « éviter toutes ces hésitations, tous ces retours en

arrière » que l'on constate chez les étudiants qui arrivent dans nos Facultés avec un bagage insuffisant.

Le *Cours* est divisé en 25 Chapitres.

Après avoir complété la notion de nombre par la notion de nombre irrationnel, basée sur la notion de coupure, defini les les exposants fractionnaires et incommensurables, donné les élements de l'analyse combinatoire avec l'application à la formule du binome, l'Auteur étudie les nombres complexes, en insistant sur l'équivalence à un ensemble de deux nombre réels, et en usant largement de la représentation géométrique (dans l'extraction des racines, les propriétés des racines primitives sont signalées).

A propos des suites infinies, l'Auteur présente la notion de limite de la façon la plus rigoureuse et définit la plus grande et la plus petite limite d'une suite. L'étude des séries est très approfondie; pour les séries à termes positifs sont indiqués : la règle de Duhamel et de Gauss, pour les séries quelconques, le théorème d'Abel; la multiplication des séries est traitée dans le cas général signalé par Mertens; le calcul numérique fait l'objet d'un paragraphe spécial accompagné de conseils pratiques très précieux.

Pour la théorie des fonctions, M. Haag ne craint pas de faire appel à l'intuition géométrique, et il précise de façon très nette, par des représentations graphiques, les conditions d'application des théorèmes classiques. Sans aborder la théorie des fonctions de variable complexe, il envisage les fonctions à coefficients imaginaires. Les séries entières conduisent plus loin à la définition de $e^z$, $\cos z$, $\sin z$ et des fonctions hyperboliques. Toutes les méthodes à employer pour développer une fonction en série sont clairement exposées; un Chapitre qui contient beaucoup d'utiles renseignements est consacré aux développements limités. L'étude des formes indéterminées se présente comme un cas particulier de l'étude d'une fonction au voisinage d'une valeur de la variable et comme une application des infiniment petits; avec raison, la règle de l'Hospital est reléguée au rang de règle secondaire.

Les différentielles sont introduites comme de nouvelles variables indépendantes; l'avantage de leur introduction dans les calculs est mise en évidence de façon précise. Sans exposer tous les points d'une démonstration rigoureuse, l'Auteur donne très exactement la notion d'intégrale définie, en indique le calcul approché, étudie

les extensions au cas où les limites ou l'élément différentiel deviennent infinis, donne les méthodes classiques de calculs des quadratures et les applications au calcul d'éléments géométriques; à propos des applications aux aires, aux volumes, il fait pressentir ce qu'est une intégrale double ou triple, sans toutefois en parler explicitement.

Les équations différentielles du premier ordre sont étudiées dans le cas des variables séparées, des équations homogènes, des équations linéaires pour lesquelles l'Auteur indique la méthode de la *variation des constantes*, des équations de Bernoulli. L'étude des équations du second ordre est limitée à celles des équations linéaires à coefficients constants.

Les dix derniers Chapitres sont consacrés à l'étude des polynomes et des équations algébriques. M. Haag a ainsi rejeté tout à fait à la fin de son Livre des Chapitres comme ceux de la division des polynomes ou des équations linéaires que la tradition plaçait au au début des programmes ou des Traités : ceci s'explique par le fait que les polynomes sont étudiés ici au point de vue fonctionnel, la variable pouvant d'ailleurs prendre des valeurs complexes; la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples est aussi envisagée du point de vue des pôles d'une fonction. Les questions relatives aux équations algébriques sont traitées très simplement sans que soient dépassées les limites du programme du 27 juillet 1904. Les propriétés élémentaires des déterminants sont complétées par la multiplication des tableaux rectangulaires et la propriété des déterminants adjoints. A propos des formes linéaires sont signalées les propriétés des substitutions orthogonales. Les propriétés des formes quadratiques sont exposées en vue des applications à la Géométrie analytique (décomposition en carrés, forme polaire, équation en S, forme adjointe).

Trois Notes donnent des indications complémentaires, l'une sur la résolution des relations de récurrence dans le cas de

$$u_n = a_n u_{n-1} + b_n,$$

l'autre sur le rapport anharmonique, la troisième sur l'équation de Riccati.

Au lieu de placer les exercices dans le cours du Traité, M. Haag les a réunis en un Volume en les classant par Chapitres *insépa-*

*rables des Chapitres du Livre.* Ceci lui a permis de donner aux exercices l'importance capitale qu'ils ont dans l'enseignement des débutants; des exercices traités apprennent d'abord à l'étudiant encore inhabile à mieux saisir le mécanisme des démonstrations faites ou la pratique des opérations; un grand nombre de questions non résolues lui permettent de s'exercer utilement ensuite et de vérifier la sûreté de ses connaissances. Certains des exercices complètent le cours qui se trouve ainsi allégé de questions qui, pour être intéressantes, n'en auraient pas moins l'inconvénient de faire oublier à l'élève ce qui est essentiel. M. Haag a puisé avec discernement dans les nombreuses questions posées dans les examens de l'École Polytechnique, de l'École Normale et de l'École Centrale; il a aussi indiqué d'intéressantes applications à la Géométrie, à la Mécanique et à l'Astronomie.

L'Auteur renvoie en maints endroits à l'excellent Ouvrage de Tannery : *Leçons d'Algèbre et d'Analyse;* il s'est évidemment largement inspiré de ce Livre, et néanmoins son œuvre est très originale; elle dénote chez lui la plus grande expérience des difficultés éprouvées par les jeunes étudiants; il sait quelle peine ils ont à étudier une série, comme une indétermination les effraie, comme ils sont maladroits dans les calculs numériques et il leur prodigue, tant dans le cours que dans les exercices, des conseils dont ils devront tirer le plus large profit. D'une exposition concise et claire, alliant la rigueur et la simplicité, l'Ouvrage sera d'un puissant secours à tous les candidats; ce sera une introduction très attrayante et très profitable à l'étude des Mathématiques supérieures pour tous ceux qui veulent, suivant le mot de M. Haag lui-même, *devenir mathématiciens.*

A. Hennequin.

# MÉLANGES.

## SUR UN NOUVEAU MODE DE DÉVELOPPEMENT D'UN NOMBRE EN FRACTION CONTINUE;

PAR M. PAUL APPELL.

I. Dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (août 1913, t. XX, p. 169), j'ai posé une question à l'effet de savoir si certains développements en fractions continues avaient déjà été considérés. M. Oskar Perron, dont on connaît le bel Ouvrage sur la théorie des fractions continues [1], que j'ai consulté à ce sujet, m'a répondu que ces développements étaient nouveaux.

Je me propose dès lors de les exposer ici dans leur généralité. Ces développements se rattachent à la recherche de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre à une unité près, comme les fractions continues des éléments se rattachent à la détermination d'un nombre à une unité près; dans ce cas élémentaire, on a $n = 1$.

II. Soit donc $n$ un nombre entier positif donné, le même dans tout ce qui suit.

Prenons un nombre réel et positif quelconque $A_1$. Soit $a_1$ le nombre entier positif qui constitue la racine $n^{\text{ième}}$ de $A_1$ à une unité près, par défaut,

$$a_1^n \leq A_1 < (a_1 + 1)^n.$$

Le reste $R_1$ de cette opération,

$$A_1 = a_1^n + R_1,$$

est tel que

$$R_1 < (a_1 + 1)^n - a_1^n.$$

Si $A_1$ était plus petit que 1, on prendrait $a_1 = 0$.

---

[1] PERRON (Oskar), *Die Lehre von den Kettenbrüchen* (Teubner, 1913). Analysé dans ce *Bulletin*, par M. R. Le Vavasseur, t. XXXVII, septembre 1913, p. 257.

Si donc on pose

$$R_1 = \frac{(a_1+1)^n - a_1^n}{A_2},$$

le nombre $A_2$ est plus grand que 1. On a donc ainsi

$$(1) \qquad A_1 = a_1^n + \frac{(a_1+1)^n - a_1^n}{A_2}.$$

On peut alors recommencer la même opération sur $A_2$ : ce nombre $A_2$ étant plus grand que 1, sa racine $n^{\text{ième}}$ à une unité près par défaut, $a_2$, est au moins égale à 1, et l'on a de même

$$A_2 = a_2^n + R_2,$$

ce qu'on peut écrire

$$(2) \qquad A_2 = a_2^n + \frac{(a_2+1)^n - a_2^n}{A_3}$$

avec

$$A_3 > 1.$$

Et ainsi de suite.

Si, à un certain moment de la suite des opérations, on trouve un reste $R_\nu$ égal à *zéro*, le nombre suivant $A_{\nu+1}$ est infini, l'opération se termine et l'on obtient un développement *limité*. Sinon le développement est illimité.

Tout nombre $A_1$ est donc développable, et cela d'une seule façon, en une fraction continue, par racines $n^{\text{ièmes}}$,

$$A_1 = a_1^n + \cfrac{(a_1+1)^n - a_1^n}{a_2^n + \cfrac{(a_2+1)^n - a_2^n}{a_3^n + \cfrac{(a_3+1)^n - a_3^n}{a_4^n} + \ldots}},$$

où les $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ sont des entiers positifs, dont le premier seul $a_1$ peut être *nul*.

*Cas particuliers.* — 1° $n = 1$. On obtient les fractions continues des éléments.

2° $n = 2$. On obtient les fractions continues par carrés

$$A_1 = a_1^2 + \cfrac{2a_1+1}{a_2^2 + \cfrac{2a_2+1}{a_3^2} + \ldots}$$

dont j'ai donné des exemples dans la question de l'*Intermédiaire* (*loc. cit.*).

III. Dans le développement du paragraphe précédent, nous avons pris les racines $n^{\text{ièmes}}$, à une unité près, *par défaut*. On obtiendrait un développement analogue en prenant toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ à une unité près *par excès*. On pourrait également prendre alternativement, dans la suite des opérations, une racine $n^{\text{ième}}$ par défaut, la suivante par excès, la suivante par défaut, etc.; ou encore faire se succéder les racines par défaut et par excès suivant une loi donnée à l'avance.

Bornons-nous au cas où toutes les racines sont par excès. On a alors, en appelant $b_1$ la racine de $A_1$, par excès,

$$b_1^n \geqq A_1 > (b_1 - 1)^n.$$

Si l'on pose

$$A_1 = b_1^n - S_1,$$

$S_1$ désignant le reste de l'opération, on a

$$S_1 < b_1^n - (b_1 - 1)^n.$$

On posera alors

$$S_1 = \frac{b_1^n - (b_1 - 1)^n}{A_2}$$

avec $A_2 > 1$, et l'on pourra recommencer les mêmes opérations.

On a ainsi le développement

$$A_1 = b_1^n - \cfrac{b_1^n - (b_1 - 1)^n}{b_2^n - \cfrac{b_2^n - (b_2 - 1)^n}{b_3^n - \ddots}},$$

où $b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$ sont des entiers au moins égaux à 2, le premier seul $b_1$ pouvant être égal à 1.

Par exemple, en prenant $n = 2$, $A_1 = 3$, on trouve tous les $b_\nu$ égaux à 2 et l'on a la fraction périodique simple

$$3 = 2^2 - \cfrac{3}{2^2 - \cfrac{3}{2^2 - \ddots}}$$

Dans cette fraction la réduite de rang $\nu$ est

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{3^{\nu+1} - 1}{3^\nu - 1},$$

et l'approximation

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} - 3$$

est égale à

$$\frac{2}{3^\nu - 1} < \frac{1}{3^{\nu-1}}.$$

L'expression ci-dessus de $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ et les expressions analogues pour les fractions périodiques peuvent être obtenues par la méthode que j'ai exposée dans un article *Sur les fractions continues périodiques* (*Archiv der Mathematik und Physik*, 62 Teil, 1878, p. 183-188).

IV. On voit quelles sont les questions qui se posent alors, en supposant $n > 1$.

Un développement limité représente un nombre commensurable d'une nature spéciale.

Un développement en fraction périodique simple ou mixte représente soit un nombre commensurable, soit une irrationnelle du second degré.

Les réciproques sont-elles vraies?

C'est là une question que je pose sans la résoudre. D'autres, ayant plus de loisirs que moi, pourront peut-être y trouver un intéressant sujet de recherches.

## L'ABBÉ BOSSUT.

**(A l'occasion du centenaire de sa mort);**

PAR M. E. DOUBLET,
astronome à l'Observatoire de Bordeaux.

(*Suite*) [1].

L'Académie des Sciences avait proposé, pour le sujet du prix à décerner en 1761 : « De déterminer la meilleure manière de lester

[1] Voir *Bull. des Sc. math.* mars 1914, p. 93.

et d'arrimer un vaisseau, et les changements qu'on peut faire en mer à l'arrimage, soit pour mieux faire porter la voile au navire, soit pour lui procurer plus de vitesse, soit pour le rendre plus ou moins sensible au gouvernail. »

Le prix fut partagé entre Jean-Albert Euler, fils du grand Léonard, et Bossut. Comme on ne peut douter que le père n'ait au moins revu le travail de son fils, ce partage était peut-être plus flatteur pour Bossut qu'un triomphe complet.

Dans ce premier Mémoire, l'auteur s'était placé surtout au point de vue de la théorie; il ne faut pas oublier que, selon toute vraisemblance, il n'avait jamais vu la mer, non plus, d'ailleurs, que son émule. En cela, ils marchaient l'un et l'autre sur les traces de Léonard Euler, qui, habitant Bâle depuis sa naissance, soumit à l'Académie des Sciences un travail sur la mâture des vaisseaux, et ne fut vaincu, nous dit Condorcet, que par Bouguer, depuis dix ans professeur d'hydrographie dans une ville maritime, et beaucoup plus âgé, sans être vieux, loin de là.

L'Académie jugea sans doute que le sujet n'était pas épuisé, car elle proposa la même question pour le concours de 1765. Les deux Mémoires couronnés en 1761 avaient peut-être paru trop théoriques et trop peu à la portée des navigateurs. Le certain, c'est que Bossut soumit au jugement de l'Académie un nouveau travail intitulé : *Traité de l'arrimage des vaisseaux*. L'épigraphe de ce Mémoire est : *Pondere tuta suo est navis jactata per undas*. Là, il n'est plus un pur théoricien, il donne aux marins des conseils très explicites dont ils pouvaient facilement apprécier la valeur après les avoir mis en pratique. Il conclut même en citant les devis de l'*Altier* et du *Fantasque*, vaisseaux de 64 canons chacun, appartenant au Roi, et il y joint les observations de leurs capitaines sur la façon dont ces navires s'étaient comportés dans diverses campagnes.

Le prix double de 1765 fut partagé entre Bossut et MM. Bourdé de Villehuet, Gauthier et Grognard. Ceux-ci étaient marins de profession et, par suite, mieux préparés que Bossut à traiter la question au point de vue pratique. Leur concurrent ne put faire usage que de renseignements fournis par des personnes bienveillantes, parmi lesquelles il faut compter sans doute les constructeurs et les capitaines de l'*Altier* et du *Fantasque*.

C'est peut-être ici le lieu de rappeler, qu'après la triste paix de

1763, notre marine était littéralement anéantie et qu'il ne fallut pas un très grand nombre d'années pour qu'elle renaquît plus brillante que jamais. A ce grand succès national, l'Académie contribua, on le voit, dans la mesure de ses moyens. Du reste, d'un bout à l'autre du dix-huitième siècle, l'art de la navigation a reçu en France tous les encouragements qu'il pouvait souhaiter, et ses différentes parties, construction des vaisseaux, manœuvre, pilotage, ont fait les plus grands progrès. Que de noms il serait facile de citer! noms qu'il serait déplorable de voir oubliés.

Au concours de l'an 1762, Bossut obtint encore le prix pour un Mémoire intitulé : *Recherches sur les altérations que la résistance de l'éther peut produire dans le mouvement moyen des planètes.* A cette époque, l'imperfection de l'Analyse ne permettait pas de résoudre en toute rigueur les problèmes concernant les mouvements des planètes et l'on était obligé de changer un peu, après un certain temps, le lieu moyen de celles-ci pour faire cadrer parfaitement les observations avec les Tables construites d'après la théorie newtonienne; on doutait s'il fallait attribuer ces légères altérations du mouvement moyen aux petites quantités négligées dans le calcul, ou s'il ne faudrait pas en rejeter une partie sur la résistance d'un milieu dans lequel nageraient les planètes. Pour éclaircir ces doutes, l'Académie demanda « *si les planètes se meuvent dans un milieu dont la résistance produise quelque effet sensible sur le mouvement* ».

Le travail de Bossut est divisé en trois parties, dont voici les titres : I. *Détermination de l'orbite des planètes principales et des comètes dans un milieu peu résistant.* — II. *Détermination du mouvement des satellites dans un milieu peu résistant.* — III. *Application des formules précédentes aux observations.*

Le Mémoire, nous l'avons dit, fut couronné, et Bossut nous apprend que : « On trouva que j'avais expliqué d'une manière plausible, par la résistance d'un fluide très délié, répandu dans les espaces célestes, les petites altérations que l'on observe dans les moyens mouvements des planètes et dont la théorie de la gravitation universelle n'avait pu encore alors rendre raison. Depuis ce temps-là, on a reconnu, en poussant plus loin les approximations des formules analytiques du mouvement des planètes, fondées sur le principe de la gravitation, on a reconnu, dis-je, que ces formules

suffisaient pour expliquer tous les mouvements des planètes [1]. On n'a donc plus besoin de recourir aujourd'hui à la supposition d'une matière éthérée, un peu résistante, pour suppléer aux solutions qu'on avait données de ces problèmes par la seule attraction. Mais je prie les lecteurs qui voudront apprécier équitablement mes recherches, de se reporter au temps où elles ont paru et de considérer qu'elles peuvent au moins servir aujourd'hui à l'histoire des progrès de la Physique céleste. Je puis même ajouter que les formules analytiques tirées du principe de la gravitation universelle n'étant encore que des approximations, laissent la liberté de penser que la matière éthérée oppose aux planètes une résistance qui, quoique d'un ordre inférieur aux plus petites forces attractives, peut néanmoins, en s'accumulant pendant une longue suite de siècles, se faire à la fin remarquer. »

Voici la conclusion du Mémoire de Bossut :

« Il résulte, des recherches précédentes, une espèce de supplément au système de la gravitation universelle. L'accélération du mouvement moyen de la Lune, jusqu'ici *inexpliquée* par l'attraction, paraît être l'effet de la résistance de l'éther : les autres inégalités de la Lune, inexplicables par les tourbillons cartésiens et par la résistance de l'éther, sont produites par l'attraction. L'accélération du mouvement moyen de la Terre, qui est une suite de celle du mouvement moyen de la Lune, semble être indiquée par les observations. L'action de l'éther sur les mouvements de Jupiter et de Saturne ne peut devenir sensible qu'après une longue suite de siècles. Si donc les altérations des moyens mouvements de ces deux planètes sont telles que quelques astronomes le prétendent, elles sont produites par l'attraction. M. d'Alembert propose, dans ses *Recherches sur le Système du Monde* (t. II, p. 294), une idée très ingénieuse pour expliquer la retardation du mouvement moyen de Saturne. Concluons donc que les astronomes ne sauraient déterminer avec trop de soin, par les observations, les altérations des mouvements moyens, et que les géomètres ne sauraient faire trop d'efforts pour séparer, dans ces altérations, la partie qui dépend de l'attraction d'avec la partie qui dépend de la résistance

---

[1] C'est à Laplace que cela est dû. *Voir* la *Mécanique céleste*, t. V, p. 400.

de l'éther, et pour assigner à chacune de ces causes, l'effet réel qu'elle produit. »

(*A suivre.*)

## CÉLÉBRATION DU TROISIÈME CENTENAIRE DE J. NAPIER, A ÉDIMBOURG, EN JUILLET 1914.

La *Logarithmorum Canonis Mirifici Descriptio* de John Napier a été publiée en 1614. Le troisième Centenaire de cet événement si important dans l'Histoire des Mathématiques va être célébré dans un Congrès qui s'ouvrira à Edimbourg, le vendredi 24 juillet 1914, et continuera les jours suivants.

Ce Congrès sera tenu sous les auspices de la Société Royale d'Édimbourg. Sur l'invitation de cette Société, un Comité général s'est constitué, représentant la Société Royale de Londres, la Société Royale astronomique, la Municipalité d'Édimbourg, la Faculté des Actuaires, la Société Royale philosophique de Glasgow, les Universités de Saint-Andrews, Glasgow, Aberdeen et Édimbourg, le Collège d'Université de Dundee, et maints autres corps savants ou établissements d'instruction.

Le Président et le Conseil de la Société Royale d'Édimbourg prient les mathématiciens et toutes les autres personnes intéressées de vouloir bien se regarder comme invités à prendre part au Congrès projeté.

La séance d'ouverture, le vendredi 24 juillet, sera marquée par un Discours de Lord Moulton, F. R. S., LL. D. (Édim.), etc.; elle sera suivie d'une Réception offerte par le Très-Honorable Lord Prévôt, les Magistrats et le Conseil de la cité d'Édimbourg.

Le samedi et le lundi qui suivront, le Congrès discutera l'influence des découvertes et inventions de Napier sur la pratique passée et présente du calcul, ainsi que les divers sujets connexes à ces découvertes et inventions. Le dimanche, un Service commémoratif sera célébré dans la Cathédrale Saint-Gilles.

Parmi les nombreux savants qui ont déjà témoigné de leur intérêt pour le troisième Centenaire de Napier, et qui prendront

part au Congrès, on peut citer : les Professeurs H. Andoyer, de Paris; J. Bauschinger, de Strasbourg; Hume Brown, Historiographe Royal pour l'Écosse; les Professeurs F. Cajori, de Colorado (États-Unis); G.-A. Gibson, de Glasgow; le Dr J.-W.-L. Glaisher, de Cambridge; les Professeurs Lang, de Saint-Andrews; Macdonald, d'Aberdeen; E. Pascal, de Naples; Karl Pearson, de Londres; Eugène Smith, de New York; Steggall, de Dundee; Whittaker, d'Édimbourg.

Le Château de Merchiston, résidence de Napier, est depuis longtemps occupé par une École publique bien connue, qui attire des élèves de toutes les parties de l'Empire britannique. Les Directeurs de l'École ont aimablement invité les membres du Congrès à visiter le Château et ses dépendances, le samedi dans l'après-midi.

Des souvenirs de Napier, rassemblés par Lord Napier et Ettrick et par d'autres représentants de la Famille, y seront visibles; et l'on compte aussi organiser une exposition de Tables numériques et de Machines à calculer, puisque tels sont les fruits naturels de l'immense progrès réalisé par Napier.

Un Volume sera publié contenant les discours prononcés au Congrès, les lectures qui y seront faites ainsi que divers documents historiques et scientifiques. Les personnes, Sociétés, Universités, bibliothèques, etc., qui se seront fait inscrire comme membres fondateurs, moyennant une souscription minima de £ 2, recevront gratuitement ce Volume, qu'il convient de rendre digne de la mémoire de Napier. La souscription pour les membres ordinaires est de 5 shillings. Les souscripteurs ordinaires qui assisteront au Congrès le recevront à prix réduit.

Les souscriptions et donations doivent être envoyées au Trésorier honoraire, M. Adam Tait, Banque Royale d'Écosse, Saint-Andrew Square, Édimbourg.

Toutes les communications intéressant le Congrès doivent être adressées à M. le Dr C.-G. Knott, Secrétaire général de la Société Royale d'Édimbourg, 22, George Street; et c'est à M. Knott aussi que les personnes qui désirent assister au Congrès doivent annoncer leur intention.

# BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

---

Elliott (E.-B.). — *An Introduction to algebra of quantics.* 2e édit. In-8, 432 p. London, Milford. 15 s.

*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées.* Publiée sous les auspices des Académies des sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne, avec la collaboration de nombreux savants. Édition française. Rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de *Jules Molk.* Tome II (6e vol.) : *Calcul des variations.* 1er fasc. In-8, 128 p. Leipzig, B.-G. Teubner; Paris, Gauthier-Villars. 5 fr. 60.

Hilbert (D.). — *Théorie des Corps de Nombres algébriques*, trad. de *Lévy* et *Got*, préf. de *G. Humbert.* XVI-38 p. Paris, Hermann et fils. 25 fr.

Knoblauch (Johs.). — *Grundlagen der Differentialgeometrie.* Gr. in-8, X-634 p. avec figures. Leipzig, B.-G. Teubner. 18 M.; relié, 20 M.

Mitzscherling (Arth.). — *Das Problem der Kreisteilung.* Ein Beitrag zur Geschichte seiner Entwicklg. Mit e. Vorwort v. *Heinr. Liebmann.* Gr. in-8, VI-214 p. avec 210 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 7 M.; relié, 8 M. 40.

Vogt (H.). — *Solutions des exercices de Mathématiques supérieures* In-8, fig. Paris, H. Vuibert. 6 fr.

Chwolson (O.-D.). — *Traité de Physique*, traduction par *Davaux.* T. IV, fasc. 2 : Champ magnétique constant. In-8, 732 p. avec 284 fig. Paris, Hermann et fils. 22 fr.

Southall (J.-P.-C.). — *The principles and methods of geometrical Optics.* New edit. London, Macmillan. 25 s.

Boutroux (P.). — *Principes de l'Analyse mathématique.* 1 vol. in-8. Paris, A. Hermann et fils. 12 fr.

Cahen (E.). — *Théorie des Nombres.* 1er vol. in-8, 420 p. Paris, A. Hermann et fils. 14 fr.

Cremona (L.). — *Opere mathematiche.* Tomo I. VIII-497 p. Milano, U. Hoepli. 25 L.

D'Arcais (F.). — *Analisi infinitesimale.* Vol. II (fine). In-8, IX-941 p. Padova, A. Draghi. L'ouvrage complet : 30 L.

*Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften.* Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. 88 Bd. ($30^{cm},5 \times 24^{cm}$). v-860 p. avec 151 fig., 39 planches, 3 Cartes et 29 feuillets d'explications. Wien, A. Hölder. Relié, 68 M.

Grünert (Art.). — *Tafeln zur Berechnung der Koordinaten v. Polygon- u. Kleinpunkten.* In-8, vii-181 p. avec une Table. Stuttgart, K. Wittwer. Relié, 8 M. 50.

Haag (J.). — *Cours complet de Mathématiques spéciales*, avec 3 vol. d'exercices. Tome I : *Algèbre et Analyse.* In-8, 402 p. avec 44 fig. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr.

Hadamard (Jacques). — *Sur la méthode en Géométrie.* Notes extraites des Leçons de Géométrie plane. 1 vol. 40 p. Paris, A. Colin. 1 fr. 50.

Hegemann (E.). — *Lehrbuch der Landesvermessung.* 2. Tl. Gr. in-8, viii-306 p. avec 77 fig. Berlin, P. Parey. Relié, 13 M.

*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, begründet v. *Karl Orthmann* u. *Fel. Müller.* Hrsg. v. *Emil Lampe.* 42. Bd. Jahrg. 1911. 1. Heft. gr. in-8, vi-496 p. Berlin, G. Reimer. 19 M.

Mellor (Jos.-W.). — *Higher Mathematics for strudents of chemistry and physics, with special reference to practical work.* 4th ed. enl. xxi-641 p., diagr., Tables. New-York, Longmans. 4 d. 50.

Nernst (W.) u. Schoenflies (A.). — *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, Kurzverfasstes Lehrbuch der Differential- u. Integralrechng. m. besond. Berücksicht. der Chemie.* 7. verm. u. verb. Aufl. gr. in-8, xii-444 p. avec 85 fig. München, R. Oldenbourg. Relié, 10 M.

Scheffers (Geo.). — *Anwendung der Differential- u. Integralrechnung auf Geometrie.* Band II : *Einführung in die Theorie der Flächen.* 2e édition augmentée. Gr. in-8, xi-582 p, avec 110 fig. Leipzig, Veit et Co. 15 M.; relié, 16 M.

Schoenflies (Art.). — *Entwickelung der Mengenlehre u. ihrer Anwendungen.* Umarbeitung des im 8. Bde. der Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigg. erstatteten Berichts. Gemeinsam m. *Hans Hahn* hrsg. 1. Hälfte. Allgemeine Theorie der unendl. Mengen u. Theorie der Punktmengen v. *Schoenflies.* In-8, xi-389 p. avec 8 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 16 m.; relié, 18 M.

*Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft.* Hrsg. vom Vorstande der Gesellschaft. 12. Jahrg. In-8, iii-118 p. avec figures et portraits. Leipzig, B.-G. Teubner. 3 M. 60.

1re Partie.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DIENES (PAUL). — LEÇONS SUR LES SINGULARITÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES, *professées à l'Université de Budapest* (*Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions*, publiée sous la direction de M. ÉMILE BOREL). 1 vol. gr. in-8°, VIII-172 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Cette Monographie est consacrée à l'étude du problème suivant : *Une branche de fonction analytique holomorphe à l'origine, étant donnée par sa série de Mac-Laurin, déterminer les points singuliers de cette fonction $f(x)$ dans tout le plan, et son allure dans leur voisinage.*

Pour représenter $f$, soit dans son cercle de convergence, soit en dehors de lui, M. Dienes emploie des polynomes ou des fonctions entières $P_n(x)$ tendant vers $f(x)$ dans leurs régions de convergence uniforme, dont la réunion forme des domaines D à l'intérieur desquels $f$ est holomorphe. Les méthodes de M. Borel permettent déjà de sortir du cercle de convergence. Celles de M. Mittag-Leffler nous donnent $f$ à l'intérieur de son étoile rectiligne centrée à l'origine. Celles de M. Painlevé fournissent $f$ à l'intérieur d'étoiles curvilignes dont la forme est presque absolument arbitraire ; elles peuvent amener à la frontière du domaine D tout point critique accessible par un chemin de longueur finie. La question de rechercher les singularités est donc théoriquement résolue.

Examinant successivement les développements $P_n$ précédents, M. Dienes précise de la façon suivante l'étude de l'aspect de $f$ au voisinage de la singularité. Il recherche si les propriétés limites de la suite $P_n(x_0)$, calculée en un point $x_0$ frontière de D, peuvent révéler, soit la continuité de $f$ en $x_0$ en choisissant convenablement $f(x_0)$, soit l'existence d'une borne au module de $f$, soit la partie principale de $f$ supposée de forme algébrico-logarithmique en venant de l'intérieur de D

$$f = \frac{P\left(\log \frac{1}{x - x_0}\right)}{(x - x)^{\rho}} + f_1,$$

P étant un polynome et $f_1$ une fonction infiniment petite par rapport à $\frac{1}{(x-x_0)^{\rho_1}}$ $(\rho_1 < \rho)$.

Les résultats successifs obtenus par M. Dienes pour les diverses espèces de $P_n$ considérées présentent des caractères communs. Une hypothèse sur les $P_n$ entraînera habituellement une conséquence parallèle touchant l'allure de $f$ si $x$ tend vers $x_0$ suivant une direction fixe ou variable, mais faisant avec une certaine droite un angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$ (voisinage angulaire de $x_0$). Au contraire, pour qu'une hypothèse sur la nature de $f$ entraîne une conséquence pour les $P_n$, il faudra que la propriété admise soit vraie dans un voisinage de $x_0$ possédant en $x_0$ une courbure finie (voisinage circulaire de $x_0$).

Enfin si, dans le cas où D est le cercle de convergence ou encore le polygone de sommabilité de M. Borel, tout point frontière (sauf dans le dernier cas, les sommets anguleux) est intéressé par les théories de M. Dienes; au contraire, lorsque D est une étoile, seuls ses sommets, c'est-à-dire les points irréguliers extrémités de rayons issus de l'origine, rayons rectilignes (M. Mittag-Leffler) ou curvilignes (M. Painlevé), et sur lesquels $f$ est holomorphe, seuls lesdits sommets seront concernés par les résultats de l'Ouvrage. Le premier Chapitre est consacré aux notions essentielles mises en lumière par M. Hadamard dans ses recherches sur la série de Taylor. Le domaine D considéré plus haut est ici le cercle de convergence et les $P_n$ sont tout simplement les polynomes $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

M. Dienes rappelle d'abord la définition des fonctions continues à écart fini, celle de l'écart de la fonction dans un intervalle et la notion d'ordre d'une série de Taylor sur son cercle de convergence, ou sur un arc, ou pour un point particulier de cette circonférence, quand la fonction est irrégulière en l'un ou l'autre de ces derniers éléments. Il faut pour cela avoir observé avec M. Hadamard que la substitution de certains nombres $c_n a_n$ aux coefficients de la série modifie uniformément l'ordre de grandeur de ceux-ci pour le diminuer ou pour l'accroître, mais ne change aucunement la position des singularités [1] de la fonction dans

[1] Cependant l'origine est en général un point singulier de $\varphi$, même si toutes les branches de $f$ y sont régulières.

tout le plan. Les $c_n$ sont de la forme

$$c_n = \int_0^1 v(t) t^n \, dt,$$

et la nouvelle fonction est

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x v\left(\frac{z}{x}\right) f(z) \, dz.$$

En prenant

$$v(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-t)^{1-\alpha}} \quad (\alpha > 0), \qquad \text{ou} \qquad v(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{t} \left(\mathrm{L} \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1},$$

on obtient des fonctions $\mathrm{R}^\alpha(x)$, $\mathrm{H}^\alpha(x)$ en relations avec les dérivées généralisées de Riemann. Pour la seconde fonction $v(t)$, $c_n$ a la valeur remarquablement simple $\frac{1}{n^\alpha}$.

Par définition, l'ordre de $f$ sur le cercle de convergence C, c'est le nombre $\Omega$ séparant les nombres $\omega'$ pour lesquels $\mathrm{H}^{\omega'}$ est continue et à écart fini, des nombres $\omega''$ pour lesquels $\mathrm{H}^{\omega''}$ ne satisfait pas à cette condition. On définit pareillement un ordre de $f$ sur un arc quelconque du cercle de convergence. L'ordre en un point du cercle est la borne inférieure des ordres sur tous les arcs renfermant ce point. On voit sans peine que la condition nécessaire et suffisante de la nullité de l'ordre sur C s'écrit

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log |a_n|}{\log n} = -1.$$

Donc, l'ordre $\Omega$ sur le cercle est égal à $1 + \limsup_{n=\infty} \frac{\log |a_n|}{\log n}$.

Pour étudier $f$ sur un arc $ab$, on décompose $f$ par application de l'intégrale de Cauchy en une somme $f_1 + f_2$, $f_1$ et $f_2$ étant l'une et l'autre holomorphe dans le cercle de convergence C et respectivement aux points intérieurs à chacun des arcs de C terminés en $ab$. (On peut même voir que chacun de ces arcs constitue une coupure réelle ou artificielle hors de laquelle respectivement, $f_1$ ou $f_2$ sont partout holomorphes. En $a$ et $b$ leurs ordres sont au plus égaux à ceux de $f$.)

Plaçons-nous maintenant au point de vue de la croissance. On a le remarquable théorème suivant : Si, sur l'arc de cercle $ab$ de rayon un, $f$ est d'un ordre inférieur au nombre positif $\omega_1$, $(1-|z|)^{\omega_1} f(z)$ tend vers zéro avec la distance de $z$ à $ab$, $z$ res-

tant intérieur à l'angle au centre interceptant $ab$. Il en est de même du produit de $(1-|z|)^{\omega_1}$ par l'écart de $f$ sur l'arc de rayon $|z|$ compris dans le même angle au centre que $ab$.

Inversement, tout nombre $\omega_1$ possédant ces deux propriétés est au moins égal à l'ordre de $f$ sur $ab$, qui se trouve parfaitement déterminé par là s'il est positif. Une première conséquence de ce théorème est la suivante : l'ordre de $f\Phi$ sur $ab$ est égal à celui de $f$ si $\Phi$ est holomorphe et non nul sur $ab$ (même si l'ordre de $f$ est négatif ou nul).

Précisons la notion de croissance au voisinage de C. $\Omega$ étant l'ordre supposé positif de $f$ sur C, et $\varepsilon_n$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, il existe, avons-nous vu, pour tout entier $n$, un point $z_n$ intérieur au cercle de convergence et aussi voisin qu'on veut de sa circonférence, où l'on a

$$(1-|z_n|)^{\Omega-\varepsilon_n}|f(z_n)|>1.$$

Les $z_n$ ont au moins un certain point limite $\zeta$. En joignant par une ligne brisée une suite de $z_n$ tendant vers $\zeta$, on aura un chemin intérieur à C et sur lequel l'ordre de croissance de $f$ en $\frac{1}{1-|z|}$ est au moins $\Omega$, en ce sens que $f$ surpasse en une infinité de points tendant vers $\zeta$ toute puissance de ce nombre inférieure à $\Omega$. Or, il est curieux de constater que fréquemment ce chemin touchera nécessairement le cercle C en $\zeta$. Autrement dit, si l'on se borne aux chemins aboutissant à un point quelconque de C et s'y écartant de C d'un angle fini, il pourra se faire que l'ordre d'infinitude de $f$ sur ces chemins soit partout inférieur à un nombre fixe moindre que $\Omega$. M. Dienes donne des exemples de ce fait, et prouve l'influence prépondérante des arguments des coefficients $a_n$, en signalant un cas de cette sorte où les modules de tous les $a_n$ sont égaux à un. Il montre encore que, si les extrémités des arcs $\alpha_n$ sont répartis uniformément sur le cercle trigonométrique, la fonction

$$f(x)=e^{i\alpha_n}x^n$$

est infiniment petite relativement à $\frac{1}{1-x}$, pour tous les chemins tangents ou non à C aboutisssant au point 1.

Avec le Chapitre II, nous abordons les problèmes faisant le

véritable objet de l'Ouvrage. Les pages précédentes étaient en somme consacrées à l'examen des relations entre la croissance des $a_n x_0^n$ ($x_0$ étant sur C) et celle de la fonction et de ses dérivées au voisinage du cercle C (dont le rayon sera toujours supposé égal à un). Maintenant nous considérons les sommes

$$P_m = a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_m x_0^m,$$

leur croissance et leurs conditions de convergence, $x_0$ étant sur C.

Si la série $|a_m|$ est convergente, $P_m$ converge uniformément à l'intérieur de C et sur C. Dans cet ensemble total, la limite de $P_m$ est une fonction continue, qui, sans être nécessairement analytique au point $x_0$ de C, cas où elle ne prolonge donc pas $f$, y est cependant désignée par $f(x_0)$.

Mais supposons que $a_m$ soit simplement assujetti à tendre vers zéro. Ceci suffit à entraîner la convergence de $P_m$ vers $f(x_0)$ en tout point de C où $f$ est holomorphe (M. Fatou). Il en est même ainsi pourvu que $f(x)$ soit continue et à variation bornée sur un arc de C entourant $x_0$. Mais il ne suffit pas, même avec $\lim a_m = 0$, pour que $P_m$ converge, que $f(x)$ soit déterminé en $x_0$, auquel cas, d'après le théorème connu d'Abel, la limite de $P_m(x_0)$ serait d'ailleurs nécessairement $f(x_0)$. *A fortiori*, le théorème d'Abel n'a pas de réciproque.

Prenons maintenant pour $P_m$ non plus la somme

$$s_m = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

mais la moyenne arithmétique $\sigma_m$ de $s_0, s_1, \ldots, s_m$. Alors il est exact que l'existence de $f(x_0)$ entraîne la convergence de $P_m(x_0)$ avec $x_0$ pour limite. On peut même observer que $P_m(x_0)$ tend certainement vers $\frac{A+B}{2}$ si, dans les deux voisinages distincts de $x_0$ compris entre le cercle C et un cercle intérieur et tangent en $x_0$ à C, $f(x)$ a respectivement les deux limites A et B. Donc, si $\sigma_m(x_0)$ ne tend pas vers une limite pour $m$ infini, $f(x)$ n'a pas davantage une limite unique, $x$ tendant arbitrairement vers $x_0$ à l'intérieur du cercle de convergence. Mais si $\sigma_m(x_0)$ est borné, on montre qu'il en est de même de $f(x)$ dans le voisinage angulaire de $x_0$. Pareillement, si $f$ est borné au voisinage intégral de $x_0$ (à l'intérieur de C), $\sigma_m(x_0)$ est borné.

Enfin, si $\sigma_m(x_0)$ tend vers l'infini, son expression en fonction de $m$ est déterminée à un facteur près tendant vers un, connaissant la partie principale de

$$f = \frac{P\left(\log \frac{1}{r - x_0}\right)}{(x - x_0)^\rho} + f_1,$$

$f_1$ étant d'un ordre inférieur à $\rho$ en $x - x_0$. ($\rho$ est nécessairement inférieur à un, $a_m$ tendant vers zéro.)

Renonçons maintenant à l'hypothèse

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0,$$

mais supposons que l'ordre de grandeur des coefficients $a_n$ soit fini. La nouvelle hypothèse est celle de l'existence d'un nombre positif $r$ tel que

$$\lim \frac{a_n}{n^r} = 0.$$

On prend alors pour $P_n(x_0)$ la moyenne arithmétique d'ordre $r$ (entier ou non) des $s_n(x_0)$. Ce nombre $\sigma_n^{(r)}(x_0)$ se définit par l'identité [1]

$$\frac{\Gamma(r+1)}{(1-x)^{r+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n x^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} n^r s_n^{(r)}(x_0) x^n.$$

Et l'on aura pour $\sigma_n^{(r)}(x_0)$ les théorème énoncés pour $s_n(x_0)$ dans le premier cas, savoir : en tout point du cercle de convergence où $f(x)$ a une valeur limite déterminée, $\sigma_{(n)}^{(r)}(x^0)$ est convergent et a pour limite $f(x_0)$. Si $f(x)$ est dans C borné au voisinage intégral de $x_0$, $\sigma_n^{(r)}(x_0)$ est borné. Si $\sigma_n^{(r)}(x_0)$ est borné, $f(x)$ est borné dans le voisinage angulaire de $x_0$. Enfin si l'on sait que

$$f(x) = \frac{P\left(\frac{1}{x - x_0}\right)}{(x - x_0)^\rho} + f_1,$$

$f_1$ étant en $x_0$, dans C, d'un ordre inférieur à $\rho$, on a

$$s_n^{(r-\rho)}(x_0) = k A n^\rho \log^q n (1 + \varepsilon_n),$$

---

[1] Cette somme d'ordre $r$ n'a pas le même sens pour $r$ entier que celle de Cesàro. Mais elle possède une limite simultanément avec cette dernière.

A et $q$ étant respectivement le premier coefficient et le degré de P, $k$ une constante numérique dépendant seulement de $\rho$ et de $r$, et $\varepsilon_n$ tendant vers zéro. Inversement, la formule précédente entraîne la conséquence

$$\lim \frac{f(x)(x-x_0)^\rho}{A \log^q \frac{1}{x-x_0}} = 1,$$

$x$ tendant vers $x_0$ dans son voisinage angulaire.

Revenant aux $s_n(x_0)$ et sans rien supposer sur l'ordre des $a_n$, M. Dienes se demande si l'allure de la suite formée par ces nombres permet d'obtenir quelques renseignements sur $f(x_0)$, près de $x_0$. Même si les modules de ces nombres tendent très régulièrement vers l'infini, il peut se faire que $f(x)$ soit holomorphe en $x_0$. Il est donc nécessaire de faire intervenir les arguments des $s_n$. M. Dienes montre que, si certains $s_n$ correspondant à des arguments situés dans un angle inférieur à $\pi$ sont infiniment grands par rapport à $n^{k+\frac{1}{2}}$, les $s_n$ d'argument extérieurs à cet angle étant d'ordre inférieur à $k$, $f(x)$ est en $x_0$ infiniment grand par rapport à $\frac{1}{(x-x_0)^k}$.

Dans le Chapitre III, l'Auteur s'affranchit de toute hypothèse limitant la croissance des coefficients $a_n$ (dont la racine $n^{\text{ième}}$ est cependant bornée, pour que le rayon de convergence ne soit pas nul). Les moyennes arithmétiques des $s_n(x_0)$ pour un ordre quelconque ne pourront pas avoir de limite, si l'ordre de $a_n$ n'est pas fini. Ici intervient la sommation exponentielle de M. Borel, qui présente cette nouveauté à l'égard des méthodes précédentes de s'appliquer hors du cercle de convergence quand ce dernier n'est pas une coupure.

On sait que, au sens de M. Borel, la somme exponentielle de la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

c'est la valeur, quand elle existe, de l'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da,$$

$u(a)$ étant la fonction

$$\sum_0^\infty u_n \frac{a^n}{n!},$$

laquelle est entière si la série $u_n a^n$ a un rayon de convergence non nul. M. Borel a montré que cette intégrale est la limite, quand cette dernière existe, de l'expression

$$e^{-a} \sum_0^\infty s_n \frac{a^n}{n!}$$

pour $a$ infini, $s_n$ étant égal à $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. $B(a)$ est appelé moyenne exponentielle des $s_n$. Pour être assuré que l'intégrale précédente existe et reste invariable quand on modifie l'ordre d'un nombre limité de termes de la série $u_n$, il est intéressant de considérer la sommabilité absolue (B) de $u_n$; c'est la condition que toutes les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a} \left| \frac{d^\lambda u(a)}{da^\lambda} \right| da$$

existent. On a alors, concernant la série de Taylor, le résultat fondamental suivant : si la série $a_n x^n$ est absolument sommable (B) pour $x = x_0$, elle est absolument sommable (B) sur le rayon $Ox_0$. De plus, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit absolument sommable (B) en tous les points intérieurs au segment $Ox_0$ est que $f(x)$ ne possède aucun point singulier intérieur au cercle décrit sur $Ox_0$ comme diamètre. Ceci nous donne la construction du domaine D à l'intérieur duquel la série $a_n x^n$ est absolument sommable (B). Par chaque point singulier, menons la perpendiculaire au rayon aboutissant en ce point. L'ensemble des points accessibles à partir de l'origine, sans rencontrer aucune de ces droites, forme le domaine cherché, appelé *polygone de sommabilité*.

Les fonctions $P_n(x_0)$ du début dépendent ici d'un paramètre continu $a$. On a

$$P(a, x_0) = \int_0^a e^{-a} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_n x_0^n a^n}{n!}.$$

Que se passe-t-il quand $x_0$ est pris sur le contour du polygone D (sommets exclus)? Alors la limite de P existe et est égale à $f(x_0)$ si $f(x)$ est déterminé sur un arc fini entourant $x_0$ sur le contour C de D et si, nécessairement continue dans cet arc, elle y est à variation bornée. Si l'on veut considérer $f(x)$ exclusivement au

voisinage de $x_0$ (et à l'intérieur de D), alors il faut considérer la moyenne exponentielle non plus des $s_n(x_0)$, mais des $s_n^{(1)}(x_0)$ (moyenne arithmétique des $s_0, s_1, \ldots, s_n$), soit la fonction

$$B^{(1)}(a, x_0) = e^{-a} \sum_0^\infty s_n^{(1)}(x_0) \frac{a^n}{n!}.$$

On trouve que, si $f(x_0)$ existe, il en est de même de $\lim B^{(1)}_{(a, x_0)}$, qui tend vers $f(x_0)$. Si $f(x)$ est bornée au voisinage intégral de $x_0$ (dans D), $B^{(1)}_{(a, x_0)}$ est borné. Enfin, un point critique d'apparence algébrico-logarithmique, quand il est abordé par l'intérieur du polygone de sommabilité, donne à $B(x_0, a)$ et non pas seulement à $B^{(1)}$ une partie principale déterminée avec une erreur relative infiniment petite.

En généralisant la notion de moyenne exponentielle, par la substitution à la fonction sommatrice $e^a$ de la fonction $e^{a^r}$, M. Borel, donnant à $r$ des valeurs entières indéfiniment croissantes, obtient les valeurs de $f$ en certaines régions extérieures au polygone de sommabilité. Aux points frontières de ces régions, l'examen des fonctions correspondantes $P_r(a, x_0)$ conduit à des résultats analogues dans leur forme aux précédents.

Le Chapitre IV est consacré au développements de M. Mittag-Leffler valables dans l'étoile rectiligne de la fonction rayonnant depuis l'origine. La sommation utilisée généralise celle de M. Borel en remplaçant $e^a$ par d'autres fonctions entières $E(a)$ à coefficients positifs et infiniment petites avec $\frac{1}{a}$ uniformément dans tout angle de sommet zéro et auquel l'axe réel positif est extérieur. On a

$$P(x, a) = \frac{\sum_0^\infty s_n(x) c_{n+1} a^{n+1}}{\sum_0^\infty c_n a^{n+1}},$$

le dénominateur étant la fonction $E(a)$ (avec $c_0 = 1$). La question : « Connaissant l'allure des nombres $P(x_0, a)$ pour les valeurs infiniment grandes de $a$, en déduire l'allure de $f(x)$, $x$ tendant vers $x_0$, *quand $x_0$ est un sommet de l'étoile* », ne comporte pas de réponse générale. Si pour $a$ infini, $P(x_0)$ tend vers une limite ou

est bornée, il n'est pas démontré que, dans un certain voisinage de $x_0$, $f(x)$ tende vers cette même limite ou soit bornée. Des oscillations finies ou infiniment grandes de $f$ dans ce voisinage ne sont nullement incompatibles avec les hypothèses faites sur P ni avec les résultats obtenus du point de vue inverse.

Si l'on suppose en effet connue l'allure de $f$, on peut en conclure celle des P. Par exemple, si dans un secteur circulaire, limité par un arc de cercle centré à l'origine, passant en $x_0$ et par les deux rayons aboutissant à ses extrémités, $f$ ne possède pas de point singulier, et si $f$ tend vers une valeur déterminée au point $x_0$, soit $f(x_0)$, ce nombre est la limite unique de $P(a, x_0)$. Si, $x$ variant dans le secteur, $f$ est bornée au voisinage de $x_0$, P admet pour $a$ infini, la même plus grande limite que $f$ pour $x = x_0$. Enfin, si l'on suppose à $f$ une singularité de forme algébrico-logarithmique en $x_0$ et pour l'abord intérieur au secteur, $P(a, x_0)$ est calculable *a priori* avec une erreur infiniment petite avec $\frac{1}{a}$, du moins, si l'on choisit pour $E(a)$ certaine fonction de M. Lindelöf,

$$E(a) = \sum_0^\infty \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}.$$

Dans le Chapitre V, M. Dienes a recours à un mode de développement en série de polynomes reposant sur un principe différent du précédent. Les fonctions $P(a, x)$ ne sont plus des fonctions entières du paramètre $a$. On se donne une suite de contours $C^\alpha$ contenant à leur intérieur le segment 01 et tendant vers lui quand $\alpha$ prend une certaine suite de valeurs tendant vers zéro. A chacun de ces contours correspond une fonction génératrice d'un développement polynomal de $f(x)$ valable dans un domaine $D^\alpha$ qui, pour $\alpha$ infiniment petit, tend vers l'étoile rectiligne de $f$. La fonction génératrice se calcule au moyen de la transformation conforme appliquant $C^\alpha$ sur un cercle de centre 0, les points 0 et 1 restant invariants. Mais l'avantage de cette méthode est de s'étendre sans grands changements au cas où le segment 01 est remplacé par un chemin quelconque analytique $l$ de mêmes extrémités. Si les contours $C^\alpha$ contiennent $l$ à leur intérieur et tendent vers $l$, $\alpha$ étant infiniment petit, le domaine de convergence limite des $D^\alpha$ sera constitué par l'ensemble des points $x$ extrémités d'un chemin

$lx$, produit de $l$ par $x$, c'est-à-dire déduit de $l$ par homothétie de puissance $|x|$ et rotation égale à $\arg x$, le tout avec l'origine pour centre. Ces points forment un domaine D tel que, dans toute région fermée intérieure à D, la convergence est uniforme. Ce résultat est dû à M. Painlevé et M. Dienes remarque sa validité même, si les $C^\alpha$ passent au point $l$ en y remplissant certaine condition, et même si $l$ n'est pas un contour simple, pourvu que les coordonnées d'un point de $l$ puissent s'exprimer en fonctions analytiques uniforme d'une variable $t$ parcourant le segment 01. Donc, on peut inversement, étant donné d'avance un point singulier connu de $f(x)$, soit $x_0$, et un chemin L menant de o à $x_0$ et le long duquel $f$ est holomorphe, en prenant pour $l$ le produit de L par $\frac{1}{x_0}$, on peut théoriquement calculer un polynome

$$P_n(x, \alpha) = \sum_1^n G_n(x, \alpha)$$

tendant vers $f(x)$ en tout point $x$ extrémité d'un chemin $L\frac{x}{x_0}$, le long duquel $f$ est holomorphe. D contient toujours les points de L situés dans le voisinage de $x_0$, mais ne contient évidemment pas en général la totalité de L, surtout si L a des points doubles puisque $P_n$ est uniforme en $x$.

Comment l'allure des $P_n$ en $x_0$, relativement à $n$, peut-elle caractériser $f$ aux trois points de vue successifs : continuité de $f$, existence d'une borne finie au module de $f$, ou aspect algébrico-logarithmique de la singularité ? M. Dienes distingue relativement au chemin L deux voisinage de $x_0$, l'un et l'autre symétriques par rapport à la tangente terminale de L. L'un est l'intérieur d'un secteur de cercle de centre $x_0$, d'angle au centre inférieur à $\pi$ et de rayon déterminé suffisamment petit : c'est le voisinage angulaire. L'autre est un cercle passant par $x_0$, admettant la tangente pour diamètre et de rayon suffisamment petit : c'est le voisinage circulaire.

A des hypothèses faites sur les $P_n$, correspondent des propriétés valables dans le voisinage angulaire de $f(x)$. Donc, si

$$P_n(x_0, \alpha) = \sum_1^n G_n(x_0, \alpha)$$

tend vers une certaine limite ou est borné pour $n$ infini, dès que $\alpha$, laissé fixe dans $P_n$, est suffisamment petit, $f(x)$ dans le voisinage angulaire de $x_0$ a la même limite ou la même borne limite que $P_n$. A des hypothèses faites sur $f(x)$ dans le voisinage circulaire de $x_0$, correspondent des propriétés non plus des $P_n$, mais des moyennes arithmétiques $\sigma_n(x_0, \alpha)$ des $n$ premiers $P_n$, valables à partir d'une certaine valeur de $\alpha$ pour toutes les valeurs inférieures. $\sigma_n$ tend pour $n$ infini vers la même limite que $f(x)$ pour $x = x_0$, si $f$ est continue dans le voisinage circulaire, ou bien $|\sigma_n|$ et $|f(x)|$ ont la même limite supérieure; et si, toujours dans ce voisinage circulaire, $f$ est algébrico-logarithmique, $\sigma_n$ est calculable *a priori* avec une erreur infiniment petite en $n$.

Mais il est également remarquable que l'étude de la plus grande limite des $\sqrt[n]{G_n(\alpha, x_0)}$ nous permette de décider de l'holomorphisme de $f$ dans le voisinage circulaire de $x_0$ suivant L. Si cette plus grande limite surpasse un, si petit que soit $\alpha$ dans tout voisinage circulaire de $x_0$ relativement au chemin L, $f$ a une infinité de points singuliers. Si cette plus grande limite est égale à un à partir d'une valeur assez petite de $\alpha$, il existe un voisinage circulaire où $f$ est holomorphe.

On voit le très grand intérêt de ces résultats qui résolvent en principe le problème de la répartition des points singuliers d'une fonction analytique pour toutes ses branches, connaissant le développement de l'une d'elles à l'origine.

Telle est la matière de cet Ouvrage, clairement rédigé et très méthodiquement exposé par un Auteur possédant parfaitement son sujet.

ARNAUD DENJOY.

---

PEZZO (PASQUALE DEL). — PRINCIPI DI GEOMETRIA PROIETTIVA. *Lezioni dettate nell' Università di Napoli.* Edizione terza. 1 vol. gr. in-8. Napoli, Lorenzo Alvano.

M. le professeur Del Pezzo, l'Auteur de ces *Principes de Géométrie projective*, est un des maîtres éminents de la pléïade des géomètres italiens qui ont recueilli et augmenté le riche héritage de Louis Cremona; on connaît ses profondes recherches sur les

surfaces de degré $n$ ou $n-1$ dans l'espace à $n$ dimensions (*Rend. Acc. Napoli*, 1885 e 1887, e *Rend. Cir. Palermo*, 1887) et sa généralisation de la théorie des *cycles* de Halphen (*Rend. Acc. Napoli*, 1893, e *Rend. Circ. Palermo*, 1892). L'Ouvrage que nous allons analyser porte le titre modeste de *Lezioni ;* cependant il s'agit d'un vrai Traité de Géométrie moderne ; les théories fondamentales de la Géométrie synthétique et analytique y sont développées dans leurs parties essentielles et avec beaucoup de détails. C'est un travail complet où l'on trouve, assimilé et systématiquement ordonné, l'abondant matériel des Traités classiques de Poncelet et de Chasles, et des Ouvrages plus récents de Cremona (¹) et de Sannia (²). La méthode purement géométrique de Sannia est suivie particulièrement dans la résolution des problèmes et des exercices qui sont à la fin de chaque Chapitre.

Le caractère principal du Livre est la grande généralité des concepts; dès le commencement, l'Auteur donne l'idée du point, de la droite, du plan, comme éléments des *espaces ;* les cas particuliers de la Géométrie métrique euclidienne sont traités dans des paragraphes spéciaux que l'on distingue entre les autres par le signe $\varepsilon$ et qui peuvent être considérés comme autant de parenthèses. Les questions sont traitées avec les méthodes de la Géométrie pure, spécialement dans le premier Chapitre et dans les Exercices ; les autres Chapitres contiennent des développements analytiques où les coordonnées apparaissent comme un système de symboles commodes qui nous aident dans la compréhension des faits géométriques.

Le Livre est divisé en quatre Chapitres : I. *La Géométrie projective générale ;* II. *La Géométrie des formes algébriques ;* III. *L'espace complexe ;* IV. *Les coniques*.

I. Aux premiers postulats et théorèmes suit immédiatement le principe de dualité, qui permet d'ordonner les *formes fondamentales* en groupes : la droite ponctuelle et le faisceau de plans, le plan ponctuel et l'étoile de plans, etc. Les principaux théorèmes sur les triangles, les trièdres et les tétraèdres homologiques et

(¹) Luigi Cremona, *Elementi di Geometria proiettiva*, Milano, 1873.
(²) Achille Sannia, *Lezioni di Geometria proiettiva*, Napoli, 1895.

l'étude des groupes harmoniques sont exposés dans les paragraphes 8 et 10 et servent de fondement aux paragraphes 12-18 qui contiennent un premier développement de la théorie des formes projectives de première, deuxième et troisième espèce (ponctuelles et faisceaux, plan ponctuel, plan réglé, étoile de droites ou de plans ; espace ponctuel et espace de plans). Les paragraphes euclidiens (9, 13, 15, 16, 18) traitent de l'introduction des éléments à l'infini et des cas particuliers des formes projectives ou homologiques (congruence, affinité, similitude). C'est ici qu'on trouve la première application de la théorie des groupes de substitutions : on démontre que les congruences forment un sous-groupe du groupe des transformations par similitude, les affinités forment un sous-groupe du groupe des homographies, etc. Les Exercices ont pour objet les groupes harmoniques et les premières constructions des coniques considérées comme les figures homologiques du cercle.

II. L'introduction des coordonnées projectives est remarquable par sa simplicité et par la rigueur logique (génération des formes de première espèce, échelle harmonique, distance projective, rapport anharmonique (§ 1-4) ; coordonnées des éléments des formes de deuxième et de troisième espèce (§ 11-14). Le problème de la transformation des coordonnées nous conduit immédiatement à l'équation de la projectivité, qui nous donne le moyen de compléter la théorie des formes projectives (construction des formes projectives, éléments unis, involution, etc.). Les paragraphes sur les invariants de la projectivité, sur l'involution unie et sur les faisceaux de projectivités méritent d'être spécialement remarqués. Les paragraphes *euclidiens* traitent des systèmes métriques de coordonnées et les exercices contiennent toute la géométrie pure des coniques (construction des coniques par les formes projectives, théorèmes de Pascal et Brianchon, de Maclaurin et Poncelet, de Desargues et de Sturm, problèmes du second degré, les quadriques réglées).

III. Les éléments complexes, qui ont été introduits dans le Chapitre II comme des symboles purs (§ 2, n° 7), trouvent ici leur application et leur interprétation géométrique. Les parties précédentes nous conduisent graduellement aux plus hautes conceptions de la Géométrie, qui ont leur expression définitive dans le Chapitre III, le plus important de l'Ouvrage. La théorie des formes projectives et des invariants est traitée ici en toute sa généralité

(coordonnées des droites dans l'espace complexe, éléments complexes conjugués, les projectivités entre formes complexes ; invariants des faisceaux des projectivités, invariants des homographies). Les paragraphes 9-16 traitent des *variétés* dans les espaces et peuvent servir comme une introduction à la théorie générale des courbes et des surfaces (équation d'un groupe d'éléments des formes complexes de première espèce, les variétés à une dimension dans les espaces à deux dimensions, théorie analytique des coniques, les variétés à deux dimensions dans les espaces à trois dimensions, théorie analytique des quadriques ; systèmes linéaires de variétés ; les polaires ; la jacobienne ; l'hessienne et la steinerienne ; les courbes rationnelles ; la correspondance de Chasles, le principe de Chasles). Dans les Exercices, on remarque la distinction des points d'un couple d'éléments complexes conjugués déduite de la théorie des invariants (ex. : § 2).

IV. La théorie des coniques, déjà traitée à propos des variétés à une dimension dans les espaces à deux dimensions, est ici complétée avec beaucoup de détails (construction de la polarité correspondant à une conique ; le faisceau ponctuel et tangentiel de coniques ; coniques inscrites et circonscrites à un triangle ; coniques tangentes, bitangentes, osculation des coniques). Dans les paragraphes *euclidiens* sont traitées les théories des foyers des coniques et du faisceau tangentiel de coniques homofocales.

Les éditions précédentes contiennent à la fin une monographie tout à fait complète sur la transformation quadratique (cf. 1re et 2e édition) où l'on remarque la recherche, intéressante et originelle, de tous les types de transformations quadratiques dont les puissances sont aussi quadratiques.

L'Auteur a su concilier dans ce Livre la concision et la clarté. Lorsqu'on a surmonté les premières difficultés et que l'on s'est rendu maître des concepts les plus généraux, les théories apparaissent comme le développement graduel et systématique d'un certain nombre, très petit, d'idées fondamentales. L'ordre et la division des paragraphes permet aussi de séparer la partie élémentaire, correspondant aux programmes des Écoles pour les ingénieurs, des compléments, qui sont très utiles aux étudiants de mathématiques. En résumé, le Livre du professeur Del Pezzo peut servir, non seulement aux élèves ingénieurs, mais aussi à ceux

qui se destinent aux recherches géométriques. Pour ces derniers, l'Ouvrage est une excellente introduction à l'étude des monographies originelles de haute géométrie.

G. Gallucci.

CAHEN (E.). — Théorie des Nombres. *Cours de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.* Tome I : Le premier degré. 1 vol. in-8, XII-408 pages. Paris, A. Hermann et Fils, 1914.

Les Ouvrages français consacrés à une exposition complète de la Théorie des Nombres sont tellement rares qu'on ne pourra accueillir qu'avec reconnaissance la publication entreprise par M. Cahen du Cours qu'il professe à la Sorbonne sur cette Théorie. La clarté de l'exposition, le soin que prend l'Auteur d'illustrer chaque partie de la Théorie d'exemples numériques rendent la lecture de l'Ouvrage non seulement utile, mais des plus agréables.

Dans une courte Préface, l'Auteur se préoccupe d'abord de délimiter son sujet en donnant une définition précise de la Théorie des Nombres. Les définitions de cette nature sont toujours très difficiles à donner; M. Cahen en avait proposé récemment une, assez satisfaisante en somme, en disant que la Théorie des Nombres s'occupe de tous les nombres entiers, rationnels, algébriques ou transcendants, mais en tant seulement qu'ils sont entiers, rationnels, algébriques ou transcendants. A ce point de vue, c'est donc la *nature* des nombres étudiés qui joue un rôle prépondérant, plutôt que les propriétés des opérations de calcul qu'on effectue sur eux. Dans la nouvelle définition proposée par M. Cahen, ce point de vue est complètement renversé; la Théorie des Nombres serait maintenant la science des calculs dans lesquels la *division* n'est possible que dans des cas particuliers. On forcerait sans doute sa pensée en s'autorisant de cette définition pour exclure de la Théorie des Nombres, par exemple, la Théorie des Corps de Galois, pris suivant un module premier, où la division est en général possible, ou au contraire pour y faire rentrer la théorie algébrique des polynomes rationnels entiers où la division est en général impossible. Il se peut que la nouvelle définition ne doive être regardée que comme un complément de l'ancienne et ait simplement

pour objet de délimiter d'une manière plus précise le domaine de la Théorie des Nombres. Cela est d'autant plus probable que, dans le cours de l'Ouvrage (p. 87), l'Auteur revient à sa conception primitive.

Malgré tout, on ne peut s'empêcher de trouver M. Cahen bien affirmatif quand il regarde l'impossibilité, en général, de la division comme la raison principale du retard de l'Arithmétique sur l'Algèbre. Il est certain que la non-possibilité, en général, de certaines opérations de calcul est souvent une cause de complications : on en a un exemple classique dans la théorie des équations algébriques entières à coefficients réels, plus compliquée que celle des équations à coefficients complexes à cause de la non-possibilité, en général, d'extraire les racines carrées; on sait aussi comment la non-possibilité, en général, de l'opération inverse de l'exponentiation a suscité de difficultés pendant tout le cours du XVIII^e siècle dans la théorie des logarithmes. Mais dans la Théorie des Nombres l'impossibilité, en général, de la division est, si l'on peut dire, tout à fait artificielle, puisque rien n'empêche de la lever par la considération des nombres fractionnaires et qu'après tout les mathématiciens qui s'occupent de cette Théorie ne s'en privent pas. Il semble bien que la *nature* des nombres considérés, excluant par elle-même ou semblant exclure toute considération de continuité, ait une bien plus grande importance; les plus grands progrès en Théorie des Nombres sont d'ailleurs presque tous dus à l'introduction de la continuité; il suffira, pour s'en convaincre, de rappeler les noms d'Hermite et de Minkowski.

Ce premier Volume est consacré à la théorie arithmétique des équations linéaires, des formes linéaires, des substitutions et des tableaux. Chacune de ces théories est calquée sur une théorie correspondante d'Algèbre, la seule différence étant qu'ici interviennent des nombres quelconques, tandis que là n'interviennent que des nombres entiers. L'Auteur a, avec raison, fait précéder chaque théorie arithmétique de la théorie d'Algèbre correspondante et le tout est précédé de la théorie élémentaire des nombres entiers, y compris les fractions, jusqu'aux nombres premiers exclusivement. Ceux-ci sont relégués à la fin de l'Ouvrage, le but de l'Auteur étant de s'en passer aussi longtemps que possible. L'exposition, comme M. Cahen l'explique lui-même, aurait pu être condensée davan-

tage, certains problèmes étant en réalité résolus plusieurs fois sous des énoncés différents : on peut concevoir, en effet, que la théorie générale des tableaux, exposée au début, aurait entraîné comme corollaires immédiats toutes les théories précédentes; mais il est certain que le plan suivi par M. Cahen a l'avantage pour le lecteur de l'initier graduellement et sans la moindre peine à des théories de plus en plus générales.

Nous allons maintenant passer en revue les diverses parties de l'Ouvrage.

La théorie des nombres entiers, des quatre opérations, de la divisibilité, du plus grand commun diviseur, du plus petit commun multiple, sont exposés dans les sept premiers Chapitres (p. 1-75). L'Auteur part de la définition ordinale du nombre entier qu'il traite à la façon d'Helmholtz, les propriétés fondamentales de l'addition et de la multiplication étant démontrées systématiquement par l'application du principe d'induction complète. Ce n'est qu'à la fin du Chapitre I que la notion de nombre cardinal entier est effleurée par la démonstration du théorème que deux suites qui sont en correspondance univoque contiennent le même nombre ordinal d'éléments : l'Auteur suppose du reste implicitement que l'une de ces suites peut être mise en correspondance univoque avec l'une des suites qui définissent les nombres ordinaux entiers, autrement dit ne contient pas une infinité d'éléments.

La numération est définie d'une manière purement formelle dans le Chapitre III, après la *théorie* de l'addition et de la multiplication, ce qui est parfaitement logique; cette définition est naturellement suivie des *règles* de l'addition et de la multiplication. La numération suggère à l'Auteur un nouveau moyen de *définir* les nombres entiers, chaque nombre entier étant regardé comme une figure composée avec un certain nombre de signes (les chiffres) rangés dans un certain ordre; à ce point de vue il conviendra de définir l'addition d'une manière purement formelle, ce qui est facile. Cette idée est d'ailleurs, au fond, celle qui est quelquefois utilisée pour la définition des nombres irrationnels. M. Cahen signale lui-même ce que ce point de vue aurait d'insuffisant si l'on avait, par exemple, à considérer des expressions telles que $2^{236}+1$ dont on n'a jamais écrit les chiffres. Indépendamment de cet inconvénient et en supposant, pour simplifier, qu'on veuille se borner au calcul

par addition, on peut se demander quels avantages présenterait la nouvelle définition formelle sur la définition ordinaire. Si j'ai bien compris la pensée de l'Auteur, mais de cela je ne suis pas sûr, il y aurait deux avantages principaux : d'abord on pourrait ainsi définir des nombres qu'il est impossible d'atteindre par la définition ordinaire : la question de savoir s'il existe une suite ordinale représentée, en numération écrite, par une suite arbitrairement donnée de chiffres peut, en effet, se poser; cette question prend, d'ailleurs, un aspect tout à fait différent, suivant qu'on se place au point de vue de l'empirisme, qui semble être celui de l'auteur, ou au point de vue de l'idéalisme. Le second avantage que M. Cahen *semble* trouver dans la nouvelle définition, et c'est ici que je ne suis pas sûr de ne pas trahir sa pensée, c'est qu'elle dispense du principe d'induction complète : il semble cependant impossible de démontrer, par exemple, la commutativité de l'addition, telle qu'on serait obligé de la définir formellement sans faire usage de ce principe.

La soustraction des nombres entiers est traitée dans le Chapitre IV, la théorie des nombres négatifs, définis formellement, dans le Chapitre V, puis la théorie de la division des nombres entiers (à une unité près) dans le Chapitre VI. Enfin la divisibilité, le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple sont traités dans le Chapitre VIII, sans faire, bien entendu, intervenir la notion de nombre premier. Le Chapitre VIII traite des opérations sur les fractions, définies formellement comme ensembles de deux entiers.

M. Cahen aborde la Théorie des Nombres proprement dite dans le Chapitre IX par l'étude des équations diophantiennes du premier degré à une et à deux inconnues. Il s'agit, comme on sait, de la résolution en nombres entiers des équations ayant les formes

$$ax = b, \qquad ax + by = c,$$

où les coefficients sont des entiers donnés. La résolution est effectuée par un procédé tout à fait élémentaire qui consiste à réduire successivement la valeur absolue du plus petit coefficient du premier membre de l'équation, et qui est, au fond, identique au procédé fourni par la théorie des fractions continues. L'Auteur illustre la théorie par l'interprétation géométrique que fournit la considé-

ration des réseaux de points dans un plan : on a là le premier exemple des services que les considérations de continuité peuvent rendre en Arithmétique.

Les systèmes d'équations diophantiennes du premier degré sont ensuite résolus, dans le Chapitre X, par une méthode analogue à celle des substitutions en Algèbre. C'est en vue d'une exposition complète de cette théorie des équations diophantiennes que l'Auteur, dans le Chapitre XI, reprend la théorie algébrique des équations linéaires, en y ajoutant des compléments sur les déterminants, tels que la règle de Laplace et la recherche des éléments d'un tableau connaissant les valeurs numériques des déterminants formés avec ce tableau. Le Chapitre XII termine l'exposition de la théorie des équations diophantiennes du premier degré. Lorsqu'un tel système d'équations diophantiennes est possible, la solution générale s'obtient en ajoutant à une solution particulière la solution générale du système sans second membre. Il est donc naturel de commencer par étudier les systèmes linéaires et homogènes; l'Auteur définit ce qu'on appelle un système fondamental de solutions et démontre la condition pour qu'un système de solutions soit fondamental. Passant ensuite aux équations non homogènes, il démontre le théorème fondamental, dû à Frobenius [1], qui donne la condition de possibilité : il faut que le tableau des coefficients des inconnues et ce tableau complété à l'aide des termes tout connus aient même rang $r$ et que leurs déterminants d'ordre $r$ aient même plus grand commun diviseur.

Le Chapitre XIII, consacré aux éléments de la théorie des substitutions linéaires homogènes, prépare la théorie des formes linéaires et des formes bilinéaires. La représentation d'une substitution par un tableau carré prépare la notion de multiplication des tableaux. L'Auteur définit *a priori* la transformée d'une substitution S par une substitution U comme étant la substitution $USU^{-1}$ : il y aurait eu sans doute avantage à montrer la raison de cette définition, la substitution $USU^{-1}$ n'étant au fond que la substitution S, mais écrite avec d'autres variables résultant des pre-

---

[1] A ce propos, pourquoi M. Cahen, dans un Livre du reste soigneusement édité, laisse-t-il imprimer *Frœbenius* le nom du savant professeur de l'Université de Berlin.

mières par la substitution U. Le Chapitre se termine par l'introduction de la notion de groupe de substitutions.

Suivant la méthode adoptée par l'Auteur, la théorie algébrique des formes linéaires, exposée dans le Chapitre XIV, précède leur théorie arithmétique. Signalons la démonstration du théorème que le seul invariant d'un système de $n$ formes linéaires à $n$ variables est le déterminant de ses coefficients. Cette démonstration est, au fond, celle à laquelle conduirait la théorie des transformations infinitésimales de Lie; il serait possible d'éviter l'emploi des dérivées en remarquant que tout invariant *relatif* est *absolu* par rapport aux substitutions linéaires de la forme $STS^{-1}T^{-1}$, par suite par rapport aux substitutions de déterminant égal à 1; la seule hypothèse que l'invariant est continu par rapport à l'ensemble des coefficients des formes conduirait à la conclusion qu'il est, soit de la forme $c|D|^m$, soit de la forme $cD|D|^{m-1}$, où D désigne le déterminant du système et $c$ une constante. La démonstration ne serait, du reste, pas plus simple.

Les formes et systèmes de formes sont étudiés, au point de vue arithmétique, dans le Chapitre XV. Une notion importante est celle d'un système de formes contenu arithmétiquement dans un autre : on entend par là que le premier système résulte du second par une substitution linéaire à coefficients entiers. Deux systèmes sont équivalents quand chacun est contenu dans l'autre. Une condition nécessaire pour qu'un système de formes linéaires en contienne arithmétiquement un autre est que le plus grand commun diviseur des déterminants du tableau de tout système partiel extrait du second soit un multiple de celui des déterminants du tableau du système partiel correspondant extrait du premier. Les conditions suffisantes sont plus compliquées, mais analogues à celles qui ont été trouvées pour la possibilité d'un système d'équations diophantiennes linéaires. La recherche de l'équivalence de deux systèmes de formes linéaires est résolue par la notion du système réduit qui conduit immédiatement aux invariants arithmétiques d'un système de formes linéaires.

La théorie, algébrique et arithmétique, des formes bilinéaires, est étudiée dans le Chapitre XVI; au point de vue arithmétique, signalons la notion de forme réduite parfaite

$$e_1x_1y_1 + e_2x_2y_2 + \ldots + e_rx_ry_r$$

où les $e_i$ sont des entiers positifs dont chacun divise le suivant. Les coefficients $e_1, \ldots, e_r$ sont les *diviseurs élémentaires* du tableau des coefficients de la forme bilinéaire primitive; peut-être l'auteur aurait-il pu à cette occasion signaler les analogies de ces diviseurs élémentaires arithmétiques avec les diviseurs élémentaires de Weierstrass qui se présentent dans la théorie algébrique des substitutions linéaires. Le cas particulier des formes bilinéaires alternées est étudié à part.

Les théories précédentes sont généralisées grâce à l'introduction de la notion de congruence. La théorie élémentaire des congruences est exposée dans le Chapitre XVII. On y trouve les conditions de possibilité d'un système de congruences linéaires; dans l'énoncé de ces conditions interviennent les diviseurs élémentaires du tableau formé par les coefficients des inconnues et de ce tableau complété par les termes tout connus. On y trouve aussi le nombre des solutions incongrues. Enfin l'Auteur y considère les substitutions linéaires prises suivant un module.

Le calcul général des tableaux est exposé au point de vue algébrique dans le Chapitre XVIII, avec la notion des tableaux permutables et les analogies entre le calcul des tableaux et les calculs des systèmes de nombres complexes et hypercomplexes. Le Chapitre XIX s'occupe de la théorie arithmétique des tableaux à éléments entiers. L'Auteur définit trois sortes de divisibilité des tableaux entiers, le tableau A étant respectivement dit divisible, première manière, deuxième manière ou troisième manière, par le tableau B si A peut se mettre sous la forme

$$BQ, \qquad QB, \qquad QBQ',$$

où Q et Q′ désignent des tableaux entiers convenablement choisis. Deux tableaux sont équivalents quand chacun divise l'autre. A chaque manière de divisibilité correspond une forme réduite pour les tableaux équivalents à un tableau donné. La réduction, dans le cas de la première manière, revient à la réduction d'un système de formes linéaires; dans le cas de la troisième manière elle revient à la réduction d'une forme bilinéaire. Dans le Chapitre XX, l'Auteur applique les théories précédentes à la résolution de quelques problèmes, en particulier la recherche des tableaux entiers à $p$ lignes et $n$ colonnes dont les déterminants sont des entiers

donnés : ce problème a été résolu, pour $n = p + 1$, par Hermite.

La décomposition des entiers en facteurs premiers est enfin abordée dans le Chapitre XXI et suivie, dans le Chapitre XXII, du calcul de certaines fonctions arithmétiques, telles que l'indicateur $\varphi(n)$. Enfin, dans le Chapitre XXIII, l'Auteur expose les éléments de la théorie des congruences à module premier et montre l'analogie parfaite de cette théorie arithmétique avec la théorie algébrique correspondante.

Le lecteur pourra juger par cette brève analyse de la variété et de l'importance des problèmes traités par M. Cahen; mais ce n'est qu'en lisant l'Ouvrage lui-même qu'il pourra s'étonner de la facilité avec laquelle il s'assimilera toutes ces théories, grâce aux remarquables qualités d'exposition de l'Auteur.

E. Cartan.

---

GOT (Th.). — Questions diverses concernant certaines formes quadratiques ternaires indéfinies et les groupes fuchsiens arithmétiques qui s'y rattachent. — *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, pour obtenir le grade de Docteur ès sciences mathématiques*, soutenue le 9 janvier 1914, sous la présidence de M. Émile Picard. 1 vol. in-4, vii-101 pages, 4 planches. Toulouse, Édouard Privat, 1913.

On sait l'importance que présentent en Arithmétique les formes quadratiques ternaires indéfinies à coefficients entiers. Cette importance n'est pas moindre au point de vue géométrique et au point de vue fonctionnel, car Poincaré a montré qu'à chaque forme quadratique ternaire correspondait un groupe fuchsien pouvant donner naissance à des équations algébriques analogues aux équations modulaires. Des méthodes générales ont été données jadis par Hermite et d'autres auteurs à sa suite pour trouver les substitutions fondamentales du groupe des substitutions transformant la forme en elle-même. Au point de vue de la théorie des groupes fuchsiens, on doit aussi chercher à former le domaine fondamental de ce groupe. Tous ceux qui se sont occupés de ce genre de questions savent combien est pénible et souvent impraticable l'emploi des méthodes générales, si l'on n'use pas d'artifices appropriés à chaque cas et diminuant la longueur de la discussion.

Tel est l'objet que se propose M. Got dans le travail très digne d'attention qu'il soumet à la Faculté; il porte aussi particulièrement son attention sur les formes du type

$$z^2 - \varphi(x, y),$$

où $\varphi(x, y)$ est une forme binaire définie. M. Got exclut de son étude les cas où le groupe fuchsien aurait des substitutions paraboliques, c'est-à-dire les cas où la forme quadratique pourrait représenter zéro.

Dans la première Partie, on trouve d'intéressantes remarques sur les critères de Poincaré relatifs aux substitutions elliptiques, dont les périodes ne peuvent être que 2, 3, 4 ou 6; il examine aussi le cas des symétries qui joue un si grand rôle dans les Ouvrages de Fricke et Klein, et donne des conditions très simples pour qu'une forme admette des symétries.

Dans la deuxième Partie, M. Got reprend la méthode de la réduction continuelle d'Hermite, sous la forme que lui a donnée Selling. Il traite en détail deux formes de discriminants 5 et 21, et recherche, ce qui lui sera utile dans la suite, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les formes $az^2 - \varphi(x, y)$ soient réduites.

La troisième Partie est consacrée à l'étude de la forme

$$\varphi(x, y) - z^2,$$

en suivant une marche analogue à celle de Klein et Fricke pour le type

$$px^2 + qy^2 - rz^2.$$

L'extension du groupe par symétrie joue ici un rôle très important et simplifie considérablement les discussions quand elle est applicable.

La quatrième Partie, la plus originale du travail, traite de la recherche du domaine fondamental au moyen de la méthode du rayonnement, dont M. Fricke paraît avoir trouvé la première idée dans un mémoire de Dirichlet. M. Got montre que cette méthode, restée jusqu'ici purement théorique, peut être appliquée avec grand profit aux formes $z^2 - \varphi(x, y)$ et qu'elle conduit à des calculs plus simples que la réduction continuelle; il étudie complètement une forme de déterminant 29.

On voit que le travail de M. Got complète très heureusement certaines méthodes classiques dans la théorie des formes quadratiques, mais restées jusqu'ici quelque peu à l'état théorique. L'effort arithmétique de l'Auteur et son ingéniosité à venir à bout de discussions délicates et pénibles frapperont tous ceux qui s'intéressent aux difficiles problèmes de la théorie des nombres.

*La R.*

---

HOBSON (E. W.). — SQUARING THE CIRCLE, 1 vol. demi in-8, VII-57 pages. Cambridge, University Presse, C. F. Clay, 1913.

Le problème de la quadrature du cercle est un de ceux sur lesquels s'est le plus exercée la sagacité des géomètres et des chercheurs en général. Le nombre des solutions proposées est incalculable; aussi, dès 1775, à la demande de Condorcet, alors secrétaire perpetuel, l'Académie des Sciences décida-t-elle de ne plus examiner les solutions relatives à la quadrature du cercle. De nos jours, après les beaux Mémoires d'Hermite et de Lindeman, l'Académie reste dans les dispositions adoptées en 1775, sans pour cela lasser l'ardeur de quelques chercheurs non convaincus.

E. W. Hobson a entrepris de faire l'historique de ce problème depuis la plus haute antiquité jusqu'à nos jours, et, pour bien faire comprendre le sens dans lequel s'engagèrent les esprits des chercheurs, il donne tout d'abord un exposé de la question. Il met très nettement en évidence la différence qui existe entre le problème euclidien et le problème pratique, la solution idéale et la solution physique. La première est impossible; la seconde est réalisable avec une exactitude qui ne dépend que de la perfection des instruments et de l'adresse de l'expérimentateur.

Au point de vue historique, l'évolution du problème de la quadrature du cercle suit de très près les progrès des Mathématiques. Dans une documentation extrêmement riche en noms et en résultats, E. W. Hobson la sépare en trois périodes. Dans la première, il étudie les méthodes de calcul et les premières valeurs approchées de $\pi$ non seulement chez les géomètres grecs et en particulier chez Archimède, mais aussi chez les mathématiciens chinois, indous, arabes. Puis, il s'étend longuement sur l'œuvre des

mathématiciens des XV^e et XVI^e siècles, Copernic, Huygens et Descartes. Là commencent la seconde période et une nouvelle évolution du problème; elle suit l'invention du calcul différentiel. C'est alors la représentation de $\pi$ par des développements en séries ou des produits infinis. Dans cette époque, nous trouvons les noms de Wallis et d'Euler. Enfin, dans la troisième période, les géomètres étudient la nature du nombre $\pi$. Après avoir fixé le sens des mots *nombre algébrique*, *nombre transcendant* et exposé clairement l'existence de tels nombres, l'Auteur montre le lien qui existe entre la transcendance de $\pi$ et l'impossibilité de la quadrature du cercle. Puis ce sont les résultats classiques des Mémoires d'Hermite et de Lindeman. L'Ouvrage se termine par une exposition originale de la transcendance de $\pi$ basée sur la méthode d'Hilbert et Gordan.

On voit que les matériaux réunis par E. W. Hobson sont aussi riches qu'intéressants au point de vue scientifique, philosophique, historique et même pédagogique.

EDMOND OUIVET.

## MÉLANGES.

### SUR LES COURBES A TORSION CONSTANTE:

PAR M. G. DARMOIS.

La recherche des courbes à torsion constante conduit à considérer les intégrales

$$X = \int \frac{y\,dz - z\,dy}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$Y = \int \frac{z\,dx - x\,dz}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$Z = \int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ces intégrales sont attachées à un cône

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

La géométrie montre :

1° Que ces intégrales sont inaltérées par la substitution

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = \lambda;$$

2° Que les déplacements (substitutions qui laissent invariante la forme $x^2 + y^2 + z^2$), se traduisent sur $(x, y, z)$ par des déplacements. La vérification de ces propriétés est immédiate, et le calcul auquel on est conduit, fournit des propositions plus générales. Nous supposerons que $x^2 + y^2 + z^2$ est remplacé par une forme quadratique quelconque $f(x, y, z)$.

La propriété (1°) subsiste, et l'on a de plus, pour toute homographie de la forme :

$$\begin{aligned} x_1 &= ax + a'y + a''z \\ y_1 &= bx + b'y + b''z \\ z_1 &= cx + c'y + c''z \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

le système suivant pour X, Y, Z

$$\begin{aligned} \Delta X &= a\,X_1 + b\,Y_1 + c\,Z_1, \\ \Delta Y &= a'\,X_1 + b'\,Y_1 + c'\,Z_1, \\ \Delta Z &= a''\,X_1 + b''\,Y_1 + c''\,Z_1, \end{aligned}$$

où $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ sont ce que deviennent X, Y, Z quand on remplace $x, y, z, f(x, y, z)$ par $x_1, y_1, z_1, f_1(x_1, y_1, z_1)$

$$f_1(x_1, y_1, z_1) \equiv f(x, y, z).$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donné un cône du second degré indécomposable

$$f(x, y, z) = 0,$$

les formules

$$\begin{aligned} X_1 &= \int \frac{y_1\,dz_1 - z_1\,dy_1}{f(x_1, y_1, z_1)}, \\ Y_1 &= \int \frac{z_1\,dx_1 - x_1\,dz_1}{f(x_1, y_1, z_1)}, \\ Z_1 &= \int \frac{x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1}{f(x_1, y_1, z_1)} \end{aligned}$$

associent à un cône quelconque une courbe qui est transformée homographique d'une courbe à torsion constante. Les formules

qui définissent cette homographie sont celles qui donnent lieu à l'identité

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv f(x_1, y_1, z_1).$$

Elles sont donc définies à un mouvement près, et il suffira d'obtenir une solution particulière de cette équation.

Cette proposition va nous faire retrouver, par une voie naturelle, les diverses formes simples sous lesquelles on a pu poser le problème des courbes à torsion constante. Prenons, en effet,

$$f(x_1, y_1, z_1) = 4x_1 y_1 - z_1^2.$$

L'application du théorème précédent, où nous prendrons

$$\begin{aligned} 2x_1 &= x + iy \\ 2y_1 &= x - iy \\ z_1 &= \qquad\quad iz \end{aligned} \qquad \Delta = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

nous donne les formules

$$\begin{aligned} X - iY &= 2\,X_1 = 2\int \frac{y\,dz - z\,dy}{4xy - z^2}, \\ X + iY &= 2\,Y_1 = 2\int \frac{z\,dx - x\,dz}{4xy - z^2}, \\ Z &= 2i\,Z_1 = 2i\int \frac{x\,dy - y\,dx}{4xy - z^2}. \end{aligned}$$

Nous supprimons les indices des variables d'intégration. Ces formules comprennent les différents systèmes donnés par M. Lyon dans sa Thèse. On a, en effet (1re propriété) le droit de faire égale à 1 l'une quelconque des trois variables. Si nous faisons la substitution

$$y = uv, \qquad z = u + v, \qquad x = 1,$$

nous retrouvons le système classique dans cette théorie :

$$\begin{aligned} X - iY &= +2\int \frac{u^2\,dv + v^2\,du}{(u - v)^2}, \\ X + iY &= +2\int \frac{d(uv)}{(u - v)^2}, \\ Z &= -2i\int \frac{d(u + v)}{(u - v)^2}. \end{aligned}$$

On voit qu'une méthode uniforme nous a fourni ces diverses formules. Signalons aussi la conséquence suivante, en quelque

sorte pratique : On peut choisir, pour l'équation du cône des binormales, la forme la plus simple qu'il puisse prendre par une substitution homographique.

On peut se demander ce que deviennent les formules quand le cône du second degré se décompose et se réduit à deux plans distincts ou confondus. Envisageons successivement ces deux cas :

1° Nous avons le droit, à une homographie près, de nous restreindre à la considération du système

$$X_1 = \int \frac{-dy}{xy},$$

$$Y_1 = \int \frac{dx}{xy},$$

$$Z_1 = \int \frac{x\,dy - y\,dx}{xy} = \mathfrak{L}\left(\frac{y}{x}\right).$$

On voit qu'une différence profonde sépare les deux questions. En effet, il existe des courbes algébriques à torsion constante. Il est clair qu'ici, les trois intégrales ne sauraient être algébriques, si l'on suppose $x$ et $y$ liées par une relation algébrique (différente de $y = kx$).

2° Nous considérerons de même :

$$X_1 = -\int \frac{dy}{x^2},$$

$$Y_1 = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x},$$

$$Z_1 = \int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{y}{x}.$$

Ici, au contraire, il suffira de prendre

$$x^2 = -\frac{1}{\psi'(y)},$$

$\psi(y)$ étant une fonction algébrique, pour que les trois intégrales soient algébriques.

## L'ABBÉ BOSSUT.

### (A l'occasion du centenaire de sa mort):

PAR M. E. DOUBLET,
astronome à l'Observatoire de Bordeaux.

(*Suite*) [1].

---

Dans sa *Bibliographie astronomique* (p. 494), Lalande donna une idée inexacte du Mémoire de Bossut; celui-ci mentionne le fait dans son *Histoire des Mathématiques*, mais il ne nomme pas son ancien condisciple. Il se borne à l'appeler : « L'auteur d'un gros catalogue de livres astronomiques. »

Lalande et Bossut ne s'aimaient guère, en effet. La preuve en est que, dans son *Histoire*, Bossut ne nomme qu'une seule fois le célèbre astronome, et tout en reconnaissant que l'*Astronomie* de celui-ci est un Ouvrage utile, pense qu'il l'aurait été davantage « s'il était moins prolixe, si l'auteur s'était attaché à y mettre de la méthode, à employer des démonstrations simples, à rapprocher plusieurs objets semblables, à supprimer nombre de choses qui n'appartiennent qu'indirectement à l'Astronomie et qui détournent l'attention du lecteur, etc. »

Quel pouvait bien être le motif de cette aversion que Bossut avait pour Lalande, qui lui, en diverses circonstances, a parlé en termes favorables du mathématicien? Ne serait-ce pas la différence de leurs convictions philosophiques? On sait que Lalande professait l'athéisme le plus radical, et Bossut, nous l'avons dit, était un sincère catholique.

Bossut savait d'ailleurs à l'occasion s'élever au-dessus de ses opinions personnelles. Quand Delambre se présenta à l'Académie en 1792, le vieil ennemi de Lalande mit sa voix et son influence au service de la candidature de l'élève favori de ce dernier, qui lui en fut toujours reconnaissant.

Pendant son séjour à Mézières, Bossut avait encore d'autres occupations; dès 1766, il étudia une des sciences les plus utiles au point

---

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, avril 1914, p. 121.

de vue des applications, l'Hydrodynamique. Il n'existait pas encore d'expériences faites en grand sur le mouvement des fluides. Le duc de Choiseul accorda les fonds nécessaires pour faire ces expériences. Il en résulta un *Traité d'Hydrodynamique* en deux gros volumes in-8°. La première édition parut en 1771.

A cette date, il y avait déjà trois ans que Bossut avait été rappelé à Paris. Il remplaça son ami Camus, à la fois comme académicien et comme examinateur des élèves de l'artillerie et du génie.

A la capacité, un examinateur doit joindre la probité la plus scrupuleuse. La misanthropie dont Bossut fit preuve plus tard permet de croire qu'il fut un examinateur un peu revêche ; mais, avant tout, il fut équitable, et c'est l'essentiel.

Le maréchal de Muy lui avait recommandé certains candidats et Bossut n'en avait tenu nul compte. M. de Muy était un parfait honnête homme, il reconnut qu'en général ses protégés avaient été refusés à juste titre. Aussi, quand il fut Ministre de la Guerre, Bossut lui ayant apporté la liste des candidats qu'il proposait d'admettre, le maréchal la signa sur le champ en disant : « Je signe aveuglément, j'ai éprouvé qu'il ne faut pas regarder après vous. »

Nous avons déjà nommé le *Traité d'Hydrodynamique* de Bossut. Le premier Volume commence par une introduction historique où il rappelle les noms et les travaux de ses prédécesseurs, depuis Archimède jusqu'à d'Alembert et aux Bernoulli, en passant par Torricelli et Newton, sans oublier Mariotte, dont l'Ouvrage posthume, publié en 1686, a rendu de grands services, malgré ses défauts.

Ce premier Volume est formé de deux Parties traitant, la première de l'Hydrostatique, ou de l'équilibre des fluides, l'autre de l'Hydrodynamique, ou de leur mouvement. Ce premier Volume est consacré exclusivement à la théorie, et l'auteur y fait un usage continuel de l'Analyse. Après 15 pages d'Introduction, on trouve 19 Chapitres distincts dont nous ne rapporterons pas les titres ici.

Le second Volume traite de la pratique. Il comprend 18 Chapitres et, de plus, trois appendices intitulés :

I. *Notice d'un recueil d'Ouvrages italiens sur le cours des eaux.*

II. *Relation entre la vitesse uniforme d'un mobile et la hauteur due à cette vitesse.*

III. *De la Machine à feu;* c'est-à-dire de la machine à vapeur, dont certains industriels, et parmi eux les frères Périer (l'un d'eux fut académicien), commençaient à faire usage.

Ce Traité valut à Bossut, outre une grande réputation, la récompense qu'il devait sans doute souhaiter le plus : la possibilité de se rendre utile en enseignant sa science de prédilection.

(*A suivre.*)

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Bezold (Carl). — *Zenit- u. Aequatorialgestirne am babylonischen Fixternhimmel.* Mit astronom. Beiträgen v. *Aug. Kopff* u. Zusätzen v. *Frz. Boll.* (*Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften.* Stiftung *Heinrich Lanz.* Philosophisch-historische Klasse. Jahrg. 1913.) Gr. in-8, 59 p. Heidelberg, Carl Winter. 2 M.

Suini (A.). — *Sul vizio d'origine della Geometria non euclidea.* In-8. Piacenza, Porta. 1 L.

Bolyai (Wolfg.) u. Bolyai (Joh.). — *Geometrische Untersuchungen.* Mit Unterstützg. der ungar. Akademie der Wissenschaften hrsg. v. *Paul Stäckel.* (*Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie.* Hrsg. v. *Frdr. Engel* u. *Paul Stäckel.*) 2 Tle. gr. in-8, XII-281 et VII-274 p. avec 120 fig. et 2 planches. Leipzig, B.-G. Teubner. 28 M.; relié, 32 M.

Bouasse (H.). — *Cours de Thermodynamique.* T. II du Cours de Physique. In-8, 400 p. Paris, Ch. Delagrave. 16 fr.

Furtwängler (Ph.) u. Ruhm (G.). — *Die mathematische Ausbildung der deutschen Landmesser.* (*Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Veranlasst durch die internationale mathemat. Unterrichtskommission. Hrsg. v. *F. Klein.*) Bd. In-8, IV-50 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 1 M. 60.

Bendt (Frz.). — *Grundzüge der Differential- u. Integralrechnung.* 5. Aufl., durchgesehen u. verb. v. *G. Ehrig.* In-8, XVI-268 p. avec 39 fig. Leipzig, J.-J. Weber. Relié, 3 M.

1re Partie

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

---

VOLTERRA (Vito). — Leçons sur les Fonctions de lignes, *professées à la Sorbonne en* 1912, *recueillies et rédigées par* Joseph Pérès. (*Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions*, publiée sous la direction de M. Émile Borel). 1 vol. gr. in-8, VI-230 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Ce Livre constitue le premier exposé d'ensemble de l'œuvre accomplie par M. Volterra, depuis qu'il a abordé en 1909 l'étude des équations intégro-différentielles. M. Lalesco avait déjà consacré à ce sujet quelques pages de son *Introduction à la théorie des équations intégrales*, et M. Volterra lui-même, dans ses *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, y avait consacré un Chapitre. Mais le sujet méritait un plus grand développement, et ce nouveau Livre était attendu avec impatience par tous ceux qui n'avaient pas pu entendre à la Sorbonne les leçons de l'éminent professeur.

Il rattache ses travaux récents à la notion fondamentale qui a été le point de départ de presque toutes ses recherches antérieures, celle de *fonction d'une ligne*. Dans une belle leçon d'ouverture sur l'évolution des idées fondamentales du Calcul infinitésimal, il montre comment cette notion a été introduite dans la Science. Un procédé bien souvent employé en mathématiques est le passage du fini à l'infini ; c'est par ce passage que la notion de somme a conduit à celle d'intégrale. Par le même passage, la notion de fonction d'un nombre fini de variables conduit à celle d'une quantité dépendant de toutes les valeurs d'une fonction donnée, c'est-à-dire, en adoptant le point de vue géométrique, une fonction d'une ligne. Des exemples simples de ces fonctions étaient connus depuis longtemps. Leur étude systématique était une tâche qu'il fallait accomplir; c'est ce qu'a fait M. Volterra.

Dans son nouveau Livre, il reprend dès les débuts, mais d'une façon sommaire, la théorie des fonctions de lignes, exposée déjà dans son précédent Ouvrage. Il définit la dérivée de ces fonctions et la calcule dans quelques cas simples. Il montre comment leur

détermination par voie implicite peut conduire à des équations intégrales, linéaires ou transcendantes. La recherche du minimum d'une fonction de lignes, dans le cas où elle est représentable par une intégrale définie, a donné naissance au calcul des variations classiques; ce minimum dépend d'équations différentielles. Des problèmes plus généraux de calcul des variations conduisent à des équations intégrales ou intégro-différentielles. L'étude de ces équations est donc nécessaire au progrès de la théorie des fonctions de lignes. Inversement, d'ailleurs, et c'est un point sur lequel M. Volterra appelle l'attention, la notion de fonction de lignes rend les plus grands services dans l'étude de ces équations.

Les *équations intégrales*, dont l'étude a été l'objet principal de son précédent Ouvrage, sont traitées d'une façon assez sommaire. Il insiste surtout sur le procédé qui l'a conduit à la résolution de l'équation, à laquelle son nom est resté attaché,

$$(1)\qquad f(x)+\int_a^x f(\xi)\,\mathcal{F}(x,\xi)\,d\xi=\psi(x),$$

$f(x)$ étant la fonction inconnue. Ce procédé, aujourd'hui classique, consiste à considérer l'équation (1) comme la limite d'un système d'équations algébriques linéaires. Le même procédé conduit aux formules de M. Fredholm relatives à l'équation déduite de l'équation (1) en remplaçant la limite supérieure de l'intervalle d'intégration par une constante. M. Volterra ne fait qu'indiquer brièvement ce point et montre ensuite comment, connaissant la solution de l'équation de Fredholm, on peut résoudre une équation intégrale transcendante d'un type très général, par un procédé qui rappelle l'inversion d'une série de Taylor.

Il aborde ensuite l'étude des équations *intégro-différentielles*, qui sont aux équations différentielles ce que sont les équations intégrales aux équations algébriques. A l'équation de Laplace correspond ainsi l'équation fondamentale du type elliptique, qui s'écrit, lorsque les limites de l'intervalle d'intégration sont variables,

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 u(t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(t)}{\partial z^2}+\int_0^t\left[\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2}f(t,\tau)+\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2}\varphi(t,\tau)+\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right]d\tau=0,$$

la fonction inconnue $u(t)$ dépendant de trois variables $x, y, z$, non écrites explicitement, et de $t$. La théorie de cette équation est une belle généralisation de la théorie de l'équation de Laplace.

Le problème qui correspond au problème de Dirichlet est le suivant : $x, y, z$ étant considérées comme les coordonnées d'un point, une solution régulière est déterminée dans un domaine S, et pour $t$ compris entre o et un nombre arbitraire T, si l'on donne ses valeurs sur la surface limitant S et pour les mêmes valeurs de $t$.

La démonstration de l'unicité de la solution est très importante, car elle est le type de raisonnements qui reviendront souvent dans la suite. Il n'est peut-être pas inutile d'indiquer le plus simple des raisonnements de ce type, permettant d'établir que l'équation (1), si $\psi(x)$ est nul, n'admet pas d'autre solution restant finie que $f(x) = 0$. Soient, en effet, M le maximum de $f(x)$ en valeur absolue, N celui de $\mathcal{F}(x, \xi)$. L'intégrale qui figure dans l'équation (1) est alors inférieure en valeur absolue à $MN(x-a)$ ; il en est donc de même de $f(x)$. De cette nouvelle limitation de $f(x)$, on déduit une nouvelle limitation de l'intégrale, donc de $f(x)$; en continuant ainsi, on voit que $f(x)$ est en valeur absolue inférieur, pour toutes les valeurs de $n$, à $\frac{MN^n(x-a)^n}{n!}$. Donc $f(x) = 0$.

Par une transformation convenable de l'équation (2), inspirée par le procédé qui permet d'établir que la solution du problème de Dirichlet est unique, un raisonnement du même type s'applique. La solution du problème aux limites, énoncé ci-dessus, est donc unique.

M. Volterra étend à ce problème la méthode de Green pour le problème de Dirichlet. A cet effet, il considère l'équation adjointe de (2), obtenue en remplaçant $f(t, \tau)$, $\varphi(t, \tau)$ et $\psi(t, \tau)$ par $f(\tau, t)$, $\varphi(\tau, t)$ et $\psi(\tau, t)$, et établit, entre une solution quelconque de cette équation et une solution quelconque de l'équation (2), une relation analogue à la formule de Green. Il faut ensuite trouver une solution fondamentale qui joue le même rôle que $\frac{1}{r}$ pour l'équation de Laplace. M. Volterra l'obtient en remplaçant l'équation étudiée par des systèmes approchés et passant à la limite. On peut alors poursuivre l'application de la méthode de Green.

Le Chapitre suivant est consacré à l'étude des équations intégro-différentielles de l'élasticité. Nous reviendrons plus loin

sur la notion physique de phénomène héréditaire, à laquelle est consacré le dernier Chapitre. Disons seulement ici que, dans le cas de l'hérédité linéaire, cette notion, appliquée à l'étude de l'équilibre élastique, conduit à un système d'équations intégro-différentielles qui sont, aux équations ordinaires de l'élasticité, ce qu'est l'équation (2) à l'équation de Laplace. Dans le cas du corps isotrope, M. Volterra étend à ce système la méthode de Green; il se présente, dans cette extension, cette circonstance remarquable, que les solutions fondamentales s'obtiennent plus aisément que dans le cas de l'équation (2).

La fin du même Chapitre est consacrée à l'étude du problème des cordes vibrantes dans le cas de l'hérédité linéaire, par une méthode qui généralise celle que l'on emploie lorsqu'il n'y a pas d'hérédité.

Dans le cas de la sphère élastique isotrope avec hérédité, le problème de la détermination de l'équilibre connaissant les déplacements au contour est beaucoup plus simple que dans le cas d'un solide de forme quelconque. M. Volterra, utilisant un théorème de M. Almansi, le ramène à l'intégration de l'équation intégro-différentielle

$$r\frac{\partial f(t,r)}{\partial r} + cf(t,r) + \int_0^t \mathcal{F}(t,\tau) f(\tau,r)\,d\tau = \varphi(t,r).$$

Pour intégrer cette équation, il emploie une méthode qui paraît d'abord artificielle, mais qui n'est qu'un cas particulier d'une méthode générale, résultant de sa belle théorie de la *permutabilité*, qu'il expose ensuite.

La *composition de première espèce* est l'opération

$$(3) \qquad \int_x^y F_1(x,\xi)\, F_2(\xi,y)\,d\xi.$$

Si le résultat de cette opération, que M. Volterra désigne par $F_1^\star F_2^\star$, n'est pas altéré par l'interversion des fonctions $F_1(x,y)$ et $F_2(x,y)$, ces deux fonctions sont dites *permutables* (*de première espèce*).

L'analogie qui existe entre la composition et la multiplication, et que la notation employée met bien en évidence, est très remar-

quable. Elle est si parfaite, en effet, qu'un calcul, effectué à l'aide d'opérations d'addition et de multiplication en nombre fini ou infini, reste exact si l'on remplace certaines des quantités qui y figurent par des fonctions de deux variables, et les opérations de multiplication de deux de ces quantités entre elles par des opérations de composition. Ainsi considérons le calcul qui montre que l'équation en $u$,

$$(4) \qquad v = a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_n u^n + \ldots \qquad (a_1 \neq 0),$$

est résolue par la formule

$$(4') \qquad u = b_1 v + b_2 v^2 + \ldots + b_n v^n + \ldots,$$

les $b$ étant des fonctions faciles à former des $a$. A ce calcul correspond un calcul identique, qu'il est inutile d'effectuer, et qui montre que l'équation

$$(5) \qquad G = a_1 F + a_2 \overset{\star}{F}{}^2 + \ldots + a_n \overset{\star}{F}{}^n + \ldots,$$

où $\overset{\star}{F}{}^n$ désigne le résultat de la composition de $n$ fonctions égales à $F(x, y)$, est résolue par la formule

$$(5') \qquad F = b_1 G + b_2 \overset{\star}{G}{}^2 + \ldots + b_n \overset{\star}{G}{}^n + \ldots.$$

Ce résultat se généralise beaucoup par l'introduction d'un plus grand nombre de variables à la place de $u$ et $v$. Ainsi, *à chaque équation ordinaire qu'on sait résoudre, correspond une équation intégrale dont on connaît la solution.*

On voit déjà combien grande est la portée de cette théorie. Mais pour bien faire comprendre son intérêt pratique, il faut signaler deux circonstances bien dignes d'attention :

La première est relative à la convergence des séries employées. On sait que les séries de la forme (4) que l'on considère en analyse, ne convergent, en général, que pour les valeurs assez petites des variables qui y figurent. Il n'en est pas de même des séries de la forme (5). Il suffit que la série (4) converge pour les valeurs assez petites de $u$, pour que la série (5) converge rapidement, $F(x, y)$ étant une fonction finie quelconque.

La deuxième circonstance est relative à l'unicité de la solution. On pourrait penser que la méthode employée pour résoudre l'équa-

tion (5) laisse échapper des solutions. Il n'en est rien. Dans des cas très étendus, et pour le cas précis de l'équation (5), si $a_1$ n'est pas nul, il n'y a qu'une solution. M. Volterra l'établit par un raisonnement du type indiqué plus haut à propos de l'équation (2). Le cas où $a_1 = 0$ est plus difficile à traiter; $a_h$ désignant le premier coefficient non nul dans l'équation (5), moyennant certaines hypothèses sur la fonction $G(x, y)$, il établit que cette équation a $h$ solutions, correspondant aux $h$ solutions de l'équation (4).

Par une généralisation que l'on conçoit aisément, le procédé qui fait passer de l'équation (4) à l'équation (5) conduit aussi d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles à une équation intégro-différentielle. On saura donc intégrer des catégories très générales d'équations intégro-différentielles.

La correspondance entre les intégrales de ces équations et celles des équations différentielles auxquelles elles sont liées est si profonde, que bien des propriétés des unes conduisent à des propriétés des autres. Ainsi les théorèmes d'addition se conservent, mais ils deviennent des théorèmes d'addition intégraux.

Cette théorie permet de traiter simplement bien des applications. M. Volterra montre que la recherche de la solution fondamentale de l'équation (2) se simplifie lorsque les fonctions $f$, $\varphi$ et $\psi$ sont permutables, et il résout le problème de la sphère élastique isotrope, les tensions au contour étant données.

M. Pérès a montré que des procédés analogues peuvent s'appliquer à des équations où figurent des fonctions non permutables. L'étude des fonctions permutables avec une fonction donnée $F(x, y)$ est tout de même d'un grand intérêt. M. Volterra ramène la recherche de ces fonctions à la résolution d'une équation intégrale. Dans le cas où $F(x, x)$ ne s'annule pas, cette équation intégrale est de deuxième espèce, et l'on en tire aisément les fonctions cherchées. M. Volterra démontre que deux quelconques de ces fonctions sont permutables entre elles, théorème fondamental au point de vue des applications. Il démontre aussi que ces fonctions sont représentables par la série (5), moyennant des restrictions analogues à celles qu'il faut introduire pour démontrer qu'une fonction d'une variable est représentable par une série de Taylor.

Il indique aussi ses recherches sur les cas où $F(x, x) = 0$. Il y a lieu aussi d'étudier les cas où $F(x, x)$ s'annule pour certaines

valeurs de $x$. MM. Vessiot et Pérès ont complété les résultats obtenus par lui dans cette voie.

Deux Chapitres sont consacrés ensuite à l'étude d'une autre sorte de permutabilité, que M. Volterra a appelée de *deuxième espèce*. Elle se définit comme la précédente, mais en remplaçant par des constantes les limites de l'intervalle d'intégration considéré dans la formule (3). Les principes essentiels de la théorie et de ses applications sont les mêmes que pour la permutabilité de première espèce. On obtient ainsi une nouvelle catégorie étendue d'équations intégrales et intégro-différentielles dont on saura obtenir les solutions; dans ces équations, les limites des intervalles d'intégration sont fixes.

Mais ici, la remarque faite plus haut sur la convergence des séries (5) et (5') ne s'applique plus. Ainsi, la série jouant le même rôle que la série (5') jouait dans la théorie précédente ne converge, quelle que soit la fonction $f(x, y)$, finie dans l'intervalle considéré, que si la série (4') converge quelle que soit la valeur de $v$. Le cas le plus intéressant est celui où la série (4') représente une fonction méromorphe; la série de fonctions permutables qui lui correspond est alors le quotient de deux séries convergentes.

L'application de cette théorie aux équations intégrales linéaires permet de retrouver aisément les résultats fondamentaux de Fredholm. L'Auteur l'applique à l'étude de l'équation intégro-différentielle à limite fixe analogue à l'équation (2) et obtient, dans le cas où les fonctions $f$, $\varphi$ et $\psi$ sont permutables, des résultats analogues à ceux qu'il a obtenus sur l'équation (2).

L'étude des fonctions permutables avec une fonction donnée conduit à des résultats très différents de ceux qui sont obtenus pour la permutabilité de première espèce. Les fonctions permutables avec une fonction donnée ne sont plus, en général, permutables entre elles; pour s'en convaincre, il suffit d'étudier le cas simple des fonctions permutables avec l'unité.

M. Volterra a montré la véritable nature de la permutabilité de deuxième espèce, en exposant les liens étroits qui la rapprochent de la théorie des substitutions, et en a déduit la voie par laquelle on devait chercher à obtenir toutes les fonctions permutables à une fonction donnée. Ce problème, qu'il a résolu dans un cas très général, a été résolu complètement depuis par d'autres savants.

Arrivons maintenant aux conceptions de M. Volterra sur les *phénomènes héréditaires*. Il me semble utile, à cause de son importance philosophique, d'insister un peu sur ce sujet.

Considérons le cas très simple de la torsion d'un fil. L'angle de torsion $\omega$ et le couple de torsion P sont liés, en première approximation, par la relation

$$\omega = k\mathrm{P}. \tag{7}$$

Une étude plus précise montre qu'il existe des déformations permanentes, de sorte que la valeur actuelle de l'angle de torsion dépend non seulement de l'effort de torsion actuel, mais aussi de tous les efforts passés. En supposant qu'elle en dépende linéairement, l'équation (7) est remplacée par l'équation

$$\omega(t) = k\mathrm{P}(t) + \int_{-\infty}^{t} \Phi(t, \tau)\,\mathrm{P}(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

$\Phi(t, \tau)$ est le coefficient d'hérédité. Si l'on néglige l'effet des efforts antérieurs à un instant o, l'équation (8) est une équation du type (1).

De même, dans les phénomènes dont l'étude, par les procédés classiques, conduit à des équations différentielles ou aux dérivées partielles, l'introduction de la notion d'hérédité conduit à des équations intégro-différentielles à limite supérieure variable.

Le cas où la loi de l'hérédité est invariable à travers le temps, c'est-à-dire où la fonction $\Phi(t, \tau)$ ne dépend que de la différence $t - \tau$, est très important au point de vue pratique. Dans ce cas, la relation entre les fonctions $\mathrm{P}(t)$ et $\omega(t)$ est telle que, si l'une d'elles est périodique, l'autre l'est également, de sorte que le point représentant l'état du corps décrit un cycle fermé. Réciproquement, si, en prenant pour $\mathrm{P}(t)$ une fonction périodique, on obtient pour $\omega(t)$ une fonction périodique, et cela quelle que soit la période, on peut établir que la loi de l'hérédité est invariable avec le temps. M. Volterra appelle ce théorème le *principe du cycle fermé*. Il l'avait démontré, dans son précédent Ouvrage, dans le cas de l'hérédité linéaire. Il l'établit actuellement dans le cas le plus général, à l'aide de quelques remarques très simples. Il est seulement obligé d'admettre un *postulat de dissipation*, d'après lequel l'influence des actions très anciennes est négligeable.

Une circonstance très remarquable est que les fonctions de la forme

$$\Phi(t, \tau) = \varphi(t - \tau)$$

constituent un ensemble de fonctions permutables (de première espèce). Il appelle cet ensemble le *groupe du cycle fermé*. Par suite, dans l'étude des cas où la loi de l'hérédité est invariable avec le temps, on peut utiliser la théorie de la permutabilité.

Le dernier Chapitre est consacré à la discussion approfondie de la notion d'hérédité. Une objection fondamentale, nous dit l'Auteur, semble d'abord détourner des recherches qui s'y rattachent. On a, en effet, une certaine difficulté à admettre « qu'une action puisse avoir un effet héréditaire, c'est-à-dire un effet qui se manifeste après que l'action s'est exercée ». Cette objection doit être examinée à un double point de vue, au point de vue philosophique et à celui de ses conséquences pratiques.

Au premier point de vue, le savant professeur ne dit pas nettement sa pensée. Pour ma part, je peux difficilement croire qu'il imagine l'existence réelle d'actions héréditaires. Pourtant, lorsqu'il dit : « Il existe donc *un courant d'idées* selon lesquelles la Mécanique et la Physique héréditaires n'existeraient pas d'une façon absolue », ou bien : « Il peut y avoir des divergences de principe », ou, en d'autres passages encore, il semble bien penser que la discussion est possible et qu'il ne faut pas s'en rapporter absolument à l'intuition.

Mais en tout cas, au point de vue pratique, la théorie héréditaire conserve son importance, et cela est facile à comprendre.

Reprenons l'exemple de la torsion du fil, les variations du couple de torsion étant supposées assez lentes pour qu'on puisse négliger les termes provenant de l'inertie. Bien que nous n'admettions pas l'existence des effets héréditaires, nous ne pouvons pas douter, étant donnés les résultats expérimentaux, que les efforts exercés dans le passé aient une influence sur les déformations futures du fil, et que la relation (7) ne soit pas exacte. C'est donc que les efforts passés ont modifié l'état moléculaire du fil, qui influera à son tour sur les déformations futures.

Une étude précise devrait donc faire intervenir des paramètres, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, dont la valeur fera connaître l'état du fil, et les

variations de ces paramètres seront bien probablement définies par des équations différentielles. En supposant, pour simplifier, que les variations de ces paramètres, ainsi que celles de l'angle de torsion $\omega$ et du couple P, soient très faibles, on peut admettre que ces équations sont linéaires, et même homogènes (en faisant au besoin un changement linéaire sur les variables). De même la relation qui définit $\omega$ peut être supposée de la forme

$$\omega = k\,\mathrm{P} + \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \ldots + \lambda_n\theta_n. \tag{9}$$

Le but qu'on se propose étant de déterminer $\omega$, nous devrons éliminer les paramètres $\theta$. On peut faire l'élimination de manière à obtenir une équation différentielle en $\omega$, dont l'ordre dépend du nombre des paramètres introduits. Mais cette méthode offre un inconvénient évident ; elle masque la véritable nature de l'équation obtenue, qui doit se réduire à la forme (7) lorsqu'on néglige l'influence des paramètres $\theta$. De plus, si l'on avait à reprendre l'étude du phénomène en tenant compte d'un nouveau paramètre qu'on aurait oublié auparavant, l'aspect du problème serait de nouveau complètement modifié.

On peut d'autre part, comme cela résulte de recherches bien connues de M. Lalesco sur les équations différentielles linéaires et l'équation de Volterra, faire l'élimination des paramètres $\theta$ de manière à obtenir une équation intégrale de la forme

$$\omega(t) = k\,\mathrm{P}(t) + \int_{-\infty}^{t} [\Phi_1(t,\tau)\,\mathrm{P}(\tau) + \Phi_2(t,\tau)\,\omega(\tau)]\,d\tau,$$

qui peut même, dans certains cas, être de la forme (8), et qui, en tout cas, peut s'y ramener. Ainsi, nous arrivons à la même équation que si l'on avait adopté *a priori* le point de vue héréditaire. Mais nous voyons nettement que l'introduction d'une intégrale dans l'équation (8) résulte de l'élimination des paramètres qui déterminent l'état du corps. On conçoit de même que, dans d'autres problèmes, au lieu des équations aux dérivées partielles obtenues par les procédés classiques, on obtienne des équations intégro-différentielles.

Il est intéressant de remarquer que, si les coefficients $\lambda$ et tous ceux qui interviennent dans les équations différentielles détermi-

nant les variations des $\theta$, ne sont pas fonctions du temps, le coefficient d'hérédité ne dépend que de la différence $t - \tau$. Le principe du cycle fermé est donc lié à ce fait que les seules équations différentielles linéaires admettant toujours une intégrale périodique, si l'on se donne pour leur second membreu ne fonction périodique de période quelconque, sont des équations à coefficients constants.

La méthode d'élimination qui conduit de l'équation (9) à une équation intégrale est bien préférable à celle qui conduisait à une équation différentielle. Elle conserve ce qui, dans notre ignorance des causes pouvant agir sur la valeur de l'angle de torsion, nous paraissait être l'aspect du problème. Elle montre bien que, si les coefficients $\lambda$ sont très petits, le coefficient d'hérédité est lui-même très petit, et qu'ainsi l'équation (8) diffère peu de l'équation (7) écrite en première approximation. Enfin son principal avantage est qu'elle permet d'aborder l'étude du problème sans rien savoir de la nature ni du nombre des paramètres $\theta$ ; nous pouvons même les supposer en nombre infini, et nous aurons encore une équation de la forme (8) ; la fonction $\Phi(t, \tau)$ sera seulement, dans ce cas, d'une nature un peu moins simple.

La marche à suivre en vue des applications pratiques est évidemment la suivante : de l'étude expérimentale de cas dans lesquels le couple et l'angle de torsion seront connus tous deux, on déduira des renseignements sur la fonction $\Phi$ $(t, \tau)$, et, dans le cas le plus général de l'hérédité non linéaire, sur la loi d'hérédité. On pourra peut-être parvenir à connaître assez bien cette loi ; on n'aura plus alors qu'à appliquer la théorie des équations intégro-différentielles.

L'importance pratique de la méthode dépendra donc de la plus ou moins grande facilité que l'on aura à former des lois d'hérédité rendant suffisamment bien compte des résultats de l'expérience. M. Volterra a étudié à ce point de vue les phénomènes d'*hystérésis*. Il a réussi à former des lois d'hérédité rendant compte de cette circonstance qu'aux maxima et minima de l'aimantation correspondent des maxima et minima du champ magnétique. Ce résultat devra encore être complété, car il y a d'autres circonstances essentielles dont les lois en question ne rendent pas compte. Ainsi, il n'existe aucune de ces lois pour laquelle, si le champ magnétique est une fonction périodique quelconque du temps, la

valeur obtenue pour l'aimantation soit toujours une fonction périodique.

La recherche des lois effectives d'hérédité correspondant aux différents phénomènes physiques apparaît donc comme un problème non résolu dont la solution peut exiger encore de grands efforts. Mais il n'est pas nécessaire d'attendre le résultat de ces efforts pour constater que les méthodes nouvelles de M. Volterra permettent de résoudre un grand nombre de problèmes que l'on n'aurait pas pu aborder sans elles, et pour penser que leurs applications pratiques apparaîtront chaque jour plus importantes. D'autre part, indépendamment de tout but pratique, la beauté et la généralité des principaux théorèmes, l'importance et la simplicité des résultats obtenus sur des problèmes qui paraissaient insolubles, il y a bien peu de temps, font de la théorie des équations intégro-différentielles une des plus belles conquêtes de l'Analyse au cours de ces dernières années, et l'élégance de la rédaction, faite par M. J. Pérès d'après les leçons de M. Volterra, fait du Livre où cette théorie est exposée une des lectures les plus attrayantes que puisse se proposer un mathématicien.

PAUL LÉVY.

---

HAUSZLEITER (HEINRICH). — ZUR THEORIE DER PFAFFSCHEN SYSTEME. *Inaugural-Dissertation der hohen philosophischen Fakultät der Königlichen Universität Greifswald zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde.* Une brochure in-8, II-59 pages. Berlin, R. Trenkel, 1909.

Cette thèse, faite sous la direction de M. F. Engel, se rattache à ses recherches sur le système de Pfaff (*Leipziger Berichte*, t. XLI, 1889; t. XLII, 1890) et à sa *Neue Methode in der Invariantentheorie der Differentialgleichungen* (*Ibid.*, t. LVII, 1905). Elle a pour but d'étudier le parti que l'on peut tirer, pour la classification des systèmes de Pfaff,

$$(1) \qquad dx_{n+j} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}(x_1, \ldots, x_{n+m})\,dx_k = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

de la considération des familles (F) de courbes intégrales possé-

dant une *condition d'intersection* linéaire : par définition, une telle famille (F) dépend d'un nombre fini de constantes arbitraires $c_1, \ldots, c_l$; elle ne satisfait à aucune équation entre les $x_i$ et les $dx_i$ distincte des équations (1); et les conditions entre les $c_h$ et les $dc_h$ qui expriment que deux courbes, infiniment voisines, de la famille se rencontrent, comprennent une équation de Pfaff et une seule.

L'Auteur donne une méthode générale de recherche de ces familles (F), et l'applique effectivement aux deux cas $n = 2$ et $n = 3$. Cette étude fait intervenir les opérateurs linéaires

$$(2) \qquad A_k f = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj} \frac{\partial f}{\partial x_{n+j}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

ils définissent $n$ opérations crochets

$$(3) \qquad (A_k f, Xf) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

que l'on peut appliquer à toute expression $Xf$ linéaire et homogène par rapport aux $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, à coefficients fonctions des $x_i$ : on les applique effectivement, d'abord aux $A_h f$ eux-mêmes, puis aux expressions ainsi obtenues, et ainsi de suite : et ce sont les nombres $s_1, s_2, \ldots$ des symboles indépendants des précédents, et indépendants entre eux, que donnent ces opérations successives qui caractérisent les diverses possibilités, dans une certaine mesure.

Bornons-nous au cas $n = 2$, qui est le plus simple, et où les résultats de l'Auteur sont plus précis; supposons que le système (1) n'admette pas de combinaison intégrale. Il existe alors un entier $p$ tel que aucun des nombres $s_1, s_2, \ldots, s_p$ n'est nul et que leur somme est égale à $m$. Si ces nombres $s_1, s_2, \ldots, s_p$ ne sont pas tous égaux à 1, on obtient en général une famille (F) et une seule; dans le cas contraire, le système est réductible à la forme canonique

$$dx_{h+1} - x_h dx_1 = 0 \qquad (h = 2, 3, \ldots, n+1),$$

qui définit un élément de contact d'ordre $n$ dans le plan.

E. Vessiot.

CHÂTELET (A.). — Leçons sur la Théorie des Nombres (*Modules. Entiers algébriques. Réduction continuelle*), professées au Collège de France. 1 vol. in-8, x-156 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Cet Ouvrage contient, à quelques additions près, les Leçons professées par M. Châtelet au Collège de France, en 1912, pour le cours de la fondation Peccot. Il ne suppose connu du lecteur que des notions élémentaires d'Arithmétique, la théorie des équations algébriques telle qu'elle est enseignée en Mathématiques spéciales, et enfin quelques définitions relatives aux ensembles de points et aux intégrales multiples. Partant de là, il parvient, en 150 pages, à donner : une introduction relative aux formes et aux substitutions linéaires, au calcul des tableaux et à la Géométrie des Nombres; une théorie des modules de points; l'analyse diophantienne du premier degré (systèmes réduits d'Hermite, théorème de Heger); les éléments de la théorie des corps algébriques et de leur arithmétique, la définition des idéaux, la décomposition univoque des entiers en idéaux premiers; la réduction continuelle d'Hermite, deux théorèmes fondamentaux de Minkowski; la recherche des unités d'un anneau algébrique; le théorème d'Hermite qui dit qu'il n'y a qu'un nombre fini de corps ayant un discriminant donné; la notion de classes d'idéaux, le fait que ces classes sont en nombre fini; l'extension donnée par Dedekind dans l'ensemble de tous les entiers algébriques à la propriété du plus grand commun diviseur des entiers ordinaires. Il faut ajouter à cela trois Notes : la première sur les périodes des fonctions; la seconde qui est un exemple de corps algébrique avec calculs détaillés; la troisième relative aux congruences par rapport à un idéal. De plus, quelques indications sont éparses au cours du Volume sur d'autres points intéressants.

Bien que, sur beaucoup de points, ce Livre n'atteigne pas les limites de la science actuelle, n'ayant l'intention que d'être une introduction à l'étude de traités plus complets, néanmoins, étant données ses dimensions restreintes, on ne peut qu'être frappé de son extraordinaire concision. Comment cette concision a-t-elle pu être atteinte?

D'abord, et pour n'avoir plus ensuite que des éloges à adresser au travail de M. Châtelet, disons que cette concision est un peu

exagérée et qu'elle n'est pas toujours atteinte sans quelque petit dommage pour la clarté. Quelques pages de plus, une dizaine, auraient suffi pour compléter certaines explications un peu sommaires, et pour mieux mettre en évidence certains résultats fondamentaux qui sont incorporés au milieu du texte sans que rien les distingue.

Mais hâtons-nous maintenant de reconnaître que la concision de l'Ouvrage tient à à d'autres causes, plus profondes et plus louables; à savoir, que M. Châtelet se place toujours au point de vue le plus élevé et emploie des méthodes très compréhensives. C'est ainsi qu'il fait un usage constant des tableaux.

Le calcul des tableaux, qui a été appelé par certains géomètres anglais : *Universal algebra*, comprend presque tous les calculs comme cas particuliers. De plus, une égalité entre deux tableaux d'ordre $n$ équivaut à $n^2$ égalités ordinaires. On conçoit la rapidité avec laquelle de telles égalités permettront de traiter les questions, lorsqu'on pourra les y employer. Leur application à la théorie des corps algébriques est, je crois, une innovation de M. Châtelet. On avait bien déjà remarqué que tout tableau satisfait à une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de ses éléments; et que, réciproquement, toute équation algébrique peut être supposée formée de cette façon. D'où il résulte que la théorie d'un corps algébrique doit se confondre avec celle de l'ensemble des fonctions rationnelles à coefficients rationnels d'un tableau déterminé. Mais cette idée n'avait pas encore été, que je sache, mise en œuvre.

M. Châtelet représente un nombre $\alpha$ d'un corps algébrique K par un tableau $PEP^{-1}$ où E est un tableau dont tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale qui sont égaux, le premier au nombre $\alpha$, les autres à ses conjugués. Quant au tableau P, il est le même pour tous les nombres du corps. Sa première colonne est constituée par des nombres formant une base de ce corps, les autres par les nombres conjugués. Ce tableau $PEP^{-1}$ est à éléments rationnels. Les opérations rationnelles effectuées sur les nombres du corps correspondent aux mêmes opérations effectuées sur les tableaux correspondants.

Quant à un idéal entier du corps, l'Auteur le représente par un tableau P dont la première colonne est constituée par des nombres

formant une base de cet idéal, les autres par les nombres conjugués. On sait que $n$ entiers d'un corps de degré $n$ ne forment pas toujours la base d'un idéal; ils doivent, pour en former une, satisfaire à certaines conditions. M. Châtelet met ces conditions sous la forme suivante : Ayant formé avec ces $n$ nombres un tableau P, et ce tableau P étant choisi pour former les tableaux $PEP^{-1}$ dont on a parlé plus haut, tous ceux de ces tableaux $PEP^{-1}$ qui correspondent à des entiers du corps doivent être à éléments entiers.

La théorie des tableaux est dans un rapport étroit avec celle des modules de points. Un point, dans l'espace à $n$ dimensions, est un ensemble de $n$ nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$. La somme, la différence de deux points $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$ sont, respectivement, les points $p_1 \pm p'_1$, $p_2 \pm p'_2$, $\ldots$, $p_n \pm p'_n$. On appelle, d'après M. Dedekind, *module de points* un ensemble de points tels que la somme et la différence de deux quelconques d'entre eux soit dans l'ensemble. Le module est de rang fini quand ses points peuvent se représenter par $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_m A_m$; $A_1$, $A_2, \ldots, A_m$ étant certains points; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ parcourant tous les entiers ordinaires. La valeur la plus petite du nombre $m$ de points qu'il faut prendre pour représenter ainsi le module s'appelle son *rang*. La *dimension* du module, c'est le nombre de dimensions de l'espace qui en a le moins possible et qui contient le module. Ceci posé, M. Châtelet appelle *module type* un module dans lequel le rang est égal à la dimension; et il a remarqué qu'un grand nombre de propriétés (approximations de plusieurs incommensurables par des fractions de même dénominateur, base des entiers d'un corps, base d'un idéal, unités fondamentales) présentant des analogies manifestes se ramènent à un énoncé unique : *Pour qu'un module soit type, il faut et il suffit que le nombre de ses points dont les coordonnées sont toutes plus petites en valeur absolue qu'un nombre donné soit fini.* C'est la grande compréhension de cet énoncé et la notation par tableaux qui permettent à l'Auteur d'obtenir, aussi rapidement qu'il le fait, tous les résultats qu'on a énumérés plus haut.

La relation entre la théorie des modules types et celle des tableaux consiste en ce qu'un module type de rang $n$ est défini par les coordonnées de $n$ de ses points convenablement choisis, c'est-à-

dire par le tableau des coordonnées de ces points. Un module a, d'ailleurs, une infinité de tableaux; ces tableaux sont dits *équivalents*. La réduction d'un module M consistera à trouver, parmi les tableaux de ce module, des tableaux dits *réduits* de façon : 1° que la définition soit indépendante du module; 2° que ces tableaux réduits puissent être rangés dans un ordre déterminé, indépendant aussi du module. On y arrive en prenant pour premier point du tableau réduit un point $A_1$ du module M dont la distance à O (distance généralisée de Minkowski) soit la plus petite possible; pour second point un point du module M, qui n'appartienne pas au module défini par $A_1$ et dont la distance à O soit encore la plus petite possible; et ainsi de suite. C'est une généralisation de la représentation géométrique connue pour la réduction des formes quadratiques. La considération des tableaux réduits pourra servir à reconnaître si deux modules sont identiques, et à trouver tous les modules satisfaisant à une condition donnée.

Mais il arrive dans beaucoup d'applications qu'un module n'est défini qu'à une dilatation près, c'est-à-dire que les coordonnées $p_1, p_2, \ldots, p_n$ d'un de ses points peuvent être remplacées par $\lambda_1 p_1$, $\lambda_2 p_2, \ldots, \lambda_n p_n$; les $\lambda$ étant des paramètres qui sont les mêmes pour tous les points. Il est utile alors que la réduction satisfasse à cette nouvelle condition que, si l'on fait sur M une dilatation, les tableaux réduits restent réduits. La réduction à laquelle M. Châtelet est ainsi conduit coïncide avec la réduction continuelle d'Hermite. Deux théorèmes de la Géométrie des Nombres de Minkowski donnent des conditions nécessaires pour qu'un tableau soit réduit.

A tout nombre algébrique de degré $n$ correspond un point dans l'espace à $n$ dimensions, celui qui a pour coordonnées ce nombre et ses conjugués. Les points correspondant aux entiers d'un corps forment un module; il en est de même de ceux correspondant aux nombres d'un idéal. Les méthodes précédentes, appliquées à ces tableaux, donnent avec rapidité les théorèmes relatifs à la base des entiers d'un corps, à celle d'un idéal, à l'existence des unités fondamentales, à la limitation du nombre de classes d'idéaux.

Sans entrer dans plus de détail sur ces démonstrations, je crois que j'en ai assez dit pour montrer qu'elles sont très intéressantes. J'en dirai autant de l'Ouvrage tout entier. Et même la rédaction un

peu sommaire que j'ai signalée plus haut aura peut-être de bons effets. C'est un éloge cliché que celui qui consiste à dire d'un livre qu'il forcera les lecteurs à réfléchir. Mais je crois qu'on ne peut, à aucun point de vue, le refuser au Livre de M. Châtelet.

E. Cahen.

---

ZORETTI (L.). — Leçons de Mathématiques générales, avec une Préface de M. Paul Appell. 1 vol. gr. in-8, xiv-753 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1914.

Le Livre de M. L. Zoretti n'est pas le premier en date; il a eu des prédécesseurs, tels que les Traités de MM. Vogt et Fabry; et nul n'ignore les services incomparables que ceux-ci ont rendus, non seulement à ceux qui étudient, mais encore à ceux qui enseignent les Mathématiques générales. Cependant, il est hors de doute que le nouvel Ouvrage marque un progrès : « Le Livre de M. Zoretti, écrit M. Paul Appell dans la belle Préface qu'il lui consacre, se différencie des Traités qui ont été spécialement écrits pour telle ou telle catégorie d'étudiants, en ce qu'il s'adresse à toutes. » On ne peut, en quelques mots, donner une idée plus nette du but que l'Auteur s'est proposé et a atteint; sa préoccupation n'a pas été uniquement de préparer de futurs mathématiciens à recevoir une culture plus étendue; sans sacrifier ce point de vue, qui a naturellement son intérêt, il a fait œuvre beaucoup plus large; il s'est adressé, il nous le dit lui-même, « à tous ceux qui, au cours de leur carrière, se sont trouvés en présence de quelque difficulté d'ordre mathématique ». Ce but, M. Zoretti l'a réalisé par la clarté de son exposition et par la simplicité de ses démonstrations, qui n'exclut nullement la rigueur.

L'Ouvrage comprend trois parties : 1° Géométrie et Géométrie analytique; 2° Algèbre, Théorie des Fonctions, Dérivées et Applications; 3° Calcul intégral et Applications.

La Mécanique est comprise dans les Applications : l'Auteur s'est absolument interdit d'en exposer les principes et les théorèmes généraux, estimant qu'il est impossible de le faire brièvement. Quant aux questions d'ordre purement mathématique qui se rattachent à cette branche (vecteurs, cinématique, centre de gra-

vité, calcul des forces vives, etc.), nous les trouverons traitées dans le courant du Livre, à la suite des théories analytiques dont elles constituent les applications immédiates.

Nous allons maintenant parcourir l'Ouvrage dans ses différentes parties, en relevant les points sur lesquels l'Auteur a voulu fixer l'attention.

Première Partie. — Après quelques définitions et propositions fondamentales relatives aux grandeurs dirigées, nous trouvons tout d'abord un important Chapitre consacré aux coordonnées. Le mot *coordonnée* est défini dans son acception la plus générale : « On appelle *coordonnées* des nombres dont la connaissance permet de définir la position d'une figure dans l'espace. » Cette définition est valable pour une figure absolument quelconque : on la trouvera appliquée aux cas particuliers suivants : détermination d'un point, d'une direction, d'une droite, d'un vecteur, de la position d'un corps solide (angles d'Euler), détermination d'une courbe ou d'une surface. Les formules du changement de coordonnées ne sont développées que dans le cas du plan, tout au moins quand on modifie la direction des axes.

Ensuite, nous apprenons à établir les formules de Géométrie analytique les plus *usuelles*, relatives aux figures les plus simples. Après une étude sommaire des principaux problèmes qui concernent la droite et le plan, nous abordons la théorie des vecteurs : celle-ci est développée un peu en détail, à cause de l'importance de ses applications, si nombreuses en Mécanique et en Physique. Par contre, de ce qui se rapporte au cercle, à la sphère, aux coniques et aux quadriques, nous ne trouvons que l'indispensable : toutes les questions de pure géométrie qui s'y rattachent et qui restent lettre morte dans les applications, sont systématiquement laissées de côté. Pour les coniques, l'Auteur s'attache surtout à donner les modes de représentation les plus simples de ces courbes, et à établir les propriétés géométriques élémentaires qui conduisent aux méthodes pratiques permettant de les tracer. Pour les quadriques, il a surtout en vue l'étude de la forme de ces surfaces, et se borne à signaler (dans les deux cas classiques), la présence de génératrices rectilignes. Enfin, dans un dernier Chapitre, il nous dit quelques mots de certaines autres courbes et surfaces usuelles (cycloïdes et

épicycloïdes, spirales; surfaces de révolution, cônes et cylindres, conoïdes, surfaces réglées).

Seconde Partie. — Nous commençons maintenant l'Algèbre par l'étude des nombres complexes, étude de la plus haute importance, à cause des généralisations qu'elle permet; nous sommes ainsi en possession d'un nouvel et puissant instrument de calcul : un seul exemple nous en montre toute la portée : c'est la résolution, au moyen de la formule de Moivre, du problème de la multiplication des arcs. Tout à fait indispensable aussi est la formule du binome de Newton qui nous est démontrée par induction complète. Les déterminants constituent un outil non moins précieux; leur théorie complète, ne pouvait, il est vrai, trouver place dans le cadre de ce Traité : l'Auteur nous montre seulement comment la résolution d'un système d'équations du premier degré amène à les introduire, et il en expose les propriétés les plus importantes en s'adressant à des déterminants d'ordre 3.

A la suite de ces compléments divers de calcul algébrique, nous passons à l'étude des infiniment petits et des infiniment grands; nous apprenons à marquer la différence entre l'infiniment petit mathématique et l'infiniment petit physique : par les premiers, il faut entendre des quantités variables tendant vers zéro, tandis que les autres sont des quantités fixes et très petites. Seulement, on peut, en général, leur appliquer les règles de calcul relatives aux infiniment petits mathématiques.

Nous arrivons aux séries. Au point de vue des applications, il importe de savoir reconnaître, non seulement si une série converge, mais encore si elle converge rapidement. A côté des règles classiques de convergence, nous trouvons donc des renseignements sur rapidité de la convergence, et aussi sur le calcul pratique de la somme d'une série avec une approximation donnée; à ce sujet, il convient de remarquer que l'erreur du calcul numérique provient de trois origines bien distinctes : 1° d'une part, on supprime les termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$; 2° d'autre part, on remplace les $n$ premiers termes par des valeurs qui ne sont en général qu'approchées; 3° l'addition de ces $n$ termes une fois faite, il n'y a ordinairement pas lieu de garder tous les chiffres décimaux de la somme. D'où la nécessité de répartir l'erreur totale que l'on s'est fixée entre ces trois sources d'erreur.

Très importantes sont les séries alternées, dont le terme général décroît et tend vers zéro, car on est assuré de leur convergence, et l'on connaît immédiatement une limite de l'erreur commise en s'arrêtant au $n^{\text{ième}}$ terme : la démonstration nous en est fournie très simplement à l'aide d'une représentation géométrique. Nous apprenons, en outre, à faire la distinction fondamentale entre les séries absolument convergentes et semi-convergentes. Les premières sont les plus maniables, car on peut en modifier l'ordre des termes, les ajouter entre elles, etc. Enfin, les termes d'une série peuvent être des fonctions d'une variable $x$. L'exemple le plus important est celui des séries entières, qui, dans l'intervalle de convergence, peuvent s'ajouter et se multiplier comme des polynomes. Un autre exemple, également important, est celui des séries trigonométriques.

La notion de fonction s'introduit d'elle-même quand on veut caractériser un phénomène quantitativement : si compliqués que soient les phénomènes que la science ait eu jusqu'ici à étudier, on a pu les représenter en combinant un nombre assez restreint de fonctions simples. Nous passons donc en revue ces diverses fonctions. L'étude de la fonction exponentielle nous est présentée d'une façon tout à fait intuitive : la démonstration complète du fait que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ a pour limite le nombre $e$ est laissée de côté. Le développement de $e^x$ en série entière nous amène à l'étude de cette fonction pour $x$ complexe, et met en évidence ses relations avec les fonctions circulaires.

D'une manière tout aussi intuitive est exposée l'étude des dérivées. Les éléments principaux de cette théorie tels que le théorème de Rolle et la formule des accroissements finis ne sauraient faire ici l'objet d'une démonstration rigoureuse : ils nous sont présentés très simplement au moyen d'une représentation graphique. Cette dernière formule a pour conséquence les deux faits suivants : si la dérivée d'une fonction est nulle, la fonction est constante; et si la dérivée est très petite, la fonction est presque constante, c'est-à-dire : elle s'écarte peu de l'une des valeurs qu'elle prend dans l'intervalle considéré. Il importe de remarquer que la réciproque de cette dernière proposition n'est pas vraie; car une courbe située dans une bande très étroite parallèle à l'axe $Ox$ est susceptible d'y

présenter des sinuosités nombreuses; celles-ci fourniront, pour la dérivée, des valeurs non nulles ou même très grandes dans certains cas. Relativement aux fonctions de plusieurs variables, l'Auteur insiste sur la notion de dérivée dans une direction. Enfin, il nous initie aux différentielles, qui ne constituent au fond qu'une notation nouvelle, mais commode.

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier la variation d'une fonction, et, comme application, de construire une courbe définie par son équation : pratiquement, des considérations de symétrie pourront permettre de simplifier ce problème; la détermination de certains éléments remarquables (asymptotes, points d'inflexion) augmentera la précision du tracé. Les courbes unicursales sont importantes dans les applications; nous en trouvons quelques exemples.

Après avoir passé en revue les développements en série des fonctions les plus simples (formules de Mac-Laurin et de Taylor), nous étudions les applications des théories précédentes à la Géométrie et à la Mécanique, c'est-à-dire, d'une part, les propriétés infinitésimales des courbes et des surfaces (enveloppes, courbure, surfaces applicables, cartes géographiques, etc.), d'autre part, la Cinématique. Celle-ci a reçu un développement assez important : le problème de la distribution des vitesses dans un corps solide et la composition des accélérations y sont traités.

De la théorie des équations n'est exposée que la partie vraiment indispensable dans la pratique, à savoir : la résolution des équations numériques; celle-ci comporte deux opérations qui sont : d'abord la séparation des racines, ensuite leur calcul approché s'opérant par la méthode des parties proportionnelles de Newton ou par celle des approximations successives. En outre, la résolution de l'équation du troisième degré, lorsque les trois racines sont réelles, s'effectue au moyen des Tables de logarithmes. Enfin, un important Chapitre est consacré aux calculs numériques : la discussion de divers problèmes de la théorie des erreurs, les Tables numériques, la règle à calcul, la méthode graphique et les abaques y sont la matière d'intéressants développements.

Troisième Partie. — Légitimer la définition analytique de l'intégrale définie eût été dépasser le cadre de l'Ouvrage, et l'Auteur s'en est bien gardé : il se borne à nous en montrer la signification

géométrique au moyen de la notion d'aire : celle-ci permet en outre d'établir un lien entre intégrale et primitive. Après avoir étudié les principales propriétés de l'intégrale (changement de variable; formule de la moyenne, dérivation sous le signe d'intégration, etc.) et examiné les méthodes d'intégration (recherche des primitives dans les cas classiques), nous passons aux généralisations diverses de la notion d'intégrale : limites ou élément différentiel infinis, intégrales curvilignes (différentielles totales) intégrales multiples; toute cette partie qui intervient très souvent en Physique est traitée assez longuement; en particulier, les formules de Green et d'Ostrogradski y sont démontrées, en vue de leurs applications, que nous rencontrerons plus loin, à propos des champs de vecteurs. Suivent deux chapitres très courts : l'un est consacré à l'étude de quelques propriétés élémentaires des fonctions elliptiques, l'autre à la série de Fourier; l'étude, toute théorique, de la convergence de cette série, est laissée de côté. Nous apprenons seulement à en calculer les coefficients et à comprendre la signification physique de ceux-ci.

Le calcul intégral a des applications géométriques et mécaniques très nombreuses : calcul des longueurs, des aires et des volumes; recherche des centres de gravité, des moments d'inertie; calcul des forces vives et des quantités de mouvement, théorie des champs de vecteur, etc. Pour résoudre ces différents problèmes, il est utile, sinon indispensable de savoir effectuer le calcul approché d'une intégrale définie; cette opération peut s'accomplir, soit au moyen de la formule de Simpson, soit à l'aide du planimètre d'Amsler.

Nous passons alors aux équations différentielles ordinaires : une telle équation admet une infinité de solutions dépendant de constantes arbitraires; naturellement, il ne peut être question de démontrer ici des théorèmes d'existence : l'Auteur se borne, étant donnée une équation du premier ordre, à faire comprendre que par un point du plan il passe en général une courbe intégrale, et à montrer comment on pourrait la représenter par un développement de Taylor, la validité de ce développement étant admise. Après avoir examiné les types usuels d'équations des deux premiers ordres qu'on sait intégrer, il expose dans ses grandes lignes, la théorie des équations linéaires à coefficients constants, et dit un mot des systèmes différentiels.

Les équations différentielles donnent lieu, elles aussi, à de nombreuses applications : en Géométrie, le problème des équations intrinsèques, la recherche des lignes asymptotiques ou géodésiques, des lignes de courbure d'une surface conduisent à des équations différentielles. De même, le problème des trajectoires orthogonales. Il en est également ainsi de tous les problèmes de Dynamique; sur ce sujet, l'Auteur s'est borné à quelques généralités, et il a laissé de côté les applications aux questions classiques de dynamique du point : mouvement d'un point sous l'action d'une force centrale, pendule, etc. Quelques-unes d'entre elles sont seulement posées en exercices.

Un dernier chapitre, très bref, contient quelques renseignements sur les équations aux dérivées partielles. Par quelques exemples simples, nous apprenons que leur intégration introduit, non plus des constantes, mais des fonctions arbitraires; on détermine celles-ci au moyen de conditions aux limites. S'il s'agit, par exemple, de l'équation de Laplace, on est conduit à se poser le problème suivant : « Déterminer une fonction harmonique, prenant le long d'une courbe (ou sur une surface donnée) une succession de valeurs données ». Naturellement, l'Auteur se borne à énoncer ce problème.

Comme on le voit, les Leçons de M. Zoretti contiennent le développement d'un programme très étendu. Dans le choix des matières, apparaît cette préoccupation constante : développer « tout ce qui est utilisable, y ajouter ce qui est, soit nécessaire, soit simplement commode pour l'exposé des théories reconnues indispensables, rejeter systématiquement tout le reste ». La longueur de l'Ouvrage n'en compromet pas la clarté : les différents Chapitres ont été, dans la mesure du possible, rendus indépendants les uns des autres : si bien qu'il est très facile d'y trouver un renseignement sur une question déterminée : mieux encore, dans ce but, un Index alphabétique est placé à la fin du Livre, à côté d'un tableau de formules.

Un soin considérable a été apporté dans le choix des exercices, qui ne sont pas de pures spéculations, mais bien de véritables travaux pratiques, susceptibles d'intéresser le lecteur et de lui servir de guide.

« En résumé, dit M. Appell, l'Ouvrage de M. Zoretti constitue une conception élevée et nouvelle de l'enseignement des Mathématiques générales. » On ne peut mieux conclure, et malgré les divergences de vues qui existent sur cet enseignement, né d'hier, tous reconnaîtront que M. Zoretti a fait vraiment œuvre utile; tous accorderont à son Livre l'estime et la confiance qu'il mérite.

G. Bouligand.

---

GUIOT (J.). — Le Calcul vectoriel et ses applications a la Géométrie réglée. 1 vol. gr. in-8, III-128 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1912.

L'Auteur donne d'abord un très précis et très complet historique du développement du calcul vectoriel à partir des *quaternions* d'Hamilton et des *formes* de Grassmann. C'est en même temps la meilleure bibliographie à consulter sur la question.

L'application spéciale que fait ici M. J. Guiot du calcul vectoriel est la suite des travaux de MM. Genty, Buchheim et A. Demoulin. En désignant par $\mathbf{r}$ le rayon vecteur d'un point quelconque, par $\mathbf{u}$ l'inverse de la normale à un plan, on a l'équation fondamentale

$$\mathbf{ru} + 1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad ux + uy + wz + 1 = 0,$$

qui met immédiatement en évidence la corrélation des coordonnées cartésiennes et des coordonnées tangentielles. Si $\mathbf{u}$ est fixe, $\mathbf{r}$ variable décrit un *plan* (ou une *droite* dans le plan). C'est l'équation d'un plan normal à $\mathbf{u}$ (ou d'une droite). Si $\mathbf{r}$ est fixe, $\mathbf{u}$ détermine un plan variable ayant pour enveloppe le point $\mathbf{r}$. C'est l'équation du point $\mathbf{r}$. A chaque propriété, à chaque théorème relatif aux points, la formule fait correspondre clairement une propriété ou un théorème corrélatif pour le plan ou la droite. L'Auteur en déduit alors tout le long de l'Ouvrage, sur deux colonnes parallèles, ces propriétés corrélatives correspondantes, absolument comme dans les *Coordonnées parallèles et axiales* de M. d'Ocagne, par exemple. Cela peut être un procédé d'invention intéressant et fécond pour mettre en évidence de nouvelles propriétés des figures. M. J. Guiot étudie ainsi successivement le plan, la droite, les quadriques, les complexes linéaires, les con-

gruences linéaires, les gerbes de complexes, les complexes en involution, enfin les complexes quadratiques.

La notation que l'Auteur emploie est celle de Heaviside, Föppl, Daniels, etc., la même que celle de la Mécanique de Silberstein. A la suite des éléments du calcul vectoriel, une étude intéressante de la dyadique indique déjà comment elle donne la représentation générale des quadriques.

ALEX. VÉRONNET.

## MELANGES.

### L'ABBÉ BOSSUT

(**A l'occasion du centenaire de sa mort**);

PAR M. E. DOUBLET,
astronome à l'Observatoire de Bordeaux

(*Suite*) [1].

Quand, à l'avènement de Louis XVI, Turgot fut appelé au Contrôle général des finances, il jugea qu'une des choses les plus utiles pour donner au commerce intérieur tout le développement possible était l'extension et l'amélioration des voies navigables. Il s'occupa de former un plan général de canalisation du royaume, sans se dissimuler que, quand on en viendrait à l'exécution, il lui faudrait des praticiens instruits, et en même temps, il voulait avoir auprès de lui des hommes d'une capacité indiscutable, qu'il pourrait consulter en toute conscience.

Dans la *Correspondance inédite*, échangée entre Turgot et Condorcet et qui a été publiée par M. Ch. Henry, on trouve de nombreuses lettres relatives aux questions de canalisation. Dans une de ces lettres, Condorcet déclare que Bossut est un des hommes les plus vrais qu'il connaisse.

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, mai 1914, p. 158.

Condorcet proposa au ministre de former une Commission qui se composerait de d'Alembert, de Bossut et de lui-même. Les services des commissaires seraient gratuits, si ce n'est que l'on rembourserait à Bossut, le seul des trois qui fût un praticien, les frais de voyage qu'il pourrait avoir à faire pour examiner sur les lieux les différents travaux entrepris. Nous regrettons qu'il ne nous soit pas possible de citer entièrement cette lettre, qui est de la fin de 1775.

« ... Nous ne voudrions d'aucuns appointements, circonstance qui ferait honneur à la Géométrie. L'abbé Bossut, qui est le plus exercé ou même le seul exercé aux expériences, se transporterait sur les lieux quand il serait besoin, seulement en payant ses voyages. Le nom de M. d'Alembert ferait respecter la Commission, qui serait en même temps une espèce d'hommage que le Gouvernement rendrait à son génie et à ses travaux sur les fluides, dont il a créé la véritable théorie. On ne soupçonnerait pas l'abbé Bossut de ne pas connaître assez la pratique. Nous sommes tous trois accoutumés depuis longtemps à avoir l'un en l'autre une confiance entière. Vous nous connaissez assez pour être sûr que jamais nous ne ferons une affaire d'argent... »

« L'abbé Bossut m'a fait un modèle de lettre de bureau en cas que ce projet vous convienne. Il me semble que *point d'argent* est ici, comme *sans dot* une raison où il n'y a rien à dire... »

La Commission fut nommée, mais elle disparut en même temps que le grand Ministre. Toutefois Bossut avait été mis à même de faire des expériences utiles. Les résultats en furent publiés sous le titre de *Nouvelles Expériences sur la résistance des fluides*, par MM. d'Alembert, Bossut, de Condorcet. Il va sans dire que, dans les éditions ultérieures de son *Traité d'Hydrodynamique*, Bossut inséra les résultats donnés par les expériences mentionnées plus haut.

Turgot avait donné une autre preuve de l'importance qu'il attachait aux questions d'Hydrodynamique en créant une chaire consacrée à l'enseignement de cette science, et il confia cette chaire à Bossut. Le 20 octobre 1775, le Ministre adressa au nouveau professeur une longue lettre ([1]) dont voici un extrait :

---

([1]) *Voir* le Livre de M. Henry, et l'*Essai sur le Ministère de Turgot*, de M. Foncin.

« ... Le Roi, qui désire vivement de procurer à ses peuples toutes sortes d'avantages, se propose de faire suivre avec la plus grande activité les ouvrages déjà commencés en ce genre et de les multiplier autant qu'il sera possible. Chargé de l'exécution de ses vues, je ne me dissimule pas l'obstacle qu'y met l'imperfection où est jusqu'ici la science du mouvement des fluides nécessaire pour les diriger, et surtout l'espèce de séparation qui se trouve encore dans cette science entre la spéculation et la pratique. Des génies du premier ordre ont établi des théories profondes ; mais ces théories sont trop peu applicables à la pratique ; trop peu connues de la plus grande partie des hommes d'art qui ont à opérer. Ceux-ci sont, dans le plus grand nombre de cas, réduits à travailler d'après des principes précaires, qui ont besoin le plus souvent d'être modifiés par une sorte de tâtonnement fondé sur la seule routine ».

« Il est donc nécessaire pour être en état de projeter et d'exécuter avec sûreté, et pour ne pas être exposé à tomber dans des erreurs ruineuses, de travailler à perfectionner l'art même, à en répandre la connaissance, à former un grand nombre d'artistes qui réunissent à l'étude des vrais principes de la théorie le secours de l'expérience, qui sachent les concilier ou les suppléer l'une par l'autre, et en tirer des règles sûres pour opérer avec succès et vaincre les difficultés... ».

« J'ai cru ne pouvoir mieux atteindre ce but qu'en établissant un enseignement public, où les jeunes gens puissent s'instruire également dans la théorie et dans la pratique... ».

« Le succès de vos Ouvrages sur l'Hydraulique, et le suffrage que les plus célèbres géomètres de l'Europe leur ont accordé, ont déterminé le Roi à vous choisir pour vous charger de cet enseignement. »

Les leçons, qui commencèrent au mois de novembre suivant, eurent lieu chez les P. P. de l'Oratoire de la rue Saint-Honoré.

De tout temps, la jeunesse a été volontiers indisciplinée. On lit dans une lettre de Condorcet à Turgot : « A propos, MM. les élèves qui suivaient la chaire d'Hydraulique, ont imaginé d'y être un peu plus bruyants que la décence ne le permettait. M. l'abbé Bossut en a informé M. Perronet qui a imaginé de ne plus les envoyer. »

Condorcet semble avoir eu en faible estime le corps des Ponts

et Chaussées de son temps, y compris Perronet qu'il traite quelque part d'homme « fort ignorant et fort vain ».

Quoi qu'il en soit, cette chaire subsista jusqu'à la Révolution. Nous voyons Bossut s'y faire suppléer par Monge en 1780. Plus tard, il la céda au géomètre Charles, qu'il ne faut pas confondre avec l'inventeur des aérostats à gaz hydrogène. Mais celui-ci étant mort en 1791 à l'âge de 39 ans, Bossut demanda à rentrer en possession de cette place, inutilement d'ailleurs, à ce qu'il semble.

C'était une grosse perte pour lui, car ses appointements montaient à 6000 livres, ce qui était considérable pour l'époque. Il perdit encore sa place d'examinateur, et il ne lui resta plus pour subsister que la vente de ses ouvrages, sans doute fort diminuée. La gêne contribua à développer en lui une misanthropie dont il souffrit beaucoup pendant ses dernières années.

Il reçut toutefois quelques secours du « Bureau de Consultation » (ce Bureau était chargé de répartir les subventions consacrées aux progrès des Sciences et des Arts, ainsi que les secours accordés aux littérateurs, aux savants, aux artistes) et il fut autorisé à loger au Louvre.

Sa pauvreté ne l'empêcha pas d'ailleurs de travailler. A une époque un peu antérieure à la Révolution, il avait pris part à une grande entreprise, la publication de l'*Encyclopédie méthodique*.

Le succès de la grande publication de Diderot et d'Alembert avait été immense, mais l'ampleur de cet Ouvrage avait fait souhaiter qu'il fût, pour ainsi dire, fractionné. La librairie Panckouke s'en chargea, et, de 1781 à 1832 publia des dictionnaires spéciaux comprenant en tout 166 volumes in-4° et des atlas composés de 6439 planches.

En particulier, le *Dictionnaire de Mathématiques*, paru de 1784 à 1789, se compose de trois volumes in-4°, accompagnés d'un atlas. Il a pour auteurs d'Alembert, Bossut, Condorcet et Lalande.

Le premier ne donna guère que son nom à l'œuvre commune, car il mourut le 29 octobre 1783.

Condorcet et Bossut reprirent les articles que le grand géomètre avait insérés dans la première *Encyclopédie*, et, les corrigeant et

les modifiant quand il y avait lieu, en firent le fonds du nouveau Dictionnaire.

Quant à Lalande, sa tâche fut plus originale. D'Alembert, qui n'était pas astronome, s'était borné à copier les *Institutions Astronomiques* de Lemonnier, et cet Ouvrage, publié en 1746, était une imitation de l'*Institutio Astronomica*, que Keill avait fait paraître en 1718. Il n'était donc pas au courant de la Science. Delambre a remarqué quelque part que Lemonnier a toujours été un peu en retard sur son époque. Lalande n'eut d'ailleurs aucune peine à venir à bout de son travail, qui se borna à détacher des articles de son grand *Traité d'Astronomie*, en les remaniant quelque peu.

Ce Dictionnaire est encore, à l'heure actuelle, apprécié et recherché.

Dans la Préface de cet Ouvrage, comme dans celles de ses autres écrits, Bossut avait donné quelques détails historiques sur le développement de la Science mathématique. Il revint là-dessus, et il en résulta son *Essai sur l'Histoire générale des Mathématiques*, qui parut en 1802. Ce Livre fut bien accueilli du public, et fut aussitôt traduit en plusieurs langues. Mais ce n'était encore, l'auteur en fait l'aveu, qu'une ébauche qu'il reprit plus tard et qui devint son *Histoire générale des Mathématiques*, depuis leur origine jusqu'à l'année 1808. Avant de parler de cet Ouvrage, disons que les événements politiques avaient amené de grands changements dans la situation de son auteur.

D'abord, dès que l'Institut fut créé, il en fit partie. On sait que le Gouvernement désigna en premier lieu un certain nombre de membres et qu'une série de votes successifs désigna ceux qui vinrent grossir le noyau primitif. Lagrange et Laplace, les premiers, firent partie de la Section de Géométrie. Ils ne tardèrent pas à s'adjoindre Bossut, jugeant sans doute que, pour représenter la Mécanique des fluides, ils ne pouvaient mieux trouver.

(*A suivre.*)

# BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

---

Darboux (G.). — *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces et les Applications géométriques du Calcul infinitésimal.* Première Partie : *Généralités, coordonnées rectilignes, surfaces minima.* 2e édition, revue et augmentée. In-8, VII-618 p. avec figures. Paris, Gauthier-Villars. 20 fr.

Fitz-Patrick (J.). — *Exercices d'Arithmétique. Énoncés et Solutions.* 3e édition, entièrement refondue et considérablement augmentée. In-8, V-716 p. Paris, A. Hermann et fils. 12 fr.

Fort (O.) u. Schlömilch (O.). — *Lehrbuch der analytischen Geometrie.* 2. Tl. Analytische Geometrie des Raumes. 7e Aufl., bearb. v. *R. Heger.* In-8, VIII-326 p. avec figures. Leipzig, B.-G. Teubner. 6 M.; relié, 6 M. 80.

Gauss (C.-F.). — *Die 4 Beweise f. die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren 1. od. 2. Grades* (1799-1849). Hrsg. v. *E. Netto.* 3. Aufl. (*Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften* n° 14.) In-8, 82 p. avec 1 planche. Leipzig, W. Engelmann. Relié, 1 M. 90.

Riesz (F.). — *Les Systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.* In-8, 190 p. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr. 50.

Zoretti (L.). — *Leçons de Mathématiques générales.* In-8, 770 p. Paris, Gauthier-Villars. 20 fr.

Barthel (Ernst). — *Die Erde als Totalebene.* Hyperbolische Raumtheorie m. e. Voruntersuchg. üb. die Kegelschnitte. Gr. in-8, VII-111 p. avec figures. Leipzig, O. Hillmann. 2 M. 50.

*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées.* Publiée sous les Auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de *Jules Molk* et, pour ce qui concerne la Mécanique, sous la direction scientifique de *Paul Appell.* Tome IV, 6e vol. : *Balistique, Hydraulique.* Fasc. 1. In-8, 1-192 p. Paris, Gauthier-Villars.

*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* m. Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München u. Wien sowie unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen. II. Bd. *Analysis.* 2. Tl. Red. v. *H. Burkhardt, R. Fricke u. W. Wirtinger.* Fasc. 2 et 3. Gr. in-8, 177-470 p. avec figures. Leipzig, B.-G. Teubner. 9 M. 20.

*Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik*, begründet v. *Karl Orthmann* u. *Fel. Müller*. Hrsg. v. *Emil Lampe*. 42. Bd. Jahrg. 1911. Fasc. 2. Gr. in-8, IV et 497-720 p. Berlin, G. Reimer. 8 M. 60.

STUDY (E.). — *Die realistische Weltansicht u. die Lehre vom Raume.* Geometrie, Anschaug. u. Ertahrg. (Wissenschaft, die Sammlung v. Einzeldarstellgn. aus den Gebieten der Naturwissenschaft u. der Technik.) In-8, X-145 p. Braunschweig, F. Vieweg et Sohn. 4 M. 50; relié, 5 M. 20.

TROST (W.). — *Die mathematischen Fächer an den niederen gewerblichen Lehranstalten in Deutschland.* Mit e. Vorwort v. *H.-E. Timerding* u. e. Anh. v. *A. Haese.* (*Abhandlungen üb. den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Veranlasst durch die internationale mathemat. Unterrichtskommission. Hrsg. v. *F. Klein.* IV. Bd. 5. Heft.) In-8, VI-150 p. avec 64 figures. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 M.

BOREL (E.). — *Introduction géométrique à quelques Théories physiques.* In-8, VII-141 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

BURKHARDT (H.). — *Theory of functions of a complex variable.* In-8, London, D.-C. Heath. 12 s. 6 d.

*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées.* Publiée sous les Auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne, avec la collaboration de nombreux savants. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de *Jules Molk.* Tome III (2e vol.) : *Géométrie descriptive, Géométrie élémentaire.* Rédigé dans l'édition allemande sous la direction de *François Meyer.* 1er fasc. In 8, 1-160 p. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

KLEIN (F.). — *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* II. Tl. : *Geometrie.* Vorlesung, geh. im Sommersem. 1908. Ausgearb. v. *E. Hellinger.* 2. Aufl. Gr. in-8, VIII p. et 547 p. autogr. avec fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 7 M. 50.

KLEIN (F.). — *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree.* 2nd and rev. edit. In-8, London, K. Paul. 10 s. 6 d.

PASCH (Mor.). — *Veränderliche u. Funktion.* In-8, VI-186 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 6 m.; relié, 7 M.

POYNTING (J.-H.) and Sir THOMSON (J.-J.). — *A Textbook of Physics : Electricity and Magnetism.* Parts 1 and 2 : *Static Electricity and Magnetism.* In-8 (9-6), 360 p. London, C. Griffin. 10 s. 6 d.

WOOD (R.-W.). — *Optique physique.* Ouvrage traduit de l'anglais d'après la deuxième édition par *H. Labrouste.* T. II : *Étude des radiations.* In-8, 484 p. avec figures et planches. Paris, Gauthier-Villars. 18 fr.

1re Partie.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DUHEM (P.). Le Système du Monde. *Histoire des Doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, t. I. 1 vol. gr. in-8, v-512 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1913.

« La curiosité est la mère de la science », dit un ancien proverbe. Et, en effet, la curiosité de l'homme, dirigée vers sa propre personnalité, produisit les innombrables recherches ayant pour but de répondre aux séduisants problèmes : *D'où venons-nous?* et *Qui sommes-nous?*, problèmes de la résolution desquels on pouvait espérer tirer la réponse à la question : *Où allons-nous?* Or, lorsque l'homme, non content de fixer son attention sur soi-même, commença à examiner ce qui arrive dans le monde environnant, le même sentiment lui suggéra deux problèmes tout à fait analogues et non moins charmants, c'est-à-dire : 1° l'investigation de la dérivation et de la formation de l'Univers ; 2° la détermination de sa structure et des lois qui régissent le mouvement des astres (et *in primis et ante omnia* de celles qui se rapportent à la planète que nous habitons), peut-être dans le secret espoir d'en tirer des conséquences capables de jeter quelque lumière sur le devenir des mondes.

Le premier de ces problèmes a déjà eu un grand nombre de solutions, pour la plupart si ingénieuses, si intéressantes, si instructives qu'un savant de premier ordre, Henri Poincaré, a cru bon de les exposer avec méthode et de les analyser avec profondeur dans un excellent Cours de leçons ([1]), dont la deuxième édition a paru après sa mort par les soins éclairés de M. E. Lebon.

Non moins belle est la seconde des questions que nous avons énoncées ci-dessus ; elle a sur l'autre le grand avantage d'être plus précise (je dirai plus scientifique) et de pouvoir être traitée à l'aide d'un nombre beaucoup moindre d'éléments hypothétiques.

([1]) *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques professées à la Sorbonne*, 2e édition, Paris, Hermann, 1913.

L'histoire des efforts qu'on fit pour la résoudre est au fond l'histoire même de l'Astronomie ; c'est une longue et décisive période de cette histoire qui forme le sujet de l'Ouvrage auquel est consacré cet Article.

Avec Copernic se clôt celle qu'on peut appeler la *période héroïque* de la recherche des lois qui règlent le mouvement des astres, car c'est lui qui a définitivement placé le Soleil au centre de notre système, en détrônisant la Terre de la situation où l'avait mise l'orgueil de l'homme ; or, c'est précisément la période qui va des origines à l'apparition du grand ouvrage *De revolutionibus orbium cœlestium* (1543), que M. Duhem s'est proposé d'étudier. Dans le beau volume que nous avons sous les yeux, il arrive jusqu'à Ptolomée inclusivement ; la prodigieuse puissance de travail du savant professeur de la Faculté des Sciences de Bordeaux nous donne la certitude que les autres volumes ne se feront pas attendre longtemps et nous nous réjouissons d'avance d'avoir dans un court délai le tableau complet et fidèle des longues recherches qui préparèrent l'état actuel de la science astronomique.

La période historique étudiée dans le Volume que nous allons examiner a été, depuis un demi-siècle, l'objet des études de plusieurs savants d'une grande valeur, parmi lesquels je me borne à rappeler G. Schiaparelli, Th.-H. Martin, P. Tannery et Th.-L. Heath. M. Duhem a pris connaissance de tous les travaux de ses prédécesseurs ; non seulement, à l'aide d'une analyse épuisante, il a examiné à fond leurs opinions sur les anciens textes, mais, en mettant ces textes mêmes sous les yeux du lecteur, dans l'original et traduits en bon français, il a mis tout le monde à même de discuter avec lui les conclusions auxquelles il s'est arrêté.

Quoique dans le titre il déclare commencer par Platon, M. Duhem remonte un peu plus haut, et cela avec raison, car c'est une chose connue que le divin philosophe a fait de larges emprunts aux doctrines scientifiques de ses devanciers et particulièrement aux ouvrages de Pythagore ; et c'est précisément par les doctrines astronomiques professées par ce savant que M. Duhem entreprend son exposé de la Cosmologie hellénique. On apprend de la sorte que c'est au philosophe de Samos que remontent la notion de la sphéricité de la Terre et les premières recherches sur le mouvement

des astres (portés au nombre de 10 par la création tout à fait arbitraire de l'anti-terre) et que c'est son élève Philolaüs qui, le premier, a ôté la Terre du centre du monde. M. Duhem remarque avec raison que le système astronomique de Philolaüs a eu dans les temps modernes une fortune vraiment singulière. « Parmi les textes anciens qui lui ont suggéré ses hypothèses astronomiques », écrit-il page 21, « Copernic a cité, et à deux reprises, le passage du *De placitis philosophorum* où il est dit que Philolaüs considérait la Terre comme un astre et qu'il lui faisait décrire un cercle oblique autour du feu central. Il n'en a pas fallu davantage pour que nombre d'auteurs modernes fissent de Philolaüs l'inventeur de l'Astronomie héliocentrique et l'avant-coureur de Copernic. Gassendi, dont l'érudition était habituellement mieux informée, fut le premier, en sa *Vie de Copernic*, à donner cours à cette légende; Ismaël Bouillaud en accrut la vogue lorsqu'en 1645 il intitula : *Astronomia philolaïca* l'exposé du système héliocentrique qu'il voulait substituer à celui de Képler; Riccioli, Weidler, Montucla, Bailly, Delambre répétèrent à l'envi cette erreur que tant de textes formels, et si aisément accessibles, suffisaient à condamner. Rien n'égale la rapidité avec laquelle se répand l'erreur historique, si ce n'est la ténacité qu'elle oppose aux tentatives de réfutation. »

Ce système demeura sans doute en faveur pendant longtemps dans les écoles qui suivaient la tradition de Pythagore; toutefois Hicétas et Ecphantus l'abandonnèrent, au moins en partie, en faisant tourner la Terre, non autour du feu central, mais sur elle-même; et c'est précisément par l'exposé des doctrines qui portent le nom de ces savants que se clôt le premier Chapitre de l'Ouvrage que nous examinons.

Le Chapitre suivant est consacré à la Cosmologie de Platon, exposée en tenant compte d'idées tirées de travaux précédents et particulièrement de ceux des Atomistes et d'Archytas de Tarente. On voit ici apparaître pour la première fois un nouvel élément primordial : l'éther (αἰθήρ), ajouté par Platon aux quatre (le Feu, l'Eau, l'Air et la Terre) qu'on avait considérés jusqu'alors; on apprend aussi qu'en poursuivant un système employé par Pythagore, Platon le fit correspondre au dodécaèdre, le seul entre les polyèdres réguliers qui n'avait pas encore trouvé un emploi repré-

sentatif. Ici on apprend encore le rôle joué dans le système philosophique de Platon par le célèbre nombre géométrique. Ici enfin on arrive à connaître les raisons qui menèrent ce philosophe à embrasser l'opinion que la Terre est immobile au centre de l'Univers. M. Duhem ne manque pas de faire des rapprochements on ne peut plus intéressants entre certaines opinions de Platon et quelques doctrines ayant cours en Orient.

Dans le troisième Chapitre de son Ouvrage, l'Auteur fait connaître le célèbre « Système des sphères homocentriques » avec tous les détails désirables, dans son origine et dans les différentes phases de son développement ; naturellement, dans ce Chapitre, la part du lion revient à Eudoxe de Cnidos (d'après la réhabilitation qu'en fit G. Schiaparelli), mais Aristote et Calippe y sont aussi dûment considérés. Ce Chapitre se termine par l'intéressante remarque suivante : « L'attribution du titre de créateur de la méthode des sciences physiques a donné lieu à bien des querelles ; les uns ont voulu le donner à Galilée, les autres à Descartes, d'autres encore à François Bacon, qui est mort sans avoir jamais rien compris à cette méthode. En vérité, la méthode des sciences physiques a été définie par Platon et par les Pythagoriciens de son temps avec une netteté, une précision qui n'ont pas été surpassées ; elle a été appliquée pour la première fois par Eudoxe lorsqu'il a tenté, en combinant des rotations de sphères homocentriques, de sauver les mouvements apparents des astres » (p. 129).

Quoique Platon se soit borné à considérer le côté purement géométrique du problème ayant pour but l'explication rationnelle des mouvements célestes, il s'agit en effet d'un problème mécanique, dont la solution complète dépend, non seulement de théories exclusivement mathématiques, mais aussi de plusieurs branches de la Physique : c'est une circonstance dont ne manquèrent pas de s'apercevoir plusieurs penseurs grecs à partir d'Aristote. Par conséquent, M. Duhem s'est senti obligé de laisser pour quelque temps de côté l'histoire de l'Astronomie proprement dite, pour consacrer trois importants Chapitres avant tout à la Physique d'Aristote en général, ensuite à ses théories du temps, du lieu et du vide, et enfin à ce que devient après sa mort la Dynamique des Hellènes. L'attitude du physicien de Bordeaux par rapport aux anciennes théories ressort assez clairement des phrases suivantes :

« L'humanité n'a jamais vu aucune synthèse dont l'ensemble ait autant d'unité » (que la philosophie péripatéticienne), « dont les diverses parties fussent aussi intimement reliées les unes aux autres. La partie logique de l'œuvre d'Aristote étudie, avec une puissance de pénétration et une délicatesse d'analyse que l'on n'a pas dépassées, les règles selon lesquelles la Science doit être construite ; puis, selon ces règles, le reste de l'œuvre du Stagirite bâtit le prodigieux édifice où trouvent place les doctrines spéculatives, Mathématique, Physique et Métaphysique, et les doctrines pratiques, Ethique, Physique et Politique. Le monument a l'inébranlable solidité d'un bloc et la pureté de lignes de la plus belle œuvre d'art. De la Physique d'Aristote, cependant, il ne restera pas pierre sur pierre. La Science moderne, pour se substituer à cette Physique, en devra démolir successivement toutes les parties ; sans doute, maint fragment, emprunté au monument antique, sera repris pour bâtir les murs du nouvel édifice ; mais avant de trouver place dans cet appareil pour lequel il n'avait pas été taillé, il lui faudra recevoir une figure toute différente de celle qu'il affectait jadis ; et, bien souvent, il serait fort malaisé de le reconnaître à qui n'aurait pas suivi le travail de retouches successives auquel on l'a soumis » (p. 240).

Ces trois Chapitres de l'Ouvrage dont nous nous occupons sont aussi documentés que profonds ; quiconque, à l'avenir, s'occupera de l'histoire des Sciences physiques chez les Grecs devra les étudier dans tous leurs détails ; mais même ceux qui cultivent les sciences elles-mêmes ne sont pas autorisés à les négliger, car M. Duhem a soin de faire ressortir les points de contact entre les anciens philosophes et les modernes (M. Bergson non exclu !) et de remarquer l'influence exercée par certains passages d'Aristote sur le développement postérieur des différentes branches de la science positive. Comme preuve, citons le passage suivant : « Reprise au XIV^e^ siècle par les Nominalistes de Paris, et développée par les mathématiciens au XVI^e^ et au XVII^e^ siècle, la supposition qu'en chaque corps pesant, le centre de gravité est le point qui tend à s'unir au centre du Monde a donné naissance à toute une statique ; erronée en son principe, cette statique n'en a pas moins légué à la Science moderne plusieurs propositions d'une extrême importance ; les paradoxes qu'elle engendre ont mis aux prises les

meilleurs géomètres du XVII^e siècle et suscité entre eux une âpre discussion : par cette discussion, les corollaires exacts de cette doctrine ont été détachés du principe faux qui les avait engendrés. »

Dans ces trois Chapitres, comme d'ailleurs dans tout le reste du Volume de M. Duhem, il faut en général admirer l'ampleur des connaissances autant que la sûreté et la sérénité des jugements ; qu'il nous soit permis de signaler une seule exception dont la victime a été N. Tartaglia ; envers ce savant M. Duhem s'est montré deux fois (p. 215 et 390) d'une sévérité vraiment excessive ; sans doute, il n'a eu aucun scrupule de publier sous son nom des traductions auxquelles il n'avait pas mis la main ; mais il faut remarquer que le respect pour la propriété littéraire de toute espèce est un sentiment tout moderne et qu'un mathématicien aussi original que Tartaglia ne donnait probablement pas un grand poids à un travail de simple traduction qu'il publiait pour le commenter.

Après cette petite critique, nous reprenons notre analyse pour remarquer que le Chapitre suivant (c'est-à-dire le huitième) est consacré aux astronomes héliocentriques, Héraclide de Pontos, Aristarque de Samos et Séleuque, à savoir aux savants qui marquèrent l'apogée de la pensée astronomique des Grecs : si les penseurs postérieurs avaient compris l'importance des nouvelles vues et qu'ils les eussent franchement choisies comme bases de la science officielle, douze siècles de ténèbres auraient été épargnés à l'humanité ! Toutefois, il faut reconnaître que l'abandon du système héliocentrique n'a pas eu lieu sans motifs sérieux ; M. Duhem les a cherchés avec son habituel soin minutieux, il les a découverts avec sa pénétration bien connue et il les a exposés avec toute la clarté désirable dans un sujet si épineux. Par cela il a été amené à s'occuper des théories (qui remontent à Apollonius de Perge et Hypparque) formant le *substratum* de l'ouvrage astronomique le plus considérable et le plus volumineux que nous ait légué l'ancienne Grèce : nous parlons de la *Composition mathématique* (c'est-à-dire l'*Almageste*) de Claude Ptolémée, dont l'analyse détaillée occupe les dernières pages de l'Ouvrage de M. Duhem.

La lecture de ce beau Volume finie, l'immense somme de travail

qu'il représente mesurée, si l'on compare les idées *a priori*, les constructions fantastiques, le manque de toute préoccupation de la réalité, qui caractérisent la généralité des productions anciennes, avec les méthodes exactes et la critique rigoureuse qui gouvernent toute investigation moderne, on est naturellement amené à se poser la question : Comment est-il donc possible que des savants originaux tels que Schiaparelli et Duhem aient cru bon de consacrer tant de méditations à des idées et à des procédés dont la Science a désormais fait justice ? La réponse, suivant notre sentiment, est aisée : chaque page de la production scientifique des Hellènes porte l'empreinte du génie et par conséquent procure, à quiconque sait la comprendre, la plus pure et la plus haute jouissance intellectuelle ; elle est si belle qu'on en subit le charme irrésistible et qu'on est forcé de l'admirer comme on admire le Parthénon et la Vénus de Milo ; et ce sentiment, qui dure depuis vingt siècles, n'est pas destiné à disparaître, car, un grand poète l'a dit, *a thing of beauty is a joy for ever*.

GINO LORIA.

---

ZEUTHEN (H. G.).— DIE MATHEMATIK IM ALTERTUM UND IM MITTELALTER. (Die Mathematischen Wissenschaften unter Leitung von F. KLEIN. *Des Gesamtwerkes :* Teil III, Abteilung I. Erste Lieferung), 1 vol. gr. in-8, v-95 pages. Berlin und Leipzig, B. G. Teubner, 1912.

M. Paul Hinneberg publie à la Maison Teubner une série d'Ouvrages intitulée *Die Kultur der Gegenwart*, sorte d'encyclopédie d'un caractère philosophique. La partie mathématique paraît sous la direction de M. F. Klein. Elle débute par le Livre de M. Zeuthen sur les Mathématiques dans l'antiquité et au moyen âge. Cet excellent Ouvrage est en somme bien connu des lecteurs du *Bulletin* par deux Analyses successives de Paul Tannery. La première (*Bulletin*, 1896, p. 105-108) porte sur l'édition allemande parue en 1896 et qui suivit l'édition danoise originale. La deuxième (*Bulletin*, 1902, p. 313-319) a trait à la traduction française, due à M. Jean Mascart (Paris, Gauthier-Villars, 1902). Il faut renvoyer à ces pages ingénieuses et fortes, où Paul Tannery dit tout le bien qu'il pensait du travail et de son auteur.

Signalons seulement, dans la présente édition, la nouvelle ordonnance qui place au début du Livre une exposition très large de la formation du concept de nombre, de l'emploi de noms et de signes pour désigner ces nombres, du développement du calcul numérique.

Pour donner une impression personnelle, je dirai que c'est avec grand plaisir et un réel profit que j'ai lu cet Ouvrage robuste et élégamment écrit.

G. Darmois.

---

TANNERY (Paul). — Mémoires scientifiques publiés par J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen. I. *Sciences exactes dans l'Antiquité* (1876-1884). 1 vol. in-8, XIX-468 pages. II. *Sciences exactes dans l'Antiquité* (1883-1898). 1 vol. in-8, XII-555 pages. Toulouse, Édouard Privat; Paris, Gauthier-Villars, I et II, 1912.

L'œuvre de Paul Tannery est immense ; plus de quatre cents Notes ou Mémoires, dispersés dans les Revues les plus diverses, la constituent. M^me^ Paul Tannery a eu la pieuse volonté de réunir tous ces fragments épars d'une pensée dont elle avait, chaque jour, suivi le labeur et le progrès. Pour seconder son entreprise, elle a eu la bonne fortune de rencontrer l'aide de deux des plus illustres émules de son époux, de M. J.-L. Heiberg et de M. H. G. Zeuthen. Grâce à ces deux savants danois, maîtres en histoire des sciences et en érudition hellénique, grâce à M^me^ Tannery, le grand érudit français verra s'élever à sa mémoire « un monument plus durable que le bronze ». Comment la nouvelle n'en serait-elle pas accueillie avec joie par les lecteurs de ce *Bulletin* qui reçut, de Paul Tannery, une collaboration si fréquente et si importante ?

Cette collection de *Mémoires scientifiques* sera, en effet, un monument imposant.

« Seront exclus de la réimpression les ouvrages publiés en volumes, les articles publiés d'abord à part, puis remaniés et entrés dans quelques-uns de ces ouvrages ; enfin les contributions personnelles de notre ami aux grandes éditions de Fermat, Descartes, etc., dont il a été chargé par le Ministère de l'Instruction publique. » Bien qu'ainsi délimitée, la publication formera, cependant, dix forts volumes in-8. Les trois premiers volumes contien-

dront les Mémoires relatifs aux *Sciences exactes dans l'Antiquité ;* le quatrième recueillera ceux qui ont trait aux *Sciences exactes chez les Byzantins ;* le cinquième, ceux qui concernent les *Sciences exactes au moyen âge et dans les temps modernes ;* le sixième volume sera formé par les travaux de *Mathématiques pures ;* le septième, par les écrits de *Philosophie ;* le huitième, par les recherches de *Philologie classique;* le neuvième réunira les *Récensions ;* le dixième, enfin, contiendra la *Biographie*, la *Bibliographie* et un choix puisé dans la *Correspondance scientifique*. On devine sans peine quels secours cette synthèse d'écrits aujourd'hui disséminés apportera à tous les érudits, à tous les curieux de l'histoire de la Science.

Nous avons sous les yeux les deux premiers Volumes de cette admirable collection. Ils reproduisent les soixante-cinq Notes ou Mémoires que, de 1876 à 1898, Paul Tannery a publiés sur les *Sciences exactes dans l'Antiquité*. Assurément, le lecteur n'attend pas de nous que nous résumions, que nous analysions ces multiples écrits aux sujets si divers. Nous voudrions seulement essayer de lui dire quelle impression a produite en nous la lecture de ces opuscules ; il nous semble qu'on en peut dégager ce qui caractérise l'esprit de l'auteur, ce qui lui donne, parmi les érudits et les historiens de la Science, une physionomie si particulière.

Depuis le XVI^e^ siècle, par l'invention ou le perfectionnement de l'Algèbre, de la Géométrie analytique, du Calcul différentiel et intégral, des diverses parties de l'Analyse, les mathématiciens ont désiré, sans cesse, créer des procédés d'une grande ampleur, où une multitude de problèmes, divers en apparence, trouvassent, à la fois, une solution méthodique. La généralisation a été le moyen de découverte ou de progrès dont ils ont continuellement usé; la *généralité*, la qualité qu'ils ont surtout recherchée pour leurs propres pensées.

Chez les Anciens, les méthodes générales étaient rares et peu puissantes. La plupart des problèmes se présentaient à la façon d'énigmes dont la réponse devait être directement tirée des particularités de la question, sans qu'il fût possible de recourir à des procédés universels de solution ; aussi, ce qu'on prisait dans les pensées d'un mathématicien, c'était bien moins la généralité de ses doctrines que l'*ingéniosité* de ses méthodes.

Ainsi en est-il encore, d'ailleurs, chez qui se trouve, à l'égard de la Science mathématique, dans un état analogue à celui des anciens, chez l'enfant ou le jeune homme qui débute en cette étude. Avant de goûter la généralité des théories de l'Algèbre ou de la Géométrie moderne, il lui faut exercer l'ingéniosité de son esprit, en résolvant des problèmes par la seule Arithmétique ou par la Géométrie d'Euclide.

Il serait donc vain de vouloir aborder l'étude des Sciences mathématiques dans l'Antiquité à qui ne posséderait, mais à un degré éminent, cette ingéniosité, cette aptitude à la divination qui caractérisent, dans les classes élémentaires de Mathématiques, le jeune homme habile à la solution des problèmes.

Si Paul Tannery a éprouvé un si vif attrait pour l'Arithmétique et la Géométrie de l'Antiquité, c'est, n'en doutons pas, qu'il possédait à un rare degré cette faculté divinatrice que le culte, parfois excessif, de la généralité fait si souvent disparaître, aujourd'hui, chez ceux mêmes qui, dans leur jeunesse, s'en montraient doués.

Devin d'une extrême ingéniosité, comment Paul Tannery ne se fût-il pas complu à exercer sa faculté maîtresse sur les innombrables énigmes que nous pose l'histoire des sciences dans l'Antiquité? Aussi voit-on clairement que si cette histoire retient son attention, c'est surtout par son côté énigmatique. Les questions au sujet desquelles nous ne sommes renseignés que par des lambeaux de documents, peut-être apocryphes, probablement corrompus, sont celles qui solliciteront au plus haut point sa curiosité. Reconstituer une solution de problème qu'une simple allusion nous révèle ; fixer la date d'une œuvre à peine citée par quelques écrivains très postérieurs à sa rédaction ; découvrir le véritable auteur, ignoré ou méconnu, d'un traité réduit à quelques fragments ; fixer le sens d'un texte que l'ignorance des copistes a rendu incompréhensible ; voilà, si j'ose dire, les devinettes dont l'ingéniosité de notre auteur fait son continuel régal.

Et quelles ressources déploie cette ingéniosité divinatrice pour trouver le mot de l'énigme! Minutieuse critique des textes ; revue, prodigieusement érudite, de tous les témoignages qui peuvent apporter quelque renseignement ; comparaison avec l'état des connaissances contemporaines, que des lectures sans nombre rendent seules possible ; tels sont les procédés dont nous voyons

Paul Tannery user, tour à tour, avec une merveilleuse virtuosité.

Cette dextérité n'est pas, parfois, sans scandaliser certains historiens. Il est des esprits amis de la certitude, qui se complaisent à étudier les chapitres de l'histoire qu'éclairent des textes authentiques, nombreux, étendus ; qui aiment à progresser sans risque, en appuyant fermement chacun de leurs pas sur un roc d'une solidité éprouvée. Ceux-là s'étonnent de la joie audacieuse avec laquelle Tannery s'aventure dans les passages les plus scabreux : ils s'épouvantent des bonds par lesquels il franchit les lacunes de notre savoir, de la fragilité des soutiens qui portent sa marche. Mais une science hasardeuse ne vaut-elle pas mieux que l'ignorance complète à laquelle leur prudence se verrait condamnée dans les régions qu'explore notre auteur ?

Sans doute, les prouesses historiques de Paul Tannery ne vont pas sans danger. Il peut arriver qu'une hypothèse, qu'il avait crue solide, craque tout à coup et entraîne dans sa ruine tout l'édifice qu'elle portait. En ce cas, l'ingénieux historien n'hésite jamais à confesser sa déconvenue, et avec quelle bonne grâce ! Lisons, par exemple, ce billet (1) qu'il écrivait à Delbœuf, le 5 février 1880, en lui envoyant le Mémoire intitulé : *A quelle époque vivait Diophante ?*

« Vous avez vu récemment un faible produit de ma veine. Comme vous l'avez bien jugé, je n'ai prétendu soutenir que des probabilités ; en ces matières, il n'y a généralement pas autre chose. Mais je vous avouerai entre nous que cet article sur Diophante est ma honte secrète. Il était écrit depuis assez longtemps, sauf ce qui concernait le détail du prix du vin. Pour rendre mon raisonnement plus concluant, je me suis mis à étudier la métrologie ancienne, et à la suite de cette étude, pour établir la valeur très controversée du denier de l'édit de Dioclétien, je me suis bâti un petit sytème dont j'étais très satisfait. J'achève donc mon article ; comme je le destinais à un recueil nullement fait pour les érudits, je ne détaille pas mon système et n'en donne que les éléments. On imprime l'article, et pendant ce temps, mis en goût par ces matières, j'approfondis mes études métrologiques en général (je deviens même assez fort, sans me flatter) ; finalement je reviens aux mon-

(1) Paul Tannery, *Mémoires scientifiques*, t. I, p. 72.

naies et je m'aperçois que j'ai mal interprété un texte, ce qui m'enlève mon principal argument à l'appui de mon système monétaire. Je retravaille la question, et je finis par en adopter un autre, beaucoup plus voisin de ceux qui sont connus. Mais il était trop tard; si bien que, quoiqu'en somme il n'y ait là qu'un détail qui n'influe nullement sur le raisonnement relatif à l'âge de Diophante, je n'ose envoyer mon article qu'à des amis que je suppose un peu ne pas devoir lever ce *lièvre*, ou, en tous cas, qui ne courront pas après. »

Lorsque, comme chez Paul Tannery, l'esprit géométrique a développé son ingéniosité plus encore que sa rigueur et sa généralité, ne voit-on pas qu'il passe à l'esprit de finesse, et au meilleur?

PIERRE DUHEM.

---

KNOBLAUCH (JOHANNES). — GRUNLAGEN DER DIFFERENTIALGEOMETRIE. 1 vol. gr. in-8, x-634 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1913.

1. Après une courte Introduction à la théorie des courbes de l'espace, l'Auteur aborde tout de suite l'étude des surfaces. Avec l'élément linéaire

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

il introduit les trois *grandeurs fondamentales du premier ordre* E, F, G, calcule l'angle des courbes coordonnées

$$\cos\mathfrak{I} = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

étudie les transformations des lignes coordonnées, montre, par exemple, que, si $\Delta' = \frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)}$, on a

$$E'G' - F'^2 = \frac{1}{\Delta'^2}(EG - F^2),$$

et posant

$$\Delta(\varphi, \psi) = \frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{d\psi}{dv} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) E + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}}{EG - F^2},$$

introduit immédiatement les invariants

$$\Delta(\varphi, \psi),\ \Delta^1\varphi = \Delta(\varphi, \varphi).$$

Il définit la *normale tangentielle* à une courbe tracée sur la surface, généralise les formules de Frenet, et définit la torsion géodésique, la courbure normale, la courbure tangentielle.

2. Avec l'expression de la *courbure normale*, il introduit les grandeurs fondamentales de deuxième espèce L, M, N (les trois dernières des six fonctions de Gauss), étudie les sections planes de la surface, en particulier les sections normales, démontre le théorème de Meusnier, définit les tangentes principales, l'indicatrice, la courbure totale $\frac{1}{R_1 R_2}$, et remarque que cette courbure totale reste constante si l'on *déforme* la surface (E, F, G restant les mêmes). Il indique déjà les deux principaux problèmes de la théorie de la déformation.

3. Puis il s'occupe spécialement de la courbure *tangentielle* d'une courbe tracée sur la surface. En posant

$$\frac{d\varpi}{ds} = \Theta\varpi,$$

$\Theta$ est ce qu'il appelle une *différentiation géométrique* le long de la courbe envisagée, $s$ étant l'arc. Il donne l'expression de la courbure tangentielle au moyen de différentiations géométriques. Il introduit les expressions de Christoffel, telles que

$$J_1 = \frac{1}{EG - F^2}\left(\frac{1}{2} G \frac{\partial E}{\partial u} - F \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial v}\right), \quad \ldots,$$

calcule la courbure tangentielle des trajectoires orthogonales d'une courbe donnée sur une surface, donne le centre et le rayon de la courbure tangentielle.

4. Il établit ensuite les fondements de la théorie des formes différentielles linéaires, montre que

$$\Delta_a^{(1)} \varphi = \Delta_{a'}^{(1)} \bar{\varphi}, \qquad \Delta_a(\varphi, \psi) = \Delta_{a'}(\bar{\varphi}, \bar{\psi}),$$

étudie les systèmes de deux formes quadratiques, montre que

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \qquad \text{et} \qquad H = \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2}$$

sont des invariants, établit les covariants de Christoffel et les applique à la théorie de la courbure tangentielle; étudie le système d'une forme quadratique et d'une forme linéaire, transforme simultanément deux formes quadratiques en une somme algébrique de carrés de formes linéaires; généralise les invariants de Christoffel et donne une autre forme de l'expression de la courbure tangentielle; aborde les invariants d'intégrabilité d'une forme différentielle linéaire; cherche la relation entre la courbure géodésique et la courbure normale; établit les formules générales de Frenet pour les trajectoires orthogonales d'une courbe donnée.

5. Après avoir comparé l'expression donnée par O. Bonnet, de la mesure de la courbure avec celle de Gauss et montré comment on déduit l'une de l'autre, puis après avoir établi les formules générales de Frenet pour les courbes coordonnées, M. Knoblauch aborde les équations de Gauss et de Weingarten, et ce qu'il appelle les trois équations fondamentales, relations entre les grandeurs fondamentales et leurs dérivées.

6. Il s'occupe ensuite des systèmes de coordonnées particuliers sur une surface, par exemple des lignes de courbure, des systèmes orthogonaux ou simplement conjugués, des lignes asymptotiques, des familles de courbes isothermes et, à ce propos, de représentation conforme; des lignes géodésiques, des cercles géodésiques, des courbes parallèles géodésiques, des systèmes de courbes coordonnées géodésiques orthogonales; de la courbure totale d'un triangle géodésique, de l'angle de contingence géodésique, de la courbure géodésique. Introduisant le paramètre différentiel du deuxième ordre

$$\Delta^2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right],$$

il donne l'expression de la courbure géodésique, indique des familles de courbes orthogonales de courbure géodésique constante, et donne la relation entre la torsion géodésique et la théorie des lignes géodésiques.

7. Une partie est consacrée à la représentation sphérique (for-

mules de Weingarten, formules de Lelieuvre relatives aux lignes asymptotiques, coordonnées tangentielles) et à une introduction à la théorie de l'espace réglé (congruences de droites, surfaces réglées).

8. L'Auteur étudie des surfaces spéciales ayant un rapport donné avec une surface donnée : par exemple le lieu des cercles de courbure de toutes les sections planes normales passant par un point donné; ou le lieu des centres de courbure de toutes les sections planes de la surface dont les plans passent par un point donné sur la surface; ou les surfaces parallèles à une surface donnée; ou le lieu des centres de courbure principaux (développée). Il calcule l'élément linéaire de la développée; il démontre le théorème de Weingarten relatif aux surfaces telles qu'en chaque point l'un des rayons de courbure principaux soit déterminé en fonction de l'autre. (Leurs développées sont applicables sur une surface de révolution.) Il cherche les développantes pour une développée donnée et donne la réciproque du théorème de Weingarten.

9. Voici, maintenant, une théorie de la déformation. M. Knoblauch s'occupe d'abord des surfaces de révolution correspondant à un élément linéaire donné; il montre que l'hélicoïde est une surface applicable sur une surface de révolution; il étudie les surfaces de révolution à courbure constante, la pseudo-sphère, etc. Il établit l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima, donne la représentation analytique de ces surfaces, étudie leur représentation sphérique, s'arrête aux surfaces de translation et à une certaine classe de surfaces applicables les unes sur les autres, déterminée par les surfaces minima. Viennent ensuite une étude sommaire des équations de Laplace

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v} + a\frac{\partial P}{\partial u} + b\frac{\partial P}{\partial v} + cP = 0,$$

$a$, $b$, $c$ étant des fonctions de $u$ et de $v$, et de l'équation de Liouville $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = e^z$, et, finalement, des considérations sur le rapport qu'il y a entre le premier problème de la déformation et une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre.

10. Revenant à la théorie générale des courbes et des familles de courbes sur une surface, l'Auteur démontre le théorème de Kœnigs, relatif aux familles de courbes conjuguées, introduit des grandeurs fondamentales du troisième ordre, montre comment on obtient les différentielles géométriques de H, de K, des courbures principales $n_1$, $n_2$, de la courbure tangentielle, cherche les sections normales pour lesquelles les cercles de courbure sont surosculateurs, donne une méthode générale due à Christoffel pour la recherche de covariants, et introduit des grandeurs fondamentales du quatrième ordre, et, plus généralement, des grandeurs fondamentales du $m^{\text{ième}}$ ordre. Il s'occupe finalement de différentiation géométrique, dans le cas de lignes de coordonnées obliques.

11. Toute une partie est consacrée à l'étude des invariants et covariants d'ordre donné, en particulier d'abord aux invariants et covariants dans la déformation, ceux d'ordre 0 ou 1, ceux du deuxième ordre, le covariant de Riemann, ceux du $m^{\text{ième}}$ ordre; l'Auteur aborde l'étude de ce qu'il appelle les *covariants* et *invariants fondamentaux;* après avoir établi la non-existence d'un invariant fondamental du premier ordre, il s'occupe de l'invariant fondamental du deuxième ordre, puis des covariants d'ordre quelconque, cherche le nombre des invariants fondamentaux indépendants d'ordre donné, indique l'expression des invariants fondamentaux par le procédé de Christoffel, s'occupe enfin des invariants fondamentaux du quatrième ordre, puis d'ordre quelconque.

12. Une partie, très courte, est réservée aux équations de Weingarten, dans la théorie des congruences, et une dernière partie à divers sujets, tels que : l'invariance de Gauss, d'après Beltrami, les différentes expressions de la courbure, les formules de Liouville pour la théorie des lignes géodésiques, l'équation quadratique des courbures géodésiques des lignes de courbure, les courbures des lignes asymptotiques, les caractères des surfaces applicables sur les surfaces de révolution, le problème de Christoffel (à quelles conditions deux surfaces se correspondent-elles d'une façon conforme par plans tangents parallèles), l'équation aux dérivées partielles des surfaces avec lignes de courbures isothermes $\Delta^2\varphi = 0$.

R. Le Vavasseur.

STAUDE (Otto). — Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte. Mit 58 Figuren im Text. (*B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. Band XXXVIII). 1 vol. in-8, VIII-242 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1913.

Ce Livre appartient à une collection bien connue de monographies mathématiques éditées par Teubner. Après y avoir donné deux grands traités de Géométrie analytique, consacrés, l'un au premier degré, l'autre au second, l'Auteur vient d'y publier un nouvel Ouvrage sur les *cubiques gauches* (appelées en Allemagne *sections coniques cubiques*).

L'Ouvrage se divise en deux parties, la *première*, comprenant 4 Chapitres, consacrée à l'étude en coordonnées cartésiennes; la *seconde*, comprenant 3 Chapitres, à l'étude en coordonnées tétraédriques.

Première Partie. — Dans le Chapitre I, M. Staude définit d'abord les cubiques gauches par intersection de cônes et de cylindres du second degré ayant une génératrice commune, et en donne les équations, la représentation paramétrique et le tracé : il les classe, par les points à l'infini, en quatre sortes de cubiques gauches : 1° *elliptiques;* 2° *hyperboliques;* 3° *paraboliques hyperboliques;* 4° *paraboliques*. Il étudie ensuite directement les courbes gauches du troisième ordre, en montrant leur identité avec les premières. Il arrive enfin à une représentation paramétrique définitive, qui sert de base pour la suite. Le Chapitre II contient l'étude des principaux éléments de la courbe : plans osculateurs et asymptotes, cordes et *axes* (c'est-à-dire les intersections de deux plans osculateurs), tangentes et asymptotes; les pôles et plans polaires et le complexe linéaire de la courbe; les cônes et cylindres du second degré, et, plus généralement, la multiplicité des quadriques, en nombre doublement infini, passant par la courbe; les coniques enveloppes d'axes, dont le lieu des centres est lui-même une conique; les quadriques corrélatives des précédentes; enfin, par la considération des cylindres du second degré passant par la courbe, les *sommets*, c'est-à-dire les points de rencontre de la courbe avec les plans diamétraux menés par les

asymptotes; les *diamètres;* et des trièdres obliques remarquables attachés aux sommets et dont voici la définition : un sommet de la courbe est pris pour sommet d'un cône de cordes, la cubique est intersection de ce cône et du cylindre correspondant au sommet, les trois arêtes du trièdre sont la génératrice commune au cône et au cylindre, la polaire par rapport au cône du plan tangent au cylindre le long de cette génératrice et la tangente à la courbe. En rapportant la courbe à ce trièdre d'axes de coordonnées obliques on simplifie énormément les expressions analytiques : aussi a-t-on le plus souvent adopté ce système d'axes, à l'exemple de Cremona. Mais les coordonnées rectangulaires qu'utilise d'abord l'Auteur, outre qu'elles sont plus familières aux débutants, sont avantageuses pour les détails de la classification, par exemple pour caractériser les cubiques hyperboliques équilatères, les cubiques dont la conique des centres est un cercle, les cubiques équiangles, les cubiques elliptiques dont la conique des centres est une hyperbole équilatère, les cubiques elliptiques situées sur un cylindre ou un hyperboloïde de révolution, les cubiques paraboliques hyperboliques orthogonales, les cubiques paraboliques à directrice, etc. Une partie des variétés précédentes ne s'introduit d'ailleurs que dans le Chapitre III, qui est consacré aux quadriques de révolution passant par la courbe : l'Auteur forme, ce qu'on n'avait pas encore fait, leurs équations en coordonnées rectangulaires. Dans le Chapitre IV, chacune des quatre sortes de cubiques est étudiée en détail, d'abord en coordonnées rectangulaires, puis avec les coordonnées obliques dont il a été question plus haut. Les expressions, qui doivent être nouvelles, obtenues de cette seconde manière pour les cubiques hyperboliques sont entièrement symétriques en $x$, $y$, $z$ et mettent aisément en évidence le groupe de substitutions linéaires du paramètre qui conserve la courbe (*groupe de la double pyramide*, H. Wiener).

Seconde Partie. — Dans le Chapitre I, les divers éléments, tels que les plans osculateurs, les tangentes, les cordes et les axes, les sécantes, les pôles et polaires, les involutions de points sur la courbe, sont étudiés en coordonnées *tétraédriques :* en particulier, avec un *tétraèdre osculateur*, on arrive à la représentation

paramétrique suivante :

$$x : y : z : t :: \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1,$$

qui atteint, comme on le voit, le maximum de simplicité. Le Chapitre II présente l'étude des surfaces du second degré passant par la courbe, les points ou les plans *conjugués*, c'est-à-dire conjugués par rapport à toutes ces quadriques, et leurs relations avec les points et droites harmoniquement associés dans un triangle. Cette théorie des éléments conjugués conduit à une représentation paramétrique qui est nouvelle, et avec laquelle le groupe reproductif se reconnaît immédiatement. A la fin du Chapitre on montre le moyen de passer du tétraèdre osculateur aux coordonnées rectangulaires, et l'on retrouve les sommets comme points de la courbe situés dans le plan conjugué du plan de l'infini. Le Chapitre III traite sommairement des modes projectifs de génération de la courbe, de sa construction au moyen de *six* de ses points, de la relation qui existe entre *sept* points, et d'un point remarquable associé à un système quelconque de quatre points de la courbe.

Sans être complète, l'énumération précédente montre néanmoins quelle est l'abondance des détails contenus dans cet Ouvrage. Quelques résultats nouveaux sont dus à l'Auteur : mais le principal mérite du livre réside, croyons-nous, dans la clarté et l'ordre méthodique de l'exposition. Des figures particulièrement soignées apportent au texte un utile complément. D'autre part, chaque résultat notable est accompagné d'indications bibliographiques précises. Un Index alphabétique des matières est placé à la fin du Volume pour faciliter les recherches.

Ce Livre a une valeur documentaire, et, comme tel, il est appelé à rendre service aux professeurs pour le choix ou la mise au point de certains exercices de Géométrie analytique ou descriptive et pour l'exécution de modèles intéressants. On peut d'ailleurs le lire, presque en entier, sans autres connaissances que les notions d'Algèbre et de Géométrie analytique les plus classiques du programme de Mathématiques spéciales, et les élèves trouveraient profit à y étudier quelquefois, sur des exemples concrets et complètement développés, l'application de diverses théories générales.

TH. GOT.

DELASSUS (E.). — Leçons sur la Dynamique des Systèmes matériels. 1 vol. gr. in-8, XII-421 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1913.

M. Delassus distingue l'une de l'autre la Mécanique rationnelle classique et la Mécanique analytique proprement dite. La première est essentiellement constituée par trois théorèmes généraux, fournissant sept équations qui ont reçu le nom d'*équations universelles :* c'est à ces trois théorèmes qu'on s'adresse habituellement pour mettre un problème en équations. La seconde, créée par Lagrange, est, en quelque sorte, condensée dans la seule équation de d'Alembert qui, devant avoir lieu quels que soient les déplacements virtuels du système, fournit toujours des équations en nombre suffisant pour déterminer la solution d'un problème.

Bien qu'il n'existe pas entre ces deux Mécaniques une distinction tranchée, c'est à la seconde, la seule entièrement générale, que l'Auteur se rattache systématiquement. Il se place nettement du côté analytique, et même purement analytique, ne s'efforçant que de mettre les équations du mouvement d'un système sous quelques formes générales commodes pour l'intégration. Les trois grands théorèmes de la Mécanique classique sont, pour ainsi dire, presque passés sous silence. Du reste, l'Auteur se préoccupe fort peu des applications : celles qu'il donne sont rejetées dans un chapitre final, et, en quelque sorte, accessoire. M. Delassus nous dit, d'ailleurs, dans quel esprit il a conçu son Livre : « Ces Leçons n'ont pas été écrites en vue des applications à la Physique ou à l'art de l'ingénieur; elles sont rigoureusement théoriques et le physicien n'y trouvera rien de directement utilisable. Le théorème des forces vives? Il n'en est même pas parlé! La fonction des forces? Il est montré qu'elle n'a aucun sens par elle-même et que c'est simplement un morceau, facile à calculer, de la *fonction génératrice!* » (*Introduction*, p. XII).

En dehors de son caractère nettement théorique, le Livre de M. Delassus mérite de retenir l'attention sur deux autres points. Il s'agit de deux postulats que, le plus souvent, on admet implicitement à cause de leur soi-disant évidence, et qui se trouvent pouvoir être mis en défaut.

Voici le premier de ces postulats : *Si l'on réalise la liaison d'un système matériel au moyen de corps auxiliaires dont la*

*masse est négligeable, nulle à la limite, ces corps auxiliaires n'ont aucune influence sur le mouvement qui se produit.* Pour mettre ce principe en échec, M. Delassus considère un point assujetti à se mouvoir dans un plan horizontal, et il imagine de réaliser la liaison en plaçant ce point au centre d'un disque de masse nulle, roulant sur un plan horizontal situé au-dessous du premier à une distance égale au rayon du disque, mais de façon que le plan du disque reste toujours vertical. Il est facile de voir que la liaison est véritablement réalisée au point de vue analytique, c'est-à-dire que le point pourra, effectivement, parcourir tout le plan qui lui est assigné; mais, à partir d'une position donnée, le point ainsi lié au disque n'est pas susceptible de prendre un déplacement virtuel quelconque compatible avec sa liaison : il est obligé de se déplacer dans une direction située dans le plan même du disque. Ainsi le disque roulant, bien qu'étant de masse nulle, ne sera pas sans influence sur le mouvement du point. Il n'en serait plus de même si nous avions placé notre point matériel au centre d'une sphère de masse nulle roulant sur un plan horizontal : le déplacement virtuel du point, dans son plan, eût été alors arbitraire. M. Delassus fait, à ce sujet, une étude approfondie des liaisons dont il distingue les réalisations *parfaites* et *imparfaites*. Il étend même ces notions aux systèmes soumis à des liaisons d'ordre supérieur.

Le second postulat que redresse M. Delassus se rapporte à la théorie des *liaisons unilatérales :* On admet comme évidente la cessation effective et simultanée de plusieurs contacts dont les réactions sont négatives. Or, ainsi entendu d'une façon générale, ce postulat est inexact. M. Delassus donne l'exemple intéressant d'une barre mobile dans un plan, ses deux extrémités s'appuyant sur deux droites rectangulaires de ce plan, la liaison étant unilatérale; il peut arriver, dans certains cas particuliers, qu'un contact à réaction négative persiste.

S'il fallait caractériser d'un mot l'Ouvrage de M. Delassus, on pourrait dire qu'il se distingue par un souci constant d'originalité. Aucune question n'y est présentée sous sa forme habituelle. Aussi le Livre ne sera-t-il pas sans intérêt pour le lecteur qui connaît déjà la Mécanique. Sera-t-il aussi goûté des étudiants qui abordent l'étude de cette science? L'Auteur nous déclare qu'ayant tenté

l'expérience dans son enseignement, il a constaté que la voie qu'il ouvrait était très accessible à la plupart des élèves sortant du cours de Mathématiques générales.

H. Vergne.

---

BÜTZBERGER (F.). — Über bizentrische Polygone Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion. 1 brochure in-8, 60 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1913.

La première Partie de cette Brochure (32 pages) est consacrée aux polygones qui sont inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre. Après quelques détails historiques et bibliographiques, l'auteur considère, successivement, tous les polygones dont le nombre de côtés ne dépasse pas 10, y compris ceux de ces polygones qui sont étoilés, et détermine la relation existant, pour chacun d'eux, entre les rayons des cercles inscrit et circonscrit, et la distance des centres de ces cercles. Comme, d'après un théorème bien connu de Poncelet, s'il existe un polygone de $n$ côtés inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre, il en existe une infinité, et tout point du cercle circonscrit est sommet d'un de ces polygones, l'Auteur effectue ses calculs, pour lesquels il ne fait usage que de la géométrie et de la trigonométrie élémentaires, en opérant sur le polygone qui admet pour axe de symétrie la ligne des centres des cercles.

La seconde Partie (16 pages) est consacrée à des systèmes de cercles ou de sphères étudiés par Steiner; il s'agit, tout d'abord, de séries de cercles, situés dans un plan, tangents à deux cercles donnés et tangents entre eux successivement. Comme il est possible de transformer par inversion deux cercles, n'ayant pas de points communs, en deux cercles concentriques, il suffit de considérer les cercles donnés dans ce cas particulier; les centres des cercles forment alors une ligne polygonale régulière; la condition pour que celle-ci se ferme est la condition de *commensurabilité* de la série de cercles. La projection stéréographique permet de considérer des cercles situés, non plus dans un plan, mais sur une sphère. L'Auteur considère ensuite des systèmes de sphères tangentes entre elles et tangentes à deux sphères données ou à une sphère et un plan.

Enfin une dernière Partie (12 pages) est consacrée à une Note historique relativement à la découverte de l'inversion et spécialement aux travaux de Steiner sur ce sujet.

CH. BIOCHE.

---

KNOPP (KONRAD). — FUNKTIONENTHEORIE (*Sammlung Göschen*). Erster Teil : *Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen.* Mit 9 Figuren. 1 vol. in-12, 142 pages. Zweiter Teil : *Anwendungen der Theorie zur Untersuchung spezieller analytischer Funktionen.* Mit 10 Figuren. 1 vol in-12. 116 pages. Berlin und Leipzig, G. J. Göschen, 1913.

La collection Göschen se compose de petits volumes portatifs, fort bien imprimés et très joliment présentés.

M. Knopp suppose connue la théorie des séries imaginaires (traitées dans *Einleitung in die Funktionentheorie* de M. Max Rose, appartenant à la même collection).

Dans le Volume I, il expose les éléments de la théorie des ensembles; la définition de l'intégrale imaginaire; la série de Taylor; la notion de prolongement analytique; les premières propriétés des fonctions entières, la façon dont elles se comportent lorsque la variable devient infinie; le théorème de Laurent, la notion de pôles et de points singuliers essentiels, et les éléments de la théorie des résidus. Ce Volume contient une trentaine d'exercices.

Dans le Volume II, M. Knopp donne le développement des fonctions entières en produits infinis mettant en évidence les zéros; le théorème de M. Mittag-Leffler sur les fonctions méromorphes; des notions sur la fonction $\Gamma$, sur les fonctions périodiques et sur les fonctions doublement périodiques; enfin quelques applications du calcul des résidus. Des indications bibliographiques guident le lecteur qui voudrait pousser plus loin ces études.

Disons, pour terminer, que toutes les démonstrations données sont extrêmement rigoureuses, et que tout l'Ouvrage, fort bien fait, pourra être très utile à des candidats désireux de repasser ces matières à la veille d'un examen.

E. CAHEN.

---

ГРАВЕ (Димитрій). — Адементарный курсъ теоріи чисецій. вгорое. значительно измѣненное и дополненное изданіе съ 100 страницами числоыхъ таблицъ. [GRAVÉ (Demetrius), Cours élémentaire de la théorie des nombres]. 1 vol. in-8 jésus, VII-315 pages. Tables : 100 pages. Kieff, Typographie impériale de Saint-Vladimir, 1913.

M. Demetrius Gravé publie, en langue russe, une deuxième édition d'un Cours élémentaire de Théorie des Nombres. La première édition date de 1909 et, dans l'intervalle, l'Auteur a publié un Cours autographié sur les formes quadratiques. C'est là un beau succès de librairie que lui envieraient volontiers quelques auteurs français de ma connaissance; c'est aussi une marque de l'estime renaissante du public mathématique pour l'Arithmétique supérieure (surtout si l'on considère que cette publication coïncide avec l'apparition de traités analogues en France, Allemagne, Angleterre). Cette estime entraîne, non seulement la publication de traités élémentaires, mais encore une refonte partielle de ces traités, en tenant compte des résultats nouveaux, obtenus depuis Gauss, et qu'on peut raisonnablement considérer comme élémentaires.

Depuis une quarantaine d'années, en effet, les traités élémentaires de théorie des nombres pivotent autour d'un type assez bien délimité (qu'on trouve, par exemple dans l'Algèbre de Serret, pour ne citer qu'un des livres français les plus anciens). M. Gravé semble bien s'être conformé à ce type dans sa première édition; la deuxième en diffère assez notablement et les additions faites ne sont pas seulement de simples additions, elles s'amalgament assez intimement avec l'ensemble et en changent la physionomie. J'ai cru y voir une tentative, qui me paraît très louable, pour montrer que la théorie des nombres n'est pas, comme on le croit souvent, une suite discontinue de propositions isolées, mais, ce qu'elle a toujours paru probablement à ses vrais adeptes, une science aussi harmonieuse dans son tout que dans ses parties, avec des méthodes et des théories qui lui sont propres, et qui nécessite une adaptation préalable comme toute science ou tout art.

Après un Chapitre obligé sur la divisibilité et les nombres premiers on trouve une théorie assez générale des fonctions arithmé-

tiques, de leur inversion, des identités d'Hermite, Dirichlet, etc. Puis un exposé normal sur les congruences, les résidus de puissances, le symbole de Legendre, la loi de réciprocité. Une innovation assez intéressante (en tant qu'introduite dans un traité élémentaire de théorie des nombres) est de placer ensuite une théorie des groupes finis et de leurs rapports avec les résidus de puissances. En supposant, entre les éléments du groupe, l'existence d'une deuxième opération, on obtient la théorie des *domaines*, dont un cas particulier nous ramène aux imaginaires de Galois.

La théorie des fractions continues, tout en constituant une application de la notion de division et de partie entière, fournit aussi des méthodes de démonstration et de recherche pour des problèmes de congruences du premier et du second degré; c'est à ce double titre que M. Gravé y consacre deux Chapitres. Il n'y a là, bien entendu, que des relations connues, des procédés de démonstrations, indiqués comme artifices ingénieux par bien des auteurs de théorie des nombres; ce qui me paraît remarquable et nouveau, c'est l'essai de systématisation de ces relations et de ces prétendus artifices ([1]). Les propriétés des fractions continues illimitées sont rattachées aux substitutions linéaires de deux variables, ou encore aux substitutions homographiques; j'ai été très heureux de retrouver dans ce Livre une méthode d'exposition qui me parait présenter beaucoup d'avantages ([2]).

On trouve ensuite quelques pages sur les formes quadratiques binaires, leur réduction et leur équivalence. A ce sujet, l'Auteur ne s'est pas cru tenu de se limiter aux recherches de Gauss et a indiqué les notions (classiques en analyse, mais non en théorie des nombres) de groupe modulaire et de domaine fondamental du groupe. La théorie précédemment faite des fractions continues fournit une méthode de réduction des formes indéfinies et, par suite, une résolution de l'équation de Pell-Fermat.

On sait que la théorie des formes binaires a trouvé un complément et une illustration inattendue dans la théorie des nombres

---

([1]) C'est d'ailleurs ce qu'avait fait Lagrange, mais les recherches de Lagrange ont été un peu oubliées, après l'apparition des travaux de Gauss.

([2]) Je m'en suis servi notamment pour résumer les propriétés des fractions continues au début d'un article sur leur transformation (*Bulletin de la Société mathématique*, 1912).

complexes quadratiques. Cette théorie amorcée par Gauss lui-même, avec un but très différent (loi de réciprocité biquadratique), a eu une rare fortune et un développement considérable; on a pu, notamment, l'étendre aux corps algébriques de degré quelconque. C'est cette extension qu'indique très succinctement M. Gravé; limité par les dimensions de l'Ouvrage, il n'a pu lui donner un développement suffisant, ni même mettre en relief les relations de cette théorie avec celle de formes.

L'Ouvrage se termine par trois Chapitres qui semblent un peu isolés des précédents. L'un, sur les matrices, est plutôt un exposé algébrique; j'y ai vu indiqué cependant, une application possible des matrices à termes entiers à la représentation des nombres algébriques. Les propriétés n'en sont pas exposées; je n'ai pas vu, ce qui est cependant essentiel, la conservation des opérations rationnelles par cette représentation ([1]). Le Chapitre XIV est consacré aux nombres de Bernoulli dont l'intérêt s'est plutôt fait sentir jusqu'ici en Analyse; il n'est pas douteux, néanmoins, que leur étude soit du ressort de l'Arithmétique et l'on sait notamment le rôle, peut-être fortuit, qu'ils jouent dans les recherches modernes sur le problème de Fermat. Trois pages formant le Chapitre XV sont enfin consacrées à ce problème ou « dernier théorème ». de Fermat. La brièveté de ce Chapitre pourra étonner certains qui, d'après les publications de ces dernières années, pourraient s'imaginer que ce problème est l'actuel pivot de la théorie des nombres. Je pense au contraire que cette brièveté est un mérite, car je ne vois guère à cette propriété isolée d'autre intérêt que celui que lui a valu la célébrité de son auteur, la beauté propre des travaux auxquels elle a conduit Kummer et, en dernier lieu, la fondation d'un prix international.

Dans le cours du Livre, M. Grave a pu citer assez souvent des travaux de plusieurs de ses élèves sur les sujets qu'il expose; citons des recherches de MM. Schmidt sur la théorie analytique des substitutions, Zylinski sur les facteurs singuliers du discriminant, Ostrowski sur les domaines finis. (Indiquons à ce propos qu'il ne

---

([1]) J'ai indiqué personnellement, dans plusieurs publications, l'intérêt de cette représentation et j'en ai donné d'assez nombreuses applications. J'ai été heureux de la retrouver dans l'Ouvrage russe; ce m'est un plus sûr garant de son utilité.

faut pas confondre cette dénomination avec celle de M. Dedekind, *Endliche Körper*, qui désigne un corps de nombres algébriques.)

De nombreuses Tables numériques terminent l'Ouvrage : extrait des Tables de diviseurs de Burckhardt, Tables de carrés, de racines primitives et d'indices (notamment une disposition ingénieuse due à Korkine, à laquelle sont aussi consacrées quelques pages de l'Ouvrage); des Tables, plus spécialement consacrées aux formes quadratiques, développement en fraction continue de radicaux, solutions de l'équation de Pell, etc.; deux Tables se rattachent à la théorie des racines primitives, quotients de $2^{p-1}-1$ par $p$ et périodes de la réduction en fraction décimale de $\frac{1}{m}$; enfin, l'énumération des trente-deux premiers nombres de Bernoulli.

A. Châtelet.

---

BAER (Werner-Siegbert). — Beiträge zum Waringschen Problem. *Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der hohen philosophischen Fakultät der Georg-August Universität zu Göttingen vorgelegt.* Une brochure in-8°, 75 pages. Göttingen, W. Fr. Kaestner, 1913.

Waring (1782) a énoncé la proposition suivante, dont M. Hilbert a réussi le premier (1909) à démontrer la vérité : Pour tout exposant entier $n \geqq 2$, il y a un nombre $h(n)$ le plus petit, de sorte que *tout* entier positif peut être décomposé en une somme de $h(n)$ puissances $n^{\text{ièmes}}$ d'entiers $\geqq 0$. Dans sa Thèse, l'Auteur étudie les bornes de $h(n)$ pour $n = 3, 4, 5, 6$ et traite des questions analogues.

Pour $n = 3$, comme on sait, M. Wieferich (1909) a prouvé que $h(3) = 9$ et M. Landau (1909) a montré, grâce à ses méthodes transcendantes de la théorie des nombres premiers, qu'à partir d'une certaine limite, tout entier positif se compose de huit cubes tout au plus. Ce dernier théorème établi d'une manière élémentaire dans le premier Chapitre, l'Auteur s'occupe de la composition de sept cubes qui n'a pas encore été traitée; il donne quelques progressions arithmétiques, dont on peut décomposer chaque nombre en une somme de sept cubes. Par conséquent, le nombre des entiers $\leqq x$ décomposables en sept cubes tout au plus a

l'ordre $x$ de grandeur, c'est-à-dire que le quotient de ce nombre et $x$ ne peuvent osciller, pour $x \geqq 1$, qu'entre deux bornes limitées positives (¹). Ensuite, M. Baer s'occupe de la décomposition en sixièmes puissances; en généralisant ses méthodes exposées plus haut, il parvient à réduire la meilleure borne connue de $h(6) \leqq 970$ jusqu'à $h(6) \leqq 478$. Puis, il présente quelques nouvelles remarques concernant la décomposition en quatrièmes puissances et qui prennent pour point de départ le résultat connu de $h(4) \leqq 37$. Enfin, il donne la décomposition en cinquièmes puissances : M. Wieferich a prouvé que $h(5) \leqq 59$; l'Auteur parvient à prouver que $h(5) \leqq 58$ et termine en démontrant un théorème de la répartition des nombres décomposables en 57 puissances cinquièmes tout au plus. *La R.*

## MELANGES.

### L'ABBÉ BOSSUT

**(A l'occasion du centenaire de sa mort);**

PAR M. E. DOUBLET,
astronome à l'Observatoire de Bordeaux.

(*Suite et Fin.*) (²).

D'après l'*Annuaire de l'Institut* publié en brumaire an VI, la Section de Géométrie était ainsi composée : Lagrange, Laplace, Borda, Bossut, Legendre et Delambre. Nous y voyons aussi que Bossut demeurait aux Galeries du Louvre, n° 1.

D'un autre côté, l'École Polytechnique tint à profiter de sa grande expérience; elle se l'attacha comme examinateur. Sa nomination est datée du 6 prairial an IV (25 mai 1796). Il ne se retira

(¹) *Voir* aussi une Note du même Auteur : *Ueber die Zerlegung der ganzen Zahlen in sieben Kuben*, publiée dans les *Mathematische Annalen*, t. LXXIV, 1913, p. 511-514.

(²) Voir *Bull. des Sc. math.*, juin 1914, p. 187.

qu'en 1809. C'est probablement la seule fois que cette fonction a été exercée par un homme aussi âgé.

Il ne resta d'ailleurs pas inactif. Il publia encore deux Ouvrages.

Le premier est son *Histoire générale des Mathématiques*, qui parut en 1810. Elle se compose de deux volumes in-8°, ornés du portrait de l'auteur, et son titre nous apprend que celui-ci était : Membre de l'Institut de France, de celui de Bologne ; des Académies de Pétersbourg, de Turin, de la Société provinciale d'Utrecht, membre de la Légion d'honneur.

Ce Livre avait l'avantage d'être plus accessible au public que le grand Ouvrage de Montucla, qui est devenu malheureusement à peu près introuvable et a dû être toujours d'un prix relativement élevé. On sait que le travail de Montucla, publié une première fois en 1758 ne traitait alors de l'histoire des Mathématiques que jusqu'à la fin du XVII^e siècle. Sous cette première forme, il comprenait deux volumes in-4°, qui furent réimprimés en 1798 avec des corrections et des additions considérables. Mais ce n'était qu'un commencement, et Montucla aurait voulu parler du XVIII^e siècle et des grands géomètres qui l'ont illustré. Il ne put exécuter son projet, étant mort le 19 décembre 1799. Lalande, qui l'avait encouragé, décidé à se remettre au travail à la fin de sa carrière, se mit à la place de son ami, et, s'aidant des notes manuscrites qu'il avait laissées, publia deux nouveaux volumes, qui parurent en 1802.

Fidèle à son animosité contre Lalande, Bossut nous apprend qu'il ne dira rien de cette suite. Quant à l'Ouvrage de Montucla lui-même, il en dit le plus grand bien, sans dissimuler qu'il a essuyé plusieurs critiques : « On lui reproche de manquer un peu de méthode ; on y trouve quelques plaisanteries qui, même en les supposant naturelles, détonnent avec la gravité du sujet ; on voudrait que l'auteur fût entré un peu plus dans l'esprit des Ouvrages qu'il analyse : par exemple, on regrette qu'il n'ait pas fait connaître avec quelque détail celui d'Apollonius sur les sections coniques. Il donne de petits Traités sur presque toutes les parties des Mathématiques ; mais ces Traités ne peuvent, ni servir à l'instruction des commençants, parce qu'ils ne sont pas classés dans l'ordre naturel et successif des connaissances élémentaires, ni contenter les lecteurs plus avancés, parce qu'ils sont trop souvent incomplets. On ajoute qu'une histoire des Mathématiques n'est pas faite pour les enseigner.

Quoi qu'il en soit, Montucla conservera du moins la gloire d'avoir produit un ouvrage utile, et d'une espèce d'autant plus rare, que les hommes épris de l'amour des Sciences ont ordinairement plus de penchant à les enrichir de leurs propres découvertes, qu'à rapporter celles des autres : on lui doit tenir compte de ce dévouement ».

Bossut rend donc justice à son devancier, et très naturellement, il a profité de son travail. D'autres historiens des Mathématiques, venus beaucoup plus tard, ont tiré parti du grand Livre de Montucla sans toujours le bien comprendre, et sans le reconnaître ([1]).

Sous sa première forme, le Livre de Bossut avait été bien accueilli, mais il n'en fut pas de même en 1810, et voici pourquoi : l'auteur nous l'apprend lui-même dans l'*Avertissement* de son dernier travail, dont nous allons parler bientôt : dans l'*Essai*, il n'avait parlé que des morts, et personne n'avait pris assez d'intérêt à leur mémoire pour examiner scrupuleusement s'il n'avait pas commis quelques erreurs, en rendant compte de leurs travaux : « Dans l'*Histoire*, que j'ai poussée jusqu'à ces derniers temps, ayant eu à rapporter les principales découvertes faites par des auteurs vivants, surtout par des Français, je me suis exposé à des plaintes, à des réclamations, qui m'ont, en effet, assailli de plusieurs côtés...»

Décidément, l'histoire contemporaine est bien difficile à écrire, même celle des Mathématiques.

A 82 ans, Bossut publia son dernier Ouvrage, à l'*Avertissement* duquel nous venons de faire un emprunt.

Le vieux mathématicien n'était pas heureux, et il n'y a pas à s'en étonner, puisqu'il n'avait, semble-t-il, aucune famille, et, par suite de son grand âge, les infirmités étaient venues. De plus, les malheurs de la guerre, qui déchirait l'Europe depuis si longtemps, le privaient des relations qu'il aurait eu plaisir à entretenir avec les mathématiciens étrangers, et il n'avait pas l'espoir d'un meilleur avenir, au moins en ce qui le concernait. Sa consolation était de se reporter aux succès de sa jeunesse ; aussi, publia-t-il en 1812 ses *Mémoires de Mathématiques concernant la Navigation*, *l'Astronomie physique*, *l'Histoire*, etc.

---

([1]) *Voir* dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, Vol. X, 1876, un article de M. Hoüel, p. 136, et un de M. Rayet, p. 258.

Dans ce Livre, il a reproduit les Mémoires couronnés par l'Académie des Sciences en 1761, 1762 et 1765, où il traite de l'arrimage des vaisseaux et des altérations que la résistance de l'éther peut produire dans le moyen mouvement des planètes. La collection des *Prix de l'Académie*, où ces Mémoires avaient paru, était devenue extrêmement rare, et presque introuvable dans la librairie. En les réimprimant, l'auteur répondait à un besoin réel qui lui avait été souvent exprimé.

Puis vient une espèce de commentaire sur l'*Histoire générale des Mathématiques*, publiée deux ans auparavant. Ce commentaire se compose de huit Notes distinctes, parfois fort longues, se rapportant à divers points de l'Histoire. Bossut se rendait bien compte, semble-t-il, que son œuvre était par trop succincte en quelques endroits, c'est ce qui l'a déterminé à écrire ces Notes, parmi lesquelles nous signalerons la quatrième, relative au mouvement elliptique des planètes, la cinquième, aux premiers travaux des géomètres sur les perturbations des corps célestes, la sixième à l'obliquité de l'écliptique.

Enfin, le Volume se termine par un *Discours sur la vie et les ouvrages de Pascal*.

Bossut était un des plus vifs admirateurs du grand écrivain du XVII^e siècle ; aussi, c'est sans doute avec joie qu'en 1779, il publia la collection des *Œuvres de Pascal* (5 volumes in-8°), en tête de laquelle ce discours parut pour la première fois.

On a tant écrit sur Pascal qu'il nous semble inutile d'analyser ce discours, où l'on ne trouverait guère que des faits connus de tout le monde. Notons cependant la chaleur avec laquelle Bossut défend son héros et s'efforce de réfuter les prétentions de Descartes, qu'il révère d'ailleurs beaucoup, à la découverte de la pesanteur de l'air.

Et ce n'est pas seulement le mathématicien, le physicien, le polémiste de génie que Bossut admire dans Blaise Pascal, c'est aussi le théologien. Il ne se lasse pas de transcrire les *Pensées*.

Ceci nous amène à croire que Charles Bossut, l'ami de d'Alembert et aussi de Condorcet [1], a été un des derniers jansénistes.

---

[1] Il a toujours rendu justice à celui-ci. Voici comment il l'apprécie :

« Ce dernier, non seulement les découvrit par une voie très simple et très directe (il s'agit des conditions d'intégrabilité des équations différentielles d'ordre supérieur au premier, qu'Euler avait transmises à Condorcet, mais sans y ajouter

Du reste, cela est bien d'accord avec ce que nous savons de son caractère sombre, de son humeur atrabilaire. On lisait en effet, dans un manuscrit de Bossut, que Delambre a eu entre les mains (qu'est devenu ce manuscrit ?), qu'il avait toujours eu : « Une roideur de caractère qui lui a souvent nui auprès de ceux qui ne le connaissaient que superficiellement. Il n'accordait pas facilement sa confiance, il croyait en général les hommes dissimulés et trompeurs, mais, quand il croyait pouvoir s'abandonner à la franchise naturelle de son âme, il mettait dans le commerce de la vie une effusion de sentiments vrais qui lui ont fait une foule d'amis dévoués, surtout dans le corps militaire du génie. Il abhorrait les charlatans de toute espèce, nous dit-il encore, et quelquefois il avait eu l'imprudence ou la maladresse de leur donner à connaître son opinion. Mais il cherchait partout le vrai mérite, il était obligeant et il se plaint amèrement des ingrats ; il se persuada que des hommes qui lui devaient leur première existence, avaient montré l'acharnement le plus soutenu et s'étaient donné bien des peines qu'ils auraient pu s'épargner pour l'écarter de places auxquelles il n'avait jamais aspiré ».

Les derniers temps de la vie de Bossut furent sans doute bien tristes, car ses infirmités devaient aller en s'accroissant, et le spectacle des malheurs publics ne pouvait que redoubler ses chagrins. Il ne vit pas le retour de cette paix qui, selon son espérance, devait rétablir « la libre communication entre les membres de la république universelle des Sciences et des Belles-Lettres ». Il mourut le 14 janvier 1814, âgé de 83 ans et 5 mois.

---

les démonstrations), mais il donna une nouvelle extension à cette théorie : premier essai d'un grand talent pour l'Analyse, auquel on regrettera que l'auteur ne se soit pas livré tout entier, tant pour son bonheur que pour l'avancement des Sciences ».

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

INSTITUT DE FRANCE. ACADÉMIE DES SCIENCES. — PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE TENUES DEPUIS LA FONDATION DE L'INSTITUT JUSQU'AU MOIS D'AOUT 1835, publiés, conformément à une décision de l'Académie, par MM. les Secrétaires perpétuels. Tome II : An VIII-XI (1800-1804). 1 vol. in-4° jésus (32,5 × 25), IV+IV+680 pages. Hendaye (Basses-Pyrénées), Imprimerie de l'Observatoire d'Abbadia, 1912. (En vente chez Gauthier-Villars, Paris.)

Nous avons signalé antérieurement [1] l'utilité et l'intérêt de la publication des Procès-verbaux de l'Académie, non seulement pour l'histoire des Sciences, mais encore pour l'étude de la vie économique du pays. L'Académie des Sciences jouait, en effet, autrefois de multiples rôles qui furent plus tard dévolus à d'autres organes d'Etat. On en pourra juger encore par la promenade que nous allons faire à travers le Tome II qui couvre la période allant du 22 septembre 1799 au 22 septembre 1803, et qui se termine par l'arrêté consulaire réorganisant l'Institut.

Durant l'an VIII, le bureau fut composé, pour le premier semestre, de Sabatier, président, Cuvier et Lefèvre-Gineau, secrétaires; pour le second semestre, de Bonaparte, président, Delambre et Cuvier, secrétaires.

Le 1er vendémiaire, le Cn Saget, entrepreneur de la verrerie située rue de la Gare, écrit à la Classe pour l'engager à faire constater la bonté des bouteilles qui sortent de cette manufacture. Les Cns Darcet, Chaptal et Loysel, nommés commissaires pour cet objet, diront dans leur rapport du 1er frimaire : « La Classe doit à l'intérêt des arts et du commerce de déclarer que les produits de la verrerie du Cn Saget méritent la confiance publique. »

Le 6 vendémiaire expire le délai fixé pour le concours relatif aux poteries, et aucun Mémoire n'a été présenté.

[1] Voir *Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. XXXVIII, mars 1914, p. 65.

Le 11, la Classe décide d'intervenir auprès du Directoire pour faire libérer le confrère Dolomieu, prisonnier de guerre à Messine.

Le 16, à l'occasion de la présentation d'une eau destinée à guérir les plaies, un membre demande que la Classe arrête en principe qu'elle ne s'occupera de l'examen d'aucun remède dont elle ne connaîtra pas la composition. La proposition adoptée sera maintenue à la séance suivante après nouvelle discussion.

Le 21, beau rapport de Prony sur une machine hydraulique du C^n^ Trouville, qui offre une application du siphon à plusieurs branches à l'élévation des eaux.

Le 26, le procès-verbal fait mention de la présence des C^ns^ Monge et Berthollet, de retour d'Égypte, et du plaisir que la Classe éprouve à les retrouver dans son sein, après l'expédition pénible à laquelle ils s'étaient voués, pour l'avancement des sciences et la gloire de la République.

Le 6 brumaire, rapport de Le Roy. Le C^n^ Junod, déjà connu de l'Institut par des boutons d'habits et de vestes (d'une matière non employée jusqu'ici et dont les C^ns^ Darcet et Vauquelin ont fait un rapport favorable), a présenté depuis à la Classe une pipe d'acier poli, qui a l'avantage d'être assez courte, quoiqu'elle représente, par la longueur de ses différents tuyaux, une pipe de 1^m^ de long. La Classe, « qui porte son attention sur tout ce qui paraît offrir quelque objet d'utilité », écoute avec patience la lecture d'un rapport qui occupe deux colonnes.

Le 11, le C^n^ Huzard demande des commissaires pour venir avec lui examiner une maladie des moutons appelée *tournis*, sur des sujets actuellement attaqués de cette maladie et qui sont à sa disposition.

Le 21, rapport de Laplace, Bonaparte et Lacroix sur un Mémoire de Biot, concernant les équations aux différences mêlées. Dans l'historique, qui est un modèle du genre et où l'on reconnaît la plume de Laplace, on notera que c'est à Fontaine qu'on doit la remarque importante qu'une équation différentielle peut être considérée comme le résultat de l'élimination d'une ou de plusieurs constantes entre une équation primitive (ou finie) et ses différentielles.

Le même jour, examen d'un bouillon tonique et incorruptible

du C^n Le Rouge, propre pour le service de la Marine dans les voyages au long cours, ainsi que pour celui des hôpitaux civils et militaires.

Le 6 frimaire, rapport de Prony et de Laplace sur un Mémoire de Biot qui a pour titre : *Considérations sur les intégrales des équations aux différences finies*. Ce rapport se termine ainsi : « Le C^n Biot a composé le Mémoire dont nous venons de rendre compte, à la fin de l'an V et peu de temps après sa sortie de l'École Polytechnique où il a fait ses études. A cette époque, il était déjà nommé professeur de mathématiques à l'École centrale du département de l'Oise; le succès avec lequel il s'acquitte de ses fonctions, à un âge où communément on a plus besoin de recevoir des leçons qu'on n'est propre à en donner, et les résultats nouveaux et intéressants auxquels il était déjà parvenu sur des questions épineuses, ne pouvaient que faire augurer très favorablement de ses travaux futurs. Il a justifié les espérances qu'on avait conçues de lui par ses recherches sur les différences mêlées... »

Le 21 frimaire, rapport sur les eaux minérales artificielles fabriquées à Paris par Nicolas Paul et C^ie, où l'on apprend que l'inventeur de l'eau de Seltz artificielle est Venel (1755), médecin à Montpellier. Paul prépare entre autres de l'eau de Spa. La Classe déclare qu'il a parfaitement rempli l'objet qu'il s'était proposé, de fournir à la médecine des médicaments comparables, souvent même supérieurs, aux eaux minérales naturelles.

Le 26, rapport sur les moyens et les avantages de naturaliser le hareng, poisson de mer, dans les eaux de la Seine, voisines de son embouchure.

Description des opérations faites pour comparer l'ancienne pinte de Paris aux nouvelles mesures de capacité : « la Commission a eu à examiner la continence exacte des deux étalons », phrase qui montre que les mots vieillissent.

Le 6 nivôse, nouvelle balance de Dillon et paratonnerre perfectionné par Regnier.

Rapport de Lagrange, Laplace et Delambre sur un Mémoire de Gail : *Description d'un astrolabe inventé par Synésius;* ce long rapport, très important au point de vue de l'histoire de l'Astronomie ancienne, contient des indications curieuses sur l'histoire de la Géométrie.

Le 21, rapport de Delambre et Lalande sur un Mémoire de Burckhardt; très intéressant pour l'Astronomie d'observation.

Le 11 pluviôse, le Ministre de l'Intérieur demande l'opinion de la Classe sur le mérite d'un ancien vétérinaire, Lafosse. « Le degré d'utilité que l'Institut attachera aux travaux de ce citoyen déterminera les droits qu'il doit avoir à la reconnaissance nationale et au rétablissement de la pension qu'il touchait de l'ancien Gouvernement; le rapport demandé intéresse plus encore la gloire du C^n^ Lafosse que ses prétentions utiles. » De fait, Lafosse avait combattu maintes pratiques absurdes et dangereuses dans le traitement des chevaux et avait créé un enseignement d'hippiatrique. La Classe consacre à ses travaux un rapport de 14 colonnes.

Le 16, rapport de Cuvier sur des observations faites en Égypte par Geoffroy et relatives à l'histoire des animaux.

Le 1^er^ ventôse, Carnot, de retour d'exil, est réélu avec une faible majorité, entre onze candidats.

Le 11, rapport de Hallé sur une nouvelle méthode curative et préservatrice de la peste, employée avec succès à l'Hôpital de Smyrne et consistant en onctions d'huile : la question est toujours d'actualité.

Le 16, la Classe propose à nouveau comme prix la question de l'influence de l'air, de la lumière, de l'eau et de la terre dans la végétation, en annonçant qu'on se contentera d'une suite d'expériences, de faits et d'observations propres à augmenter les connaissances acquises.

Le 21, rapport de Coulomb et Périer sur l'enseignement de la natation.

Sujets de prix : 1° Déterminer, par des observations et des expériences anatomiques et chimiques, quels sont les phénomènes de l'engourdissement, pendant l'hiver, de certains animaux, sous le rapport de la circulation du sang, de la respiration et de l'irritabilité. Rechercher quelles sont les causes de ce sommeil et pourquoi il est propre à ces animaux. 2° Quels sont les caractères qui distinguent dans les matières végétales et animales celles qui servent de ferment de celles auxquelles elles font subir la fermentation?

Le 11 germinal, le prix d'Astronomie est partagé entre Bouvard et J.-T. Burg, de Vienne.

Le 26, rapport de Prony sur la romaine de Poux-Landry.

Le 1er floréal, dans un rapport de Bossut, on trouve l'orthographe *hypothénuse*.

Le 6, le Cn Marchand, artiste vétérinaire, demande qu'on lui confie des chevaux pour faire en grand l'expérience de ses moyens curatifs pour diverses maladies.

Le 16, rapport important de Coulomb, Parmentier et Prony sur l'Ouvrage de Brémontier, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées : « Mémoire sur les dunes et particulièrement sur celles qui se trouvent entre Bayonne et la pointe de Grave, à l'embouchure de la Gironde. »

Le 26, réapparition de la particule nobiliaire à propos de la mort du Cn Rochon de Chabannes, membre de la Classe.

Le 6 prairial, Coulomb lit un Mémoire intitulé : « Expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvements très lents. »

Le 21, rapport verbal de Hallé à propos de l'Ouvrage de Bichat sur la vie et la mort. « Cet Ouvrage est plein d'esprit... »

Le 21 messidor, rapport de Lagrange, Laplace et Lacroix sur deux Mémoires de Brunacci concernant l'interprétation des équations différentielles et leur intégration au moyen de séries de puissances.

Curieux rapport d'Haüy, Lacépède et Cuvier sur le moyen de faire entendre la musique aux sourds-muets avec la description de nombreuses expériences faites par les rapporteurs.

Le 26, le Cn Daman, fabricant de grès à Douai, demande qu'on lui indique une personne instruite dans la Chimie et capable de diriger sa manufacture.

Lacroix présente son *Traité des différences et des séries*.

Le 1er thermidor, description d'une nouvelle planchette à alidade pour lever de plans, construite par Saint-Far; intéresse l'histoire de la topographie.

Le 16, le Ministre de l'Intérieur invite la Classe à nommer trois de ses membres pour faire partie du Conseil de perfectionnement de l'École Polytechnique.

Le 21, Mémoire de Gail sur les deux espèces de lièvres du *Traité de la Chasse* de Xénophon.

Rapport de Legendre et Lacroix sur un Mémoire de L'Huillier

(de Genève), relatif à la Polyédrométrie; curieux par les propriétés citées, dont certaines sont devenues classiques, et aussi au point de vue historique.

Le 11 fructidor, l'Institut est invité à assister à la séance dans laquelle on distribuera les prix aux élèves de l'École des Ponts et Chaussées, le 15 à midi. Lacroix rend compte de la cérémonie dans la réunion suivante.

Durant l'an IX, le Bureau fut composé, pour le premier semestre, de Berthollet, président, Delambre et Cuvier, secrétaires; pour le second semestre, de Coulomb, président, et des mêmes secrétaires.

Le 1er vendémiaire, on distribue à tous les membres la médaille qui doit remplacer la carte de membre de l'Institut.

Le 16 brumaire, Lacroix fait un rapport verbal sur l'Ouvrage d'Arbogast, intitulé : *Calcul des dérivations*.

Le 26, Prony présente un plan raisonné de la partie de l'enseignement de l'École Polytechnique qui a pour objet l'équilibre et le mouvement des corps.

Le 6 frimaire, rapport de Legendre, Lacroix et Bossut sur un Mémoire contenant la description de divers instruments propres à jauger les tonneaux, conformément au nouveau système métrique.

Le 16, le Cn Sylvestre adresse un Mémoire manuscrit sur l'éducation des lapins, que Parmentier, Huzard et Tessier sont chargés d'examiner.

Le 21, le Cn Poisson lit un Mémoire sur la pluralité des intégrales complètes dont les équations aux différences finies sont susceptibles.

Le 6 nivôse, en Comité secret, un membre expose les inconvénients qui peuvent résulter de la facilité avec laquelle on laisse entrer un nombre considérable d'étrangers aux séances particulières. Il invite la Classe à s'occuper d'un règlement pour réformer cet abus. La motion est mise en délibération et, après mûre discussion, la Classe arrête ce qui suit :

« 1° Les membres de la Classe ne pourront faire entrer aux séances particulières qu'une seule personne chacun, et ils l'introront eux-mêmes pour éviter toute erreur et toute surprise.

» 2° Il y aura une feuille destinée à recevoir les noms des per-

sonnes présentées, et chacun de ces noms sera suivi de la signature du membre qui se sera déclaré répondant.

« 3° Cette feuille sera portée au Président et lue immédiatement après le procès-verbal; après quoi, nul ne pourra plus être introduit sans un arrêté spécial de la Classe.

» 4° Le nombre d'étrangers qui pourront être présentés dans une même séance ne sera pas fixé, et il pourra égaler celui des membres présents.

» 5° Les personnes qui auront des Mémoires à lire ou quelque objet à présenter, se feront introduire par un membre, comme tous les étrangers, et ceux qui, ne connaissant aucun membre, ne pourront avoir de répondant, attendront au Secrétariat que le Président les fasse appeler, et, la lecture finie, ils se retireront, à moins que le Président ne les invite aux honneurs de la séance. »

On prendra les mesures convenables pour que personne ne séjourne dans les escaliers ni dans les corridors.

Les autres Classes adoptent dans la même décade cet arrêté.

Le 11 nivôse, Burkhardt reçoit un prix de mathématiques pour la détermination de l'orbite elliptique de la première comète de 1770.

Le 26 pluviôse, curieuse analyse d'un Mémoire sur les moyens que les Européens emploient en Égypte pour se garantir de la peste : ces pratiques sont encore d'actualité, et plusieurs ont été justifiées par les idées pasteuriennes. On sait d'ailleurs que la religion mahométane défend aux Turcs de prendre aucune précaution contre la peste et de refuser de secourir ceux qui en sont atteints.

Le 16 ventôse, rapport sur la fameuse lampe mécanique des C^ns^ Carcel et Careau « destiné à contribuer à assurer aux inventeurs le fruit de leur industrie, en fixant les opinions sur le degré de perfection qu'ils ont ajouté à un instrument d'une si grande utilité ».

Le 11 germinal, rapport de Delambre, Laplace et Lagrange sur les grandes Tables trigonométriques du cadastre.

Le 16, une députation est envoyée, séance tenante, chez le Président Coulomb pour lui faire part des sentiments qu'elle éprouve sur le mauvais état de sa santé. Au retour, elle annonce que la santé de Coulomb va de mieux en mieux.

Le 11 floréal, Brisson lit une Note intitulée : « Mode d'élection des membres de l'Institut à substituer au mode actuel, qui est trop défectueux ». Cet objet est ajourné.

Le Cⁿ Sylvestre, l'éducateur des lapins, présente un essai sur les moyens de perfectionner les arts économiques en France, par la création d'écoles spéciales, grandes écoles et petites écoles, analogues à l'Institut agronomique et aux Écoles d'agriculture de nos jours.

Le 21, rapport sur un Mémoire du Cⁿ Daubusson relatif à la direction des aérostats. « Les résultats étant purement analytiques et fondés sur la théorie des fluides, qui n'a pas à beaucoup près le degré d'exactitude nécessaire pour qu'il ne reste pas beaucoup de doutes sur ce qui arrivera dans la pratique, l'auteur propose de faire quelques expériences.... »

Le 11 prairial, Lacroix fait un rapport verbal sur l'Ouvrage de M. Pfaff, professeur de mathématiques à Helmstadt, intitulé *Disquisitiones analyticæ*.

Le 26, à propos d'une traduction de la *Linear Perspective* de Brook Taylor, Lacroix et Monge donnent des indications intéressantes sur l'histoire ancienne de la perspective ; on y trouve l'origine des mots *point de fuite*, *ligne de fuite*, traduisant les *vanishing point* et *vanishing line* de Taylor.

Le 11 messidor, Francœur, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, présente son *Traité de Mécanique élémentaire*, à l'usage de l'École Polytechnique, rédigé d'après les méthodes du Cⁿ Prony. Lacroix est désigné pour en rendre un compte verbal.

Le 16 fructidor, rapport de Lacroix et Lagrange sur un Mémoire du Cⁿ Parceval, intitulé : « Intégration générale et complète des équations de la propagation du son, l'air étant considéré avec ses trois dimensions. »

Le 21 fructidor, Delambre et Méchain rendent compte de deux Mémoires de Burckhardt, contenant des recherches sur l'orbite de plusieurs planètes, et où l'on voit obtenir pour la comète de 1771 une orbite hyperbolique.

Le zèle de la Classe s'est, comme on voit, un peu calmé : il y a beaucoup moins de rapports écrits, l'usage des comptes rendus verbaux s'établit.

Durant l'an X, le Bureau fut composé, pour le premier semestre, d'Haüy, président; Delambre et Lacépède, secrétaires; pour le second semestre, de Monge, président; Lacépède et Lacroix, secrétaires.

Le 6 vendémiaire, on discute sur la substitution de l'infusion du café à la décoction pour ne pas perdre la partie aromatique qui se dissipe toujours pendant l'ébullition.

Le 11, Volta et Brugnatelli, de passage à Paris, sont admis aux séances particulières et publiques de la Classe, dans l'intérieur de l'enceinte et parmi les membres. On donne une nouvelle activité, à cette occasion, à la Commission chargée de s'occuper des expériences galvaniques.

Les 16 et 21 brumaire, Volta lit un Mémoire sur le galvanisme. Il est le premier savant étranger qui, depuis la paix générale, ait lu un Mémoire dans le sein de la Classe; pour cette raison, Bonaparte propose de lui offrir une médaille d'or. Volta reproduit devant la Classe les expériences servant de fondement à sa théorie.

Le 6 nivôse, rapport, du plus haut intérêt pour les métrologistes, de Prony, Legendre et Méchain sur la comparaison du mètre étalon de l'Institut avec le pied anglais.

Le 6 pluviôse, Laplace lit un Mémoire sur une inégalité à longue période qu'il vient de découvrir dans le mouvement de la Lune et qu'il recommande à l'attention des astronomes.

Le 16 pluviôse, on voit réapparaître le calendrier vieux style : une lettre du Dr Beddœs, adressée le 19 février 1801, donne le moyen de guérir toutes les phtisies pulmonaires par la digitale, presque tous les scrofules par le muriate de chaux et de soulager les paralysies par l'oxyde d'azote.

Le 26 germinal, la Classe reçoit un Ouvrage sur les Colonies modernes sous la zone torride et particulièrement sur celle de Saint-Domingue, dont l'auteur, M. Barré Saint-Venant (sans particule), ancien capitaine d'Artillerie, fut le père du célèbre mécanicien.

Le 1er floréal, rapport de Lalande et Delambre sur un Mémoire de Leonelli, intitulé : *Supplément logarithmique*, intéressant au point de vue des logarithmes d'addition.

Le 6 floréal, rapport de Lalande et Delambre sur un Mémoire

de Burgade relatif à l'emploi de séries analytiques pour la solution du problème de Képler.

Le 27 prairial, Herschel, Pallas et Watt sont présentés à l'Institut pour des places d'associés étrangers.

Le 28 messidor, toute la séance est consacrée à un rapport sur les projets de canal de la Somme à l'Escaut, à la demande du Gouvernement.

Le 2 thermidor, précieux rapport de Lagrange et Lacroix sur un Mémoire concernant les courbes à double courbure, par le C^n^ Lancret, ingénieur des Ponts et Chaussées et membre de l'Institut d'Égypte. Ce travail est du plus haut intérêt pour l'histoire de la Géométrie : les considérations sur la surface rectifiante et sur la détermination des développées sans le secours de l'intégration sont devenues classiques, mais le Mémoire contient bien d'autres détails de valeur.

Le 16, rapport sur le graphomètre souterrain de Komargewski, à noter pour l'histoire de la Topographie.

Le 23, Delambre résume des Mémoires de Girard sur le nilomètre d'Éléphantine et sur la coudée d'Égypte : ce beau rapport est plein d'intérêt pour les archéologues.

Voici enfin l'an XI, durant lequel le président sera Chaptal, et les secrétaires seront, pour le premier semestre, Lacroix et Lacépède; pour le second, Delambre et Cuvier. Delambre deviendra le premier secrétaire perpétuel, en même temps que Carnot sera élu vice-président.

Le 7 vendémiaire, le prix relatif aux poteries est enfin décerné; le C^n^ Fourmy reçoit la partie principale, 6000^fr^, et le C^n^ Muller une petite fraction, 800^fr^, à titre d'accessit.

Le 12 brumaire, le C^n^ Hapel-Lachenaye donne un procédé pour la préparation du sucre, écrit dans un chiffre dont il se propose d'envoyer la clé dans quelque temps. Le but de l'auteur étant de prendre date pour l'invention de son procédé, la recette chiffrée qu'il en donne sera copiée figurativement dans le procès-verbal de cette séance. C'est là une manière de faire qui pourrait conduire à bien des mystifications.

Le 11 frimaire, rapport de Monge, sur les cales flottantes de Ducrest, qui contient de judicieux conseils aux armateurs.

Le 22 nivôse, présentation de considérations sur la théorie mathématique du jeu par le C^n Ampère : le C^n Laplace est chargé d'en rendre un compte verbal.

Le 6 pluviôse, rapport de Biot sur un Mémoire d'Haüy concernant l'instruction des aveugles.

Le 11 pluviôse, lecture des arrêtés consulaires réorganisant l'Institut.

Les trois Classes anciennes en formeront dorénavant quatre : Sciences mathématiques et physiques, Langue et littérature françaises, Histoire et littératures anciennes, Beaux-Arts.

La première Classe comprendra, pour les Sciences mathématiques, cinq sections de six membres, sauf la section nouvelle de Géographie et Navigation qui n'en aura que trois; ces sections seront ainsi composées :

*Géométrie.* — Lagrange, Laplace, Bossut, Legendre, Delambre, Lacroix.

*Mécanique.* — Monge, Prony, Périer, Bonaparte, Berthoud, Carnot.

*Astronomie.* — Lalande, Méchain, Messier, Jeaurat, Cassini, Lefrançais-Lalande.

*Géographie et Navigation.* — Bougainville, Fleurieu, Buache.

*Physique générale.* — Charles, Brisson, Coulomb, Rochon, Lefèvre-Gineau, Levêque.

Ladite Classe nommera, sous l'approbation du premier Consul, deux Secrétaires perpétuels, l'un pour les Sciences mathématiques, l'autre pour les Sciences physiques, lesquels, membres de la Classe, ne feront partie d'aucune section.

Chaque Secrétaire perpétuel touchera annuellement 6000^fr, et chaque membre recevra un traitement de 1500^fr, sur lesquels 300^fr seront retenus pour jetons de présence.

Telle fut l'origine de l'organisation actuelle de l'Académie des Sciences.

Le 18 pluviôse, analyse, par Biot, d'un travail de Budan sur la sommation des suites et la formation des puissances du binome.

Le 25, Delambre et Cuvier sont élus Secrétaires perpétuels.

Le 9 ventôse, établissement d'un règlement intérieur; dispositions relatives aux jetons de présence. Il est décidé que les seuls Membres et Associés de l'Institut porteront le costume.

Le 21 germinal, Biot remplace Delambre, devenu Secrétaire perpétuel; c'est la première fois que fonctionne le nouveau mode de votation.

Le 28, rapport sur le Mémoire de Bouvard concernant les oppositions de Jupiter et de Saturne, et sur l'essai de Burckhardt relatif aux Tables de la Lune.

Le 5 floréal, Bouvard est élu dans la section d'Astronomie.

Le 15, à propos de la retenue de 300fr sur l'indemnité annuelle, le Président promet ses bons offices pour obtenir que le Gouvernement se charge d'améliorer le sort des vieillards.

Le 3 prairial, rapport de Lacroix et Biot sur un Mémoire de Budan : Démonstration d'un nouveau procédé pour la résolution des équations numériques et l'extraction des racines d'un degré quelconque. Les résultats en sont devenus classiques et tombés dans le domaine public.

Le 18 fructidor, Berthollet et Monge sont désignés pour faire partie du Conseil de perfectionnement de l'École Polytechnique.

Nous sommes ainsi arrivés à la mi-septembre 1803, avec une organisation administrative nouvelle, une publicité restreinte, une indépendance amoindrie, et une tendance scientifique plus spéculative qu'à la fondation : l'Académie des Sciences semble désirer se désintéresser de la vie économique du pays.

A. Boulanger.

---

MEYER (W. Franz). — Differential- und Integralrechnung. — Erster Band : Differentialrechnung. Zweite Auflage. (*Sammlung Schubert*, X). 1 vol. in-8, xv-418 pages, Berlin und Leipzig, G.-J. Göschen, 1912.

On sait l'influence exercée sur les publications françaises de notre époque par les programmes d'entrée aux Grandes Écoles scientifiques et par l'existence des cours de « mathématiques générales » de Facultés. Des livres très nombreux développent les matières de ces programmes ou de ces cours ; les Auteurs de traités d'Analyse peuvent alors supposer de leurs lecteurs des connaissances préliminaires assez étendues. Il n'en est pas de même en Allemagne et les cours ou traités de Calcul différentiel et intégral y compor-

tent des développements que nous considérerions, à tort ou à raison, comme d'un ordre beaucoup plus élémentaire. Cette remarque s'applique notamment au « Calcul différentiel » dont M. W.-F. Meyer vient de publier la seconde édition du premier Tome dans la collection Schubert. (Un deuxième Tome, encore à sa première édition, est consacré au Calcul intégral.) A part quelques paragraphes, les matières de ce Livre font intégralement partie du programme de nos classes de mathématiques spéciales.

On y trouve une étude élémentaire des fonctions rationnelles, circulaires, exponentielle et logarithmique et de celles qu'on en déduit par des opérations rationnelles ou par des changements de variables définis par ces fonctions elles-mêmes. Puis des principes généraux sur la définition, le calcul et les propriétés des dérivées, la formule des accroissements finis, sa généralisation par la formule de Taylor, étendue aussi à des fonctions de deux variables. Les conséquences indiquées pour ces formules sont assez nombreuses : développement d'une fonction en série de Taylor, vraies valeurs des expressions indéterminées, maxima et minima, etc. Un Chapitre est consacré à un exposé assez étendu des règles de convergence des séries et produits infinis. Il ne s'agit, dans tout cela, que des quantités réelles, c'est ainsi qu'il n'est question ni des séries entières, ni des fonctions hyperboliques, probablement parce que ces deux théories, qui peuvent se traiter avec le seul secours des variables réelles, n'acquièrent leur véritable importance que par l'introduction des nombres complexes.

Il y a dans ce Livre une tendance assez nette à n'exposer de théories générales qu'après l'examen de cas particuliers, dont l'étude individuelle est poussée très loin ; on cherche aussi à n'exiger du lecteur que le moins possible de connaissances antérieures. (C'est d'ailleurs un phénomène assez fréquent dans les ouvrages allemands, même d'ordre plus élevé, de reprendre la science à son début.) Les avantages pédagogiques de cette façon de faire ne sont pas douteux, il en résulte aussi parfois des lourdeurs, un relief exagéré pour certains cas particuliers, tantôt un souci excessif, et tantôt un manque apparent de rigueur.

C'est ainsi qu'il n'est pas fait de théorie générale des nombres irrationnels, et M. Meyer ne semble pas, au moins dans les premiers Chapitres, la supposer connue du lecteur. Il en résulte des

difficultés assez grandes pour la notion de limite que l'Auteur introduit très prudemment et, en quelque sorte, peu à peu. Le premier paragraphe est consacré à établir très correctement les limites de $a^n$ et $a^{\frac{1}{n}}$ pour $n$ entier augmentant indéfiniment. On peut déduire de ces deux résultats beaucoup d'autres et M. Meyer en use autant que possible. Malheureusement, ils ne peuvent servir à tout et, pour établir l'existence de la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ ou les règles de convergence des séries, on est bien forcé de faire appel à un principe général, soit sur la limite d'une suite *croissante* et bornée, soit sur le critérium général d'existence des limites $|u_{n+p}-u_n|<\varepsilon$ quels que soient $n$ et $p$ supérieurs à N. Pour l'étude des séries, ce critérium a été donné comme une définition des nombres irrationnels (d'après Cantor); pour la définition de $e$, il m'a semblé qu'il avait été fait un usage implicite du premier principe rappelé.

Les dérivées successives de $x^m$ ont d'abord été définies algébriquement [1], comme coefficients (au produit près par des factorielles) du développement de $(x+h)^m$. Il a été établi ensuite que cette définition coïncide avec la définition analytique (limite du quotient des accroissements, l'existence de cette limite se vérifiant aisément dans ce cas).

Des difficultés analogues à celles que soulevait l'emploi des limites se présentent dans l'étude du développement d'une fonction en série de Taylor, étude que l'Auteur place avant celle de la convergence des séries. Il a, à demi, tourné la difficulté, en démontrant que le reste mis, suivant les cas, sous la forme de Lagrange ou sous la forme de Cauchy, tend vers zéro. On sait les raisons qui ont fait abandonner, en France, cette façon de faire dans l'enseignement des Mathématiques spéciales.

Il n'y a pas d'*exercices proposés* dans ce Livre; mais de très nombreux exemples peuvent être considérés comme de véritables *exercices résolus :* ainsi l'application de la série géométrique à des

---

[1] Cette façon de faire a été employée en France par M. Tannery, en partie dans son *Introduction à la théorie des fonctions*, et très systématiquement dans ses *Leçons d'Algèbre et d'Analyse;* M. Borel en a fait aussi un usage ingénieux dans ses Traités d'Algèbre élémentaire.

quadratures de paraboles, des calculs de dérivées de fonctions composées à partir des fonctions élémentaires, des recherches de maxima et minima géométriques, des séries numériques, des développements de fonctions circulaires en produits infinis, etc. L'application des limites de $a^n$ et de $a^{\frac{1}{n}}$ avait aussi permis d'établir l'équation de la tangente à quelques courbes simples; un Appendice montre comment la notion générale de dérivée permet de traiter le même problème pour une courbe quelconque définie par une équation.

A. Châtelet.

---

ROUYER (L.). — Sur la déformation des quadriques et les surfaces conjuguées par rapport a un complexe du second degré. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences mathématiques*, soutenue le 9 juin 1913 sous la présidence de M. Gaston Darboux. 1 vol., VII-119 pages. Toulouse, Édouard Privat, 1913.

Dans la première Partie de ce travail, M. Rouyer rattache la théorie de la déformation d'une surface à la recherche de propriétés des surfaces des centres d'une autre surface. La méthode est, on le voit, celle de Weingarten, mais elle en diffère profondément; on peut dire que la base essentielle de cette méthode repose sur la considération des réseaux C point de M. Guichard.

En appliquant, dans la deuxième Partie, cette méthode à la déformation des quadriques, l'Auteur arrive immédiatement au résultat suivant : *La déformation des quadriques se ramène à la recherche des surfaces dont les centres de courbure sont conjugués par rapport au cône asymptote de la quadrique.* Autrement dit, la congruence formée par les normales à cette surface a ses plans focaux conjugués par rapport au cercle de l'infini et ses foyers conjugués par rapport au cône asymptote.

En faisant une transformation dualistique qui échange le cône asymptote et le cercle de l'infini, cette congruence se transforme en une congruence de même nature. De là une transformation du problème qui est étudiée avec soin et dans tous ses détails. Bien que cette transformation ne soit pas essentiellement distincte de

celles qui sont connues, elle n'en paraît pas moins curieuse, étant donnée surtout la façon simple avec laquelle elle se présente.

On sait que les sphères osculatrices à une surface se transforment, par la méthode de Lie, en tangentes asymptotiques d'une autre surface. L'Auteur effectue cette transformation sur les surfaces qui servent à déterminer, par sa méthode, les déformées d'une quadrique. Il obtient des surfaces telles que les tangentes asymptotiques en un point quelconque de la surface soient conjuguées par rapport au cône d'un complexe du second ordre relativement à ce point. Cette propriété est équivalente à la suivante : *Il existe sur cette surface un réseau conjugué dont les tangentes appartiennent à un complexe du second ordre.*

La troisième Partie de cette Thèse est consacrée à l'étude de ces surfaces. L'Auteur examine les différents cas particuliers qui correspondent à la déformation du paraboloïde de révolution, des paraboloïdes tangents au cercle de l'infini; enfin des quadriques de révolution à centre.

Les congruences de normales qui interviennent dans la déformation des quadriques sont un cas particulier de celles qui possèdent les deux propriétés suivantes : *Leurs foyers sont conjugués par rapport à une quadrique et leurs plans focaux sont conjugués par rapport à une autre quadrique.*

M. Rouyer a fait une étude de ces congruences; il a montré que leur détermination revient à trouver, dans l'espace à quatre dimensions, les réseaux doublement indéterminés, situés sur une quadrique et applicables sur un réseau plan.

Chacune des théories exposées est accompagnée de nombreuses applications.

*La R.*

---

BRATU (Georges). — Figures d'équilibre d'un fil dont les éléments se repoussent mutuellement. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences mathématiques*, soutenue le 20 juin 1914 sous la présidence de M. Paul Appell. 1 vol. in-4, VII-63 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1914.

Le problème d'équilibre d'un fil dont les éléments s'attirent ou se repoussent suivant une fonction donnée de la distance a été peu étudié jusqu'ici. M. Appell, envisageant le cas de deux fils distincts

dont les éléments s'attirent ou se repoussent, puis le cas d'un seul fil, a donné les équations générales du problème (*Comptes rendus*, t. 156, 17 février 1913, p. 500) en indiquant, comme devant être traités en premier, les cas où la répulsion de deux éléments $ds$ et $ds'$ serait de la forme $r^{2k-1}\,ds\,ds'$ ($k$ entier positif), et notamment le cas le plus simple où $k=1$.

Dans sa Thèse de doctorat, M. Bratu a étudié en détail l'équilibre d'un seul fil dont les éléments se repoussent mutuellement.

Lorsque $k=1$, $k=2$, ..., il est arrivé à des résultats élégants et précis.

Pour une action mutuelle de la forme plus générale $\varphi(r)\,ds\,ds'$, il a réussi à ramener le problème à un problème simple de géodésiques.

Voici une analyse succincte de ses résultats.

Dans la *première Partie*, M. Bratu considère, avec détails, le cas où la répulsion est *proportionnelle à la distance*. On peut dans ce cas remplacer les actions des éléments du fil par une répulsion unique émanant du centre de gravité, seulement la position de ce point n'est pas une donnée : elle dépend de la figure du fil. Si l'on prend ce point pour pôle, $\rho$ et $\theta$ étant les coordonnées polaires, $a$ et $b$ deux constantes et $u=\rho^2$, l'équation de la courbe d'équilibre est

$$\theta-\theta_1=\pm\frac{b^3}{2}\int_{u_1}^{u}\frac{du}{u\sqrt{f(u)}},\qquad f(u)=u(a^2-u)^2-b^6.$$

Le polynome $f(u)$ admet trois racines réelles et positives $\alpha^2$, $\beta^2$, $(\alpha+\beta)^2$ et le rayon vecteur $\rho$, qui oscille entre $\alpha$ et $\beta$, est fonction périodique de $\theta$ de période $2\Theta$,

$$\Theta=\frac{b^3}{2}\int_{\alpha^2}^{\beta^2}\frac{du}{u\sqrt{f(u)}}.$$

La courbe tourne toujours sa concavité vers le centre répulsif. En employant une méthode imitée de celle de M. de Saint-Germain, à propos du pendule sphérique [1], M. Bratu peut écrire

$$\Theta=\frac{\pi}{2}+S,$$

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1896, 1898, 1901.

S étant une quantité positive. Il remarque alors que l'angle $\Theta$ va toujours en *décroissant* lorsque $t = \frac{\beta}{\alpha} > 1$ croît. Pour $t = 1$ on a $\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$; pour $t = \infty$, $\Theta = \frac{\pi}{2}$.

Le paragraphe 7 est consacré à l'étude de la courbe, à l'aide des expressions de $\xi$ et $\eta$ en fonction d'un paramètre. On voit ainsi que la courbe d'équilibre a une forme analogue à celle de la projection horizontale de la trajectoire du mobile, dans le cas du pendule sphérique. Elle est en général formée de plusieurs *boucles*. Lorsque $\alpha$ diminue, $\beta$ restant constant, la boucle s'amincit (ses deux côtés s'approchent de son axe de symétrie). En introduisant ensuite la condition que le centre répulsif est centre de gravité du fil, M. Bratu peut énoncer la proposition suivante :

Un fil fermé de longueur $2l$, enroulé $p$ fois autour de son centre de gravité, peut être placé en $\nu + 2$ positions d'équilibre, $\nu$ étant la partie entière du produit $p(2 - \sqrt{3})$. Parmi ces figures, solutions du problème de M. Appell, il y en a : *une* rectiligne (multiple), *une* circulaire (courbe multiple si $p > 1$) et $\nu$ figures étoilées (simples ou multiples).

Dans le cas élémentaire, les figures d'équilibres peuvent se séparer en deux classes distinctes. Aux paragraphes 15 et 16, M. Bratu étudie ces deux suites continues de figures d'équilibre et constate qu'elles ne se croisent jamais au sens de M. Poincaré.

Ensuite il reprend l'étude à l'aide des fonctions elliptiques. Il démontre notamment que les coordonnées $x$ et $y$ d'un point de la courbe sont fonctions *uniformes* d'un paramètre $v$ et que

$$z = x + iy$$

est une fonction doublement périodique de *deuxième espèce* satisfaisant à l'équation de Lamé

$$\frac{d^2 z}{dv^2} = [2p(v) + p(v_0)]z.$$

Dans la *seconde Partie*, M. Bratu étudie le cas général où les éléments $ds\,ds'$ du fil se repoussent suivant la loi $V'(r)\,ds\,ds'$, $V(r)$ étant une fonction donnée de $r$. Comme la fonction des forces est

$$U = \int^{\lambda} V(r)\,ds.$$

$\lambda$ étant la longueur du fil, il remarque que les équations d'équilibre

$$\frac{\partial U}{\partial x} x'' + \frac{\partial U}{\partial y} y'' = (x''^2 + y''^2)(V + h),$$
$$x'^2 + y'^2 = 1,$$

les dérivées, étant prises par rapport à l'arc, peuvent se réduire à l'équation unique

$$(U + h) y'' = \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} y'\right)(1 + y'^2),$$

les dérivées de $y$ étant prises par rapport à $x$. Or celle-ci n'est autre chose que l'équation classique des *lignes géodésiques* sur une surface d'élément linéaire

$$ds^2 = (U + h)^2 (dx^2 + dy)^2.$$

Ainsi, à toute figure d'équilibre du fil dans le plan, il correspond une ligne géodésique d'une certaine surface.

M. Bratu arrive de cette façon à rattacher le problème qu'il traite à celui que M. Darboux a étudié dans la *Théorie générale des surfaces* (t. II, Liv. V, Chap. VI).

Ces mêmes considérations lui permettent, pour chaque figure d'équilibre du fil soumis à ses forces *intérieures*, de trouver une force unique *extérieure*, qui, agissant seule sur les éléments du fil, le maintiendrait, sous la même forme, en équilibre.

Dans le cas $V(r) = r^{2k}$ ($k$ étant entier positif), cette force unique est celle qui dérive de la fonction

$$U(x, y) = \int_0^\lambda r^{2k}\, d\sigma,$$

qui est un polynome entier en $x$ et $y$ à coefficients *indéterminés*. Une fois les expressions de $x$ et $y$ connues, on détermine ces coefficients par les équations mêmes qui servent à les définir.

Le cas $V(r) = r^4$ est étudié avec plus de détails. A l'aide de quelques hypothèses restrictives, le problème se ramène à celui d'un fil repoussé par un centre, la répulsion ayant la forme

$$F = a\rho^3 + b\rho$$

($a$ et $b$ constantes). On trouve alors des courbes analogues à celles étudiées dans la première Partie.

Enfin dans les derniers paragraphes, M. Bratu, en calculant l'énergie du fil dans le cas $V(r) = r^4$, démontre que la circonférence est une figure d'équilibre *instable*. En employant la méthode de Poincaré (*Acta mathematica*, t. VII), il détermine les coefficients de stabilité et vérifie qu'ils sont tous *positifs*.

Signalons en terminant qu'à la page 37, ligne 8, il manque le terme $-i\eta\zeta\omega$, et qu'aux pages 47 et 49, on a écrit dans le texte T au lieu de H.

*La R.*

---

VÂLCOVICI (VICTOR). — ÜBER DISKONTINUIERLICHE FLÜSSIGKEITSBEWEGUNGEN MIT ZWEI FREIEN STRAHLEN. *Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der hohen philosophischen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen.* 1 brochure in-8, 62 pages. Göttingen, W. Fr. Kaestner, 1913.

On sait que l'hypothèse de la continuité dans le mouvement des fluides conduit au paradoxe de d'Alembert : l'absence de résistance au déplacement d'un solide dans un fluide incompressible et sans viscosité est en contradiction avec l'expérience; l'hypothèse de l'existence de surfaces de discontinuité (Stokes-Helmholtz) permet de lever ce paradoxe.

La théorie de ces surfaces de discontinuité a fait un grand progrès depuis que M. Levi-Civita a montré (*Rendiconti Palermo*, 1907) comment on pouvait faire dépendre le problème général d'un certain problème aux limites faisant intervenir une fonction arbitraire dépendant de la forme des obstacles : cette fonction arbitraire connue, il est aisé d'en déduire la forme d'obstacles qui lui correspond : le problème inverse, qui se pose en fait dans la pratique, est d'un type fort compliqué et n'est pas abordé ici. M. Vâlcovici montre comment la méthode de M. Levi-Civita, dans le cas d'un courant fluide sortant d'une « buse » et venant frapper un solide, conduit au problème de Dirichlet pour un anneau circulaire : c'est ce qu'avait montré M. Villat dans sa Thèse (*Annales de l'École Normale*, 1911); les différents paramètres qui entrent dans la question sont liés par des relations qui sont discutées dans la première Partie de ce travail. La seconde Partie a pour but d'exa-

miner dans quelle mesure les résultats que donnent les expériences sur la résistance des fluides sont valables pour le cas de solides placés dans un milieu indéfini : dans les expériences de M. Prandtl (Laboratoire d'essais de Göttingue) comme dans celles de M. Eiffel (Laboratoire aérodynamique d'Auteuil), on ne peut admettre qu'il en soit ainsi : il résulte de l'étude de M. Vâlcovici que l'erreur faite est dans les deux cas fort faible ; elle est de sens contraire dans ces deux méthodes, dont le principe est différent : les nombres trouvés pour la résistance dans le cas d'un canal (méthode Prandtl) sont supérieurs à ceux trouvés dans le cas d'un courant sortant d'une buse (méthode Eiffel).

MAURICE JANET.

---

BURALI-FORTI (C.) et MARCOLONGO (R.). — ANALYSE VECTORIELLE GÉNÉRALE. Vol. II : *Applications à la Mécanique et à la Physique*. 1 vol. in-8, XII-144 pages. Pavie, Mattei et Cie, 1913.

Dans l'Analyse du premier Volume [*Transformations linéaires* (1)] de cette Collection, il a été indiqué que le but des Auteurs était de montrer les fortes simplifications que le Calcul vectoriel va porter dans maintes questions des Mathématiques pures et appliquées. Aussi, a-t-on tâché de bien mettre en évidence les avantages du *Calcul vectoriel intrinsèque*, et les principes dont on a déduit ce puissant instrument de recherche.

Aux lois générales (semblables en tous points aux lois ordinaires de l'Algèbre) exposées dans le premier Volume et régissant l'algorithme employé avec les *homographies vectorielles* (transformations linéaires) va suivre dans le second Volume un aperçu sur les applications, pour montrer clairement la simplicité et la puissance de la méthode. Cette rapide synthèse, sur les plus élégantes et importantes applications physico-mécaniques de la théorie générale des transformations linéaires, doit faire reconnaître tout de suite la supériorité des méthodes des Auteurs et donner la raison d'être de beaucoup des opérateurs considérés dans le premier Volume. Il faut néanmoins se rappeler l'avertissement des Auteurs (Préface, p. IX) : « Nous n'avons eu l'intention

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVII, 1913, p. 179-184.

de présenter au lecteur ni un Traité de Mécanique, ni un Traité de Physique mathématique ; mais en glissant de-ci de-là à travers ces vastes domaines, nous nous flattons d'avoir présenté au lecteur une matière suffisante pour qu'il se familiarise avec les méthodes, pour qu'il puisse voir quelle immense matière peut être rassemblée en une centaine de pages, et enfin pour qu'il puisse se convaincre que ces méthodes permettent de faire toujours un pas en avant, soit en traitant ou en résolvant des questions nouvelles, soit en généralisant et en complétant sur de nombreux points des questions aujourd'hui anciennes. Il suffit de comparer notre marche à celle suivie par les Auteurs cités à la fin de chaque Chapitre. »

Je crois que la simplification, obtenue dans l'étude des équations de l'Électrodynamique, dans la théorie des électrons de Lorentz, devrait surtout rappeler justement l'attention. Il n'y a plus besoin de recourir là (dans le Chapitre VI) aux transformations orthogonales à quatre variables, dont l'une est le temps multiplié par $\sqrt{-1}$, comme il a été fait par Minkowski et d'autres ; mais ces transformations (appelées de Lorentz) résultent des cas particuliers de deux transformations tout à fait réelles. Ainsi, on obtient les forces électrique et magnétique transformées, en fonctions des primitives, sous forme absolue et simple, *tout à fait débarrassées des imaginaires et sans faire usage des vecteurs imaginaires à quatre dimensions*.

Voici, du reste, un abrégé de la matière du Volume soumis à notre examen.

Dans le Chapitre I, après la théorie des moments d'inertie et l'introduction de la quantité de mouvement, on va établir les équations du *mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe*, envisageant, en particulier, les cas du corps pesant et du corps qui n'est soumis à aucune force.

Le Chapitre II contient la *cinématique et statique des corps déformables*. Pour cette étude on va introduire deux homographies : l'une, c'est la dérivée par rapport à un point du (vecteur) déplacement du point même ; l'autre, appelée des pressions intérieures, va changer dans cette pression, rapportée à l'unité de surface, le vecteur normal à l'élément de la surface. La première homographie permet de définir le coefficient de dilatation soit linéaire, soit cubique ; d'exprimer la déformation et trouver deux

relations, dont l'une remplace les six relations de Saint-Venant entre les six composantes de la déformation, l'autre remplace celles de M. Volterra entre les déplacements de deux points. La seconde homographie donne l'ellipsoïde de Lamé et la définition du potentiel d'élasticité. L'expression de ce potentiel et les formules fondamentales relatives aux déplacements et à la dilatation cubique, dans le mouvement d'un corps élastique isotrope, sont déduites des équations de l'équilibre et du mouvement de ce corps et de la formule de Kirchhoff. La démonstration du théorème de réciprocité de Betti est immédiate.

Dans le Chapitre III, on va étudier le *mouvement libre par ondes planes polarisées dans les milieux isotropes ou cristallisés*. Pour les milieux isotropes, les équations des deux mouvements vibratoires, longitudinal et transversal, sont identiques à l'équation des cordes vibrantes ; et à l'intégration de cette équation se ramène aussi celle de l'équation du mouvement des corps cristallisés. On déduit de suite l'ellipsoïde de propagation et celui d'élasticité ; les lois de Fresnel, le rayon et la surface d'onde.

Le Chapitre IV contient un exposé rapide des points les plus essentiels de l'*Hydrodynamique des fluides parfaits et des fluides visqueux*, théorie qui est développée dans le troisième Volume par M. Boggio. On établit ainsi les équations fondamentales du mouvement des fluides parfaits, dont on déduit les équations de Lagrange (avec le théorème sur le potentiel des vitesses et les équations dans ce potentiel), de même que les équations de Weber (avec les intégrales de Cauchy) et de Helmholtz. On trouve de la même façon les analogues équations fondamentales du mouvement des fluides visqueux incompressibles, la relation (ou théorème de réciprocité) analogue à celle de Betti pour les corps élastiques. En particulier, on va donner les expressions de la pression et de la vitesse d'un fluide visqueux incompressible, animé d'un mouvement lent et stationnaire, et de plus une solution particulière du mouvement lent.

Dans le Chapitre V, on trouve réunis tous les résultats classiques sur la *propagation de la chaleur* dans les corps isotropes ou cristallisés. Après la définition du flux calorifique et des deux coefficients de conductibilité relatifs au courant de chaleur et à la variation de la température, sont déterminés l'ellipsoïde de

conductibilité et l'ellipsoïde principal de Lamé (qui donnent la loi de la distribution des coefficients de conductibilité, lorsque la température varie), et celui de Boussinesq (qui donne la loi de la distribution du coefficient de courant, lorsque le courant varie). Suivent les équations de la propagation de la chaleur, pour lesquelles on va chercher des solutions particulières ; parmi les formules intégrales, on trouve une généralisation de la formule de Betti et une autre de la formule de Mathieu.

Le Chapitre VI développe l'*électrodynamique* des corps au repos ou en mouvement, donnant d'abord les équations de Maxwell-Hertz dans un milieu cristallisé quelconque. De la récente théorie des électrons on fixe les équations de Lorentz et leurs intégrales, et encore l'équation du moment électromagnétique et l'équation de l'énergie, d'où l'on déduit les équations fondamentales de l'électrodynamique des corps en mouvement. C'est pour ces équations que l'on étudie les transformations générales de Lorentz (en particulier, celles considérées par Minkowski). Le principe de relativité, démontré pour le groupe de ces transformations appliquées aux équations fondamentales de l'Électrodynamique de Lorentz, permet de trouver, sous une forme très simple, et sans imaginaires, les expressions des forces électrique et magnétique transformées.

Dans l'Appendice, on trouve un examen critique de quelques concepts vectoriels et de quelques notations vectorielles, surtout au sujet des contradictions qui ressortent des diverses espèces des (soi-disant) vecteurs [1] et sur les notations relatives. Une seconde Note donne un aperçu rapide des belles et importantes recherches de R. S. Ball, exposées très simplement à l'aide des formes géométriques de Grassmann-Peano.

Le second Volume finit avec quelques compléments au premier Volume sur les transformations linéaires.

MATTEO BOTTASSO.

---

[1] Voir l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*. Édition française (Gauthier-Villars), t. IV, vol. II.

GANS (Richard). — Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Dritte Auflage. Mit 36 Figuren im Text. 1 vol. in-8, x-130 pages, Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1913.

Les deux premières éditions de cet Ouvrage de M. Gans sur l'Analyse vectorielle et ses applications à la Physique mathématique ont été l'objet d'analyses dans ce *Bulletin* (1re éd. en 1905, p. 318; 2e éd. en 1910, p. 36). Dans cette troisième édition, pour conserver à son Livre le caractère d'Introduction, l'Auteur s'est abstenu, quelquefois à regret, d'ajouter de nouvelles théories à celles qu'il avait développées. Il pense qu'après avoir étudié à fond les matières contenues dans ce Livre, on pourra lire avec fruit les beaux Mémoires publiés par M. Sommerfeld dans les *Annalen der Physik und Chemie*, Leipzig (4e s., t. XXXII, p. 749; t. XXXIII, 1910, p. 649).

Toutefois l'Auteur a remanié assez complètement le Chapitre des *tenseurs* au point d'en faire un travail nouveau. Il a eu ici cette idée intéressante et féconde de réunir sous un seul vocable, de considérer comme un seul être mathématique et de soumettre comme tel aux règles du calcul, un ensemble de vecteurs formant un tout et qui se retrouve dans des questions diverses et importantes de la Mécanique et de la Physique mathématique. Un tenseur est constitué en somme par « trois directions géométriques et par trois nombres algébriques liés à ces directions ». C'est donc un trièdre de vecteurs, puisque le vecteur est défini comme une quantité ayant à la fois une grandeur algébrique et une direction géométrique.

Si ces trois vecteurs sont perpendiculaires l'un à l'autre, le tenseur est symétrique et les neuf éléments cartésiens qui le définissent se ramènent à six en formant un déterminant symétrique; il est dit aussi orthogonal et ses trois vecteurs déterminent les trois axes d'un certain ellipsoïde. On obtiendra alors très facilement et très clairement l'ellipsoïde d'inertie et la détermination complète du mouvement à la Poinsot, l'ellipsoïde des efforts en élasticité, etc.

Si les trois vecteurs considérés, si les trois directions d'action ne sont pas perpendiculaires, on peut toujours les ramener à un tenseur symétrique et orthogonal et un vecteur. Cette généralisa-

tion permet alors de ramener à une forme simple l'étude des déformations en général, du déplacement dans un fluide, des actions électromagnétiques, etc.

Au point de vue algébrique le tenseur sera traduit par ce que Gibbs et Wilson ont appelé une *dyadique*, qui représente également un ensemble de 3 vecteurs (ou $n$ vecteurs en général). (*Elements of vector Analysis*, New Haven, 1881, et *Vector Analysis*, London, Arnold, 2e éd., 1909, p. 12.) Cette dyadique, multipliée par le vecteur général d'un point quelconque $\mathbf{r}(x, y, z)$, donne d'abord la fonction linéaire vectorielle, et l'on sait que cette fonction correspond à un système de $n$ équations linéaires à $n$ inconnues et permet de le résoudre immédiatement par une simple multiplication et d'en donner la solution complète sous la forme d'un déterminant unique. Cette fonction linéaire multipliée une seconde fois par $\mathbf{r}(x, y, z)$ donne l'équation générale du second degré et des quadriques sous une forme simple. C'est ainsi que le tenseur (et la dyadique) s'introduit dans toutes les questions pratiques où apparaissent les ellipsoïdes, dont il est comme la charpente, rendue ainsi plus apparente et plus tangible.

Il serait à désirer seulement que l'Auteur ait adopté une notation plus simple et plus claire, comme celle de Gibbs, ou celle de la traduction du *Vector Analysis* de J.-G. Coffin, qui paraît actuellement chez Gauthier-Villars.

ALEX. VÉRONNET.

---

NETTO (EUGEN). — ELEMENTARE ALGEBRA. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Zweite Auflage. Mit 19 Figuren im Text. 1 vol. in-8, x-200 pages. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1913.

La première édition de l'Ouvrage d'*Algèbre élémentaire* de M. Netto a été analysée dans ce *Bulletin* (1905, p. 129). Souhaitons à cette seconde édition, qui est conforme à la première, le même succès que celle-ci a eu.

# MÉLANGES.

## SUR LA FORMATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA FONCTION $\mathrm{p}x$;

PAR M. R. GARNIER.

Pour démontrer que la fonction $\mathrm{p}x$ vérifie une équation différentielle du premier ordre, on s'appuie ordinairement sur ce fait que la fonction doublement périodique $\mathrm{p}'^2 x - 4\,\mathrm{p}^3 x + g_2\,\mathrm{p}x$, partout holomorphe, doit se réduire à une constante. Je me propose d'établir *directement* ce résultat, en partant de la définition de $\mathrm{p}x$ par une série à double entrée : je forme explicitement la différence $\mathrm{p}^2 x - \frac{1}{6}\mathrm{p}'' x$ : son expression renferme une série à quadruple entrée. Mais la considération d'un tableau quadruplement infini (absolument convergent) et l'emploi de formules de sommation déduites de la double périodicité de $\mathrm{p}x$ permettent de démontrer que la différence précédente est une constante. Dès lors, on en déduit immédiatement l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction $\mathrm{p}x$.

1. *Les tableaux* (U) *et* (V). — Soient $\omega_1$ et $\omega_2$ deux nombres dont le rapport est imaginaire ; considérons toutes les quantités

$$a = 2\,m\,\omega_1 + 2\,n\,\omega_2,$$
$$b = 2\,p\,\omega_1 + 2\,q\,\omega_2,$$

où les entiers $m$, $n$, $p$, $q$ vérifient les conditions

$$(1) \qquad n \geq 0 \qquad (\text{et } m > 0, \text{ si } n = 0),$$
$$(2) \qquad q \geq 0 \qquad (\text{et } p > 0, \text{ si } q = 0),$$
$$m - p \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad n - q \neq 0.$$

Soit $x$ une quantité complexe n'appartenant pas à l'ensemble des nombres $a$ et $b$. Je vais démontrer la convergence absolue des

tableaux (U) et (V) dont les termes généraux sont

$$u(m, n, p, q) = \frac{3b^2 - a^2}{b^2(a^2 - b^2)^2(x^2 - a^2)^2},$$

$$v(m, n, p, q) = \frac{3a^4 - 14a^2b^2 + 3b^4}{a^2b^2(a^2 - b^2)^3(x^2 - a^2)},$$

$$u(m, n, m, n) = 0 = v(m, n, m, n).$$

Tout d'abord, ces tableaux seront absolument convergents ou non en même temps que les tableaux de termes généraux

$$u'(m, n, p, q) = \frac{3b^2 - a^2}{a^4b^2(a^2 - b^2)^2} = \frac{3}{a^4b^2(b^2 - a^2)} + \frac{2}{a^2b^2(a^2 - b^2)^2},$$

$$v'(m, n, p, q) = \frac{3a^4 - 14a^2b^2 + 3b^4}{a^4b^2(a^2 - b^2)^3} = \frac{3}{a^4b^2(a^2 - b^2)} - \frac{8}{a^2(a^2 - b^2)^3},$$

$$u'(m, n, m, n) = 0 = v'(m, n, m, n).$$

Or, il est aisé de voir que les tableaux de termes généraux

$$u''(m, n, p, q) = \frac{1}{a^4b^2(a^2 - b^2)}, \qquad u''(m, n, m, n) = 0,$$

$$v''(m, n, p, q) = \frac{1}{a^2b^2(a^2 - b^2)^2}, \qquad v''(m, n, m, n) = 0,$$

$$w''(m, n, p, q) = \frac{1}{a^2(a^2 - b^2)^3}, \qquad w''(m, n, m, n) = 0,$$

sont absolument convergents. En effet, soit $\delta$ la plus petite des quantités $|2m\omega_1 + 2n\omega_2|$ où les entiers $m$ et $n$ varient de toutes les manières possibles (sans prendre en même temps la valeur zéro); on a

$$|a^2 - b^2| > \delta|a| \quad \text{et} \quad |a^2 - b^2| > \delta|b|.$$

d'où

$$|u''| < \frac{1}{\delta|a^4b^3|}, \qquad |v''| < \frac{1}{\delta|a^3b^3}$$

ce qui assure évidemment la convergence absolue des deux premiers tableaux. Pour le dernier, posons

$$b - a = c,$$
$$b + a = d;$$

on a

$$\left|\frac{w''}{4}\right| < \frac{1}{|c^3d^3(d - c)^2|} < \frac{1}{\delta|c^4d^3},$$

d'où résulte la même conclusion. Les tableaux (U) et (V) sont donc bien absolument convergents ; par suite, il en est de même du tableau (W), de terme général

$$w(m, n, p, q) = \frac{2(3b^2 - a^2)}{b^2(a^2 - b^2)^2(x^2 - a^2)^2} + \frac{3a^4 - 14a^2a^2 + 3b^4}{a^2b^2(a^2 - b^2)^3(x^2 - a^2)},$$

$$w(m, n, m, n) = 0.$$

2. *La fonction* $\mathrm{p}x$ *et l'expression de* $\mathrm{p}^2x - \frac{1}{6}\mathrm{p}''x = z$ *en série infinie.* — Cela étant, considérons la fonction

$$(3) \qquad \mathrm{p}x = \frac{1}{x^2} + \sum_{m,n}{}' \left[\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{a^2}\right],$$

où le signe $\Sigma'$ est étendu à toutes les valeurs de $m$ et $n$ non nulles à la fois. On sait que si $\omega_2 : \omega_1$ n'est pas réel, la série (3) est absolument et uniformément convergente dans toute région finie du plan ($x$ étant toujours distinct des points $a$); elle définit une fonction méromorphe de périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$. Ajoutons les termes de (3) pour lesquels $a$ prend deux valeurs dont la somme est nulle ; il viendra

$$(4) \qquad \mathrm{p}x = \frac{1}{x^2} + 2\,\mathrm{S}_{m,n} \frac{x^2(3a^2 - x^2)}{a^2(x^2 - a^2)^2},$$

où le signe S signifie que les entiers $m$ et $n$ sont assujettis à vérifier la condition (1). On a évidemment le droit d'écrire

$$\frac{1}{6}\mathrm{p}''x = \frac{1}{x^4} + 2\,\mathrm{S}_{m,n} \frac{x^4 + 6a^2x^2 + a^4}{(x^2 - a^2)^4}$$

et

$$\mathrm{p}^2x = \frac{1}{x^4} + 4\,\mathrm{S}_{m,n} \frac{3a^2 - x^2}{a^2(x^2 - a^2)^2} + 4x^4\,\mathrm{S}_{m,n} \frac{(3a^2 - x^2)^2}{a^4(x^2 - a^2)^4} + 8x^4\Delta,$$

en désignant par $\Delta$ la série quadruplement infinie

$$\Delta = \mathrm{S}_{m,n}\,\mathrm{S}_{p,q} \frac{(3a^2 - x^2)(3b^2 - x^2)}{a^2b^2(x^2 - a^2)^2(x^2 - b^2)^2} \qquad (a \neq b)$$

étendue à tous les couples distincts $(a, b)$ satisfaisant à (1) et (2)

et pris *une fois seulement* chacun. On a donc

$$(5)\qquad z = \mathrm{p}^2 x - \frac{1}{6}\mathrm{p}'' x = \mathop{\mathrm{S}}_{m,n} \frac{4x^4 - 20a^2x^2 + 10a^4}{a^4(x^2-a^2)^2} + 8x^4\Delta.$$

3. *Expression de z sous forme finie.* — Nous allons ramener la série quadruplement infinie $\Delta$ à une série double; pour cela, nous nous appuierons sur la convergence absolue du tableau (W) et sur la périodicité de $\mathrm{p}x$. Remarquons immédiatement que, si l'on groupe les termes d'indices $m$, $n$, $p$, $q$ et $p$, $q$, $m$, $n$ de (W), on obtient pour somme $\Delta$. Or, (W) étant absolument convergent, on aura encore $\Delta$ comme somme en groupant tous les termes pour lesquels $m$ et $n$ sont constants, puis en faisant la somme des résultats obtenus. On a ainsi :

$$\Delta = \mathop{\mathrm{S}}_{m,n} \frac{2}{(x^2-a^2)^2}\left[\mathop{\mathrm{S}}_{p,q} \frac{3b^2-a^2}{b^2(a^2-b^2)^2}\right] + \mathop{\mathrm{S}}_{m,n} \frac{1}{a^2(x^2-a^2)} \mathop{\mathrm{S}}_{p,q} \frac{3a^4 - 14a^2b^2 + 3b^4}{b^2(a^2-b^2)^3}.$$

Il s'agit donc de calculer

$$\mathrm{I} = \mathop{\mathrm{S}}_{p,q} \frac{3b^2-a^2}{b^2(a^2-b^2)^2}, \qquad \mathrm{J} = \mathop{\mathrm{S}}_{p,q} \frac{3a^4-14a^2b^2+3b^4}{b^2(a^2-b^2)^3}.$$

C'est ici qu'intervient la double périodicité de $\mathrm{p}x$ ; posons

$$x = a + \varepsilon;$$

nous avons, d'après (4),

$$(5)\qquad \mathrm{p}(a+\varepsilon) - \frac{1}{(a+\varepsilon)^2} - \frac{2(a+\varepsilon)^2[3a^2 - (a+\varepsilon)^2]}{a^2\varepsilon^2(2a+\varepsilon)^2}$$
$$= 2\mathop{\mathrm{S}}_{p,q} \frac{(a+\varepsilon)^2[3b^2-(a+\varepsilon)^2]}{b^2[(a+\varepsilon)^2-b^2]} \qquad (b \neq a):$$

or, d'après (3),

$$\mathrm{p}(a+\varepsilon) = \mathrm{p}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\rho(\varepsilon),$$

$\rho$ restant fini lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro; égalons le terme constant

et le terme en $\varepsilon$ dans les deux membres de (6), il viendra

$$I = \frac{3}{8a^4} \qquad \text{et} \qquad K = \mathop{\mathrm{S}}_{p,q} \frac{a^2 + 3b^2}{(b^2 - a^2)^3} = \frac{9}{16a^4};$$

mais on a

$$J = 2K - 3I;$$

on trouve donc

$$J = 0$$

et, par suite,

$$\Delta = \frac{3}{4} \mathop{\mathrm{S}}_{m,n} \frac{1}{a^4(x^2 - a^2)^2};$$

l'équation (5) devient en définitive

$$\mathrm{p}^2 x - \frac{1}{6}\mathrm{p}'' x = 10 \mathop{\mathrm{S}}_{m,n} \frac{1}{a^4} = 5 \sum{}' \frac{1}{a^4},$$

la nouvelle somme étant étendue cette fois à toutes les valeurs entières de $m$, $n$ (non nulles à la fois). Nous poserons, suivant l'usage,

$$\sum{}' \frac{1}{a^4} = \frac{1}{60} g_2;$$

il viendra

$$\mathrm{p}'' x = 6\mathrm{p}^2 x - \frac{1}{2} g_2.$$

Dès lors, la fonction $y = \mathrm{p}x$ satisfait à une équation de la forme

$$y'^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3,$$

et, faisant $x = 0$, on trouve

$$g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{a^6}.$$

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Aubert et Papelier. — *Exercices de Géométrie analytique*. In-8, 360 p. Paris, Vuibert. 6 fr.

Auwers (Arth.). — *Bearbeitung der Bradley'schen Beobachtungen an den alten Meridianinstrumenten der Greenwicher Sternwarte.*

2. Bd. Die Beobachtgn. am Graham'schen Quadranten 1743-1758. In-4 (31-24) de 60-313 p. Leipzig, W. Engelmann. 40 m.

Caunt (G.-W.). — *An Introduction to the infinitesimal Calculus. With applications to mechanics and physics.* In-8, 588 p. London, Milford. 12 s.

*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München u. Wien, sowie unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen. IV. Bd. : Mechanik. Red. v. *F. Klein* u. *C.-H. Müller*. I II. 3. Heft. In-8, p. 357-504. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m. 60. — 2 II. 4. Heft. In-8, p. 419-534. Leipzig, B.-G. Teubner. 3 m. 60.

Netto (Eug.). — *Elementare Algebra.* Akademische Vorlesgn. f. Studierende im 1. Semester. 2. Aufl. gr. in-8, x-200 p. avec 19 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m. 40; relié, 5 m.

Usherwood (T.-S.) and Trimble (C.-J.-A.). — *Practical mathematics for technical students.* Part 1. In-8, 376 p. London, Macmillan. 3 s. 6 d.

*Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen.* VI. *Vorträge üb. die kinetische Theorie der Materie u. der Elektrizität.* Geh. in Göttingen auf Einladg. der Kommission der Wolfskehlstiftg. v. M. Planck, P. Debye, W. Nernst, M. v. Smoluchowski, A. Sommerfeld u. H.-A. Lorentz. Mit Beiträgen v. H. Kamerlingh-Onnes u. W.-H. Keesom, e. Vorwort v. D. Hilbert. In-8, iv-196 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 7 m.; relié, 8 m.

Rothé (E.). — *Cours de Physique*, professé à la Faculté des Sciences de Nancy. 1re Partie : *Généralités, unités, similitude, mesures.* In-8, vi-184 p. avec 77 fig. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr. 50.

*Travaux du Laboratoire central d'Électricité.* Tome III (1912-1913). In-8, iv-426 p. avec 78 fig. et 26 pl. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

Bioche (Ch.). — *Histoire des Mathématiques.* Paris, Belin frères. 1 fr. 75.

Bôcher (Maxime). — *An Introduction to the study of integral Equations.* 2e édit. In-8, 80 p. Cambridge, Univ. Press. 2 s. 6 d.

Cremona (L.). — *Opere matematiche.* T. I. viii-497 p. Milano, U. Hoepli. 25 l.

Helm (Geo). — *Die Grundlehren der höheren Mathematik.* Zum Gebrauch bei Anwendgn. u. Wiederholgn. zusammengestellt. Neue verb. Ausg. gr. in-8, xv-419 p. avec 387 fig. Leipzig, Akadem. Verlagsgesellschaft. 14 m.; relié, 15 m.

1re Partie.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOLYAI (Wolfgang und Johann). — Geometrische Untersuchungen mit Unterstützung der ungarischen Akademie der Wissenschaften, herausgegeben von Paul Stäckel. (*Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*, herausgegeben von Friedrich Engel und Paul Stäckel. II. 1. *Wolfgang und Johann* Bolyai.) Erster Teil : *Leben und Schriften der beiden* Bolyai, mit der Nachbildung einer Aufzeichnung *Johann Bolyais* und 26 Figuren im Text. Zweiter Teil : *Stücke aus den Schriften der beiden* Bolyai, mit 94 Figuren im Text und einer Figurentafel. 2 vol. gr. in-8, IV-281 pages, VII-274 pages. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1913.

Farkas Bolyai naquit le 9 février 1775 à Bolya, près de Nagy-Szeben, en Transylvanie, d'une famille de vieille noblesse. Son père, qui cultivait sa terre, commença son instruction, qui fut continuée au collège évangélique réformé de Nagyenyed. L'enfant fit preuve tout de suite d'une intelligence extraordinaire, parlant le latin, l'allemand, l'anglais, le français, le roumain et un peu le grec et l'hébreu, sans parler de sa langue maternelle; il exécutait de tête des opérations arithmétiques compliquées. Il fut d'ailleurs surmené par ses maîtres et eut une vraie joie quand, à douze ans, il fut attaché comme compagnon d'études au baron Simon Kemény, qu'il suivit au collège évangélique réformé de Kolozsvár. Là, il fut un moment incertain de sa vocation, pensant devenir peintre, puis acteur. Enfin le baron Kemény l'emmena en Allemagne, à Iéna, puis à Gœttingue, où ils arrivèrent à la fin de 1796. Là, il fit connaissance avec Gauss, qui suivait aussi les cours, et il se lia avec lui d'une solide amitié. En 1799, il lui fallut rentrer en Transylvanie; Gauss et lui se promirent de penser l'un à l'autre un jour de chaque mois, à la même heure.

De retour dans sa patrie, il resta d'abord au service du baron Kemény. Il se maria le 28 septembre 1801, et son fils Jean naquit le 15 décembre 1802. Sa femme, fille d'un chirurgien, était sujette à des troubles psychiques, dont il y avait d'autres exemples dans sa famille, et qui attristèrent la vie de Farkas Bolyai.

Une chaire étant vacante au collège évangélique réformé de Maros-Vásárhely, Farkas y fut nommé professeur de mathématiques le 22 janvier 1804; ce fut la dernière joie de son père, qui mourut le 17 février suivant. Farkas resta en charge jusqu'au mois d'octobre 1851. Il habitait une petite maison dépendant du collège, et avait à sa disposition l'imprimerie du collège, en bien mauvais état, mais d'où néanmoins sortit son grand ouvrage, *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos introducendi.* Il travailla avec acharnement à la théorie des parallèles; mais ayant, dès 1804, envoyé à Gauss un essai de démonstration du postulatum d'Euclide, celui-ci lui en montra le point faible; Farkas chercha à se corriger, puis son ardeur pour les mathématiques se refroidit un certain temps. Il fit aussi des poésies; il écrivit de nombreuses pièces de théâtre en langue hongroise; il jouait assez bien du violon. Son esprit pratique se manifesta par plusieurs constructions de son invention, entre autres un poële économique (le premier connu), et une draisienne. Le *Tentamen* parut de 1832 à 1834. L'impression en fut gênée par le manque d'argent et de souscripteurs; ceux-ci n'étaient que 127 à l'apparition de la première partie.

Les vertus familiales étaient aussi très développées chez Farkas Bolyai, qui éleva son fils avec une tendre sollicitude. Imbu des idées de Rousseau, il chercha à développer également ses facultés physiques et intellectuelles. L'enfant fit preuve tout de suite d'une étonnante aptitude aux mathématiques et à la musique, et fut intelligent en tout; avec cela, d'une vigoureuse santé. Il fit ses études à Maros-Vásárhely, puis à l'Université impériale et royale d'ingénieurs de Vienne; il y eut de brillants succès, qui firent la joie de son père, qui lui prodiguait en même temps de touchants conseils. C'est à cette époque, le 19 septembre 1821, que mourut sa mère. A sa sortie, en 1823, il fut nommé lieutenant à la direction des fortifications à Temesvár, près de son pays. Au printemps de 1825, il revit son père, qui s'était remarié le 31 décembre précédent. Il lui fit une première esquisse de sa géométrie absolue, que Farkas ne comprit pas comme il l'aurait voulu, ce qui amena un dissentiment. Farkas Bolyai eut un nouveau fils, Grégoire, en 1826.

Jean fut nommé successivement à Arad et à Lemberg, en 1830. A partir de 1826, il tomba malade, sans doute de fièvres contractées dans les marais d'Arad et de Nagyvárad. En allant à Lemberg,

il montra à son père l'*Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei* (*a priori haud unquam decidenda*) *independentem*, où se trouve indiquée la future géométrie non-euclidienne. L'ouvrage parut en appendice au *Tentamen* et aussi à part. Un exemplaire en est envoyé à Gauss, qui répond qu'il y a vu de ses propres idées génialement développées. Cette réponse, quelque flatteuse qu'elle fût, déçut le jeune Bolyai. A partir de cette époque, il tomba dans une humeur bizarre, irritable; il quitta le service en 1833 et rentra à Maros-Vásárhely. Son histoire n'est plus maintenant que celle de ses différends avec son père; pourtant, il publia encore quelques écrits mathématiques. Il tenait sans doute de sa mère sa maladive disposition d'esprit, qui finit par le rendre insupportable. En 1845, Farkas chassa son fils de la terre familiale de Domáld, où il s'était retiré.

La fin de la vie de Farkas, déjà attristée par ses rapports avec son fils et par son second veuvage (1833), le fut aussi par la mort de Gauss, survenue le 23 février 1855. Il mourut lui-même le 20 novembre 1856.

Jean vivait depuis 1834 avec Rosalie de Orbán, qu'il ne pouvait épouser à cause de l'impossibilité de fournir la dot réclamée par l'autorité militaire. Il en eut trois enfants, dont une fille; aucun n'hérita des dispositions paternelles pour les sciences. En 1852, Jean Bolyai se sépara de cette femme après lui avoir donné une maison et lui avoir confié l'éducation de ses enfants. Il s'exila alors à l'extrémité de Maros-Vásárhely dans une complète solitude, non seulement sans amis, mais même en proie à l'hostilité de ses concitoyens. Accablé de maladies de toutes sortes, il mourut dans de grandes souffrances le 27 janvier 1860.

Il laissa une sorte de religion de son invention, *l'Allheillehre*, où les mathématiques jouaient un rôle important. Il aurait voulu qu'elle fût publiée après sa mort, mais personne ne s'en chargea.

Outre ces vies des deux Bolyai, trop rapidement et trop sèchement résumées, le Livre de M. Stäckel contient encore des analyses détaillées des œuvres de ces deux illustres précurseurs; nous en parlerons à propos des extraits contenus dans la deuxième Partie de l'Ouvrage, analysée d'autre part. Des additions et indications de

sources fort nombreuses occupent un tiers du volume et ajoutent encore à son intérêt.

Dans la seconde Partie, M. Stäckel nous présente de larges extraits des œuvres des deux Bolyai.

Tout d'abord, un essai de démonstration du postulatum d'Euclide, qui fut joint à une lettre adressée à Gauss par Farkas Bolyai en septembre 1804, tout de suite après son installation à Maros-Vásárhely. Cet essai fut lu attentivement par Gauss, qui répondit qu'il ne lui paraissait pas concluant, et en donna la raison. Farkas Bolyai essaya de se corriger (décembre 1808); ce deuxième travail est également publié dans l'Ouvrage de M. Stäckel.

Ensuite viennent des extraits du *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos puræ, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi.* C'est un très gros Ouvrage en deux volumes qui, le titre l'indique, embrasse les diverses branches des mathématiques. Les extraits nous montrent d'abord la Préface, d'allure par instants un peu mystique, où Bolyai donne aux mathématiques leur rang au milieu des autres sciences, histoire, philosophie, morale, psychologie. Ensuite nous avons des extraits de l'esquisse générale de l'arithmétique. Bolyai y désigne les nombres positifs et négatifs par des signes spéciaux, signes + et — déformés; il introduit la notion de limite. En dehors des extraits donnés ici, M. Stäckel donne dans la première partie de l'Ouvrage des renseignements intéressants : Bolyai eut des lumières sur des parties de la science étudiées beaucoup plus tard, comme la théorie des ensembles. En géométrie, les extraits nous présentent la définition de la sphère (lieu géométrique d'un point d'un solide dont un autre point est fixe), et de la circonférence (analogue, deux points du solide étant fixes); ces définitions sont présentées par Bolyai au commencement de son exposition; entre autres extraits particulièrement intéressants, nous avons aussi une liste d'axiomes de la géométrie.

Le Volume contient encore *Kurzer Grundriss eines Versuches*, court écrit en allemand, paru en 1851, et donnant un résumé des travaux antérieurs.

Parmi les Œuvres de Jean Bolyai, l'Ouvrage contient l'*Appendix* (1832), un petit travail sur les nombres imaginaires (1837),

et le *Raumlehre* (1855). L'*Appendix* est l'ouvrage où est exposée systématiquement la géométrie connue sous le nom de Lobatchefsky. Ses travaux mirent d'ailleurs Jean Bolyai en relations avec le géomètre russe, comme il est exposé en détails dans la première partie de l'Ouvrage. Le *Raumlehre* revient sur le même sujet.

Les extraits du *Tentamen* et l'*Appendix* sont donnés en traduction allemande.

Cet Ouvrage des plus intéressants ne peut que contribuer à répandre la gloire des deux illustres savants auxquels il est consacré.

GEORGES GIRAUD.

---

ADHÉMAR (R. D'). — LEÇONS SUR LES PRINCIPES DE L'ANALYSE. Avec une Note de M. SERGE BERNSTEIN. — Tome II : *Fonctions synectiques*, *Méthode des majorantes*, *Équations aux dérivées partielles du premier ordre*, *Fonctions elliptiques*, *Fonctions entières*. 1 vol. in-8, VII-297 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Le but que M. d'Adhémar se propose dans ses *Leçons* est de faire faire à l'étudiant une excursion dans les domaines les plus divers de l'Analyse. Aussi ne s'attarde-t-il pas dans une critique approfondie des notions primordiales : désirant conduire rapidement son lecteur assez loin, il préfère le mettre en face de beaucoup de *faits* analytiques, constituant, par leur ensemble, un tableau résumé de l'Analyse actuelle et de ses tendances.

Le Tome I de cet Ouvrage, qui a été analysé dans ce *Bulletin* (1), traitait uniquement des fonctions de variables réelles. C'est encore dans le champ des variables réelles que nous nous trouvons au début du Tome II, où l'Auteur donne la théorie de la fonction implicite par la méthode si féconde des approximations successives, et où il expose les belles propriétés des formes quadratiques, et quelques considérations sur des questions de maxima et de minima.

Abordant ensuite la théorie des fonctions analytiques ou synectiques, l'Auteur en rappelle les principes fondamentaux par les méthodes classiques : intégrale de Cauchy, séries de Taylor et de

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. $XXXI_1$, 1912.

Laurent. Puis il expose la théorie des produits infinis et démontre les théorèmes célèbres de Weierstrass et de M. Mittag-Leffler sur les zéros et les pôles des fonctions entières et méromorphes.

La méthode bien connue des fonctions majorantes (Calcul des limites de Cauchy) permet d'aborder l'étude générale des équations différentielles par l'emploi systématique du développement de Taylor. Mais la série obtenue ne converge, comme on sait, que si certaines conditions d'holomorphisme sont vérifiées. Dans les cas exceptionnels où il n'en est pas ainsi, il faut recourir à d'autres procédés. C'est à ce propos que M. d'Adhémar signale les récents travaux de M. Bernstein qui substitue aux développements taylorien certaines séries de polynomes qu'il appelle *séries normales*. Une série normale est une série double de la forme

$$f(x) = \sum_p \sum_q A_{pq} x^p (1 - x)^q,$$

supposée absolument convergente sur le segment 0 — 1. L'introduction de ces développements semble devoir être féconde. M. Bernstein expose lui-même, dans une Note fort intéressante, placée à la fin du Volume, les principaux résultats auxquels il est arrivé dans cette voie : c'est ainsi qu'une fonction quelconque, continue entre 0 et 1, est développable en série normale ; ces séries peuvent encore servir à l'intégration de certaines équations différentielles qui ne satisfont pas aux conditions d'holomorphisme qu'exige la méthode habituelle des développements de Taylor.

Après l'étude des équations différentielles, se place tout naturellement celle, plus compliquée, des équations aux dérivées partielles. M. d'Adhémar donne, pour l'équation du premier ordre, linéaire ou non linéaire, une théorie étendue des caractéristiques, ainsi que la méthode de l'intégrale complète de Lagrange.

L'inversion des intégrales elliptiques, les théorèmes principaux sur les fonctions doublement périodiques sont une très belle illustration des théories générales de l'Analyse. C'est à cette étude qu'est consacré le début du dernier Chapitre, qui se termine par quelques considérations sur le genre et l'ordre des fonctions entières et sur la difficile question de la croissance de ces fonctions suivant la distribution de leurs zéros dans le plan.

On le voit, M. d'Adhémar n'a pas voulu se laisser guider stricte-

ment par le programme classique du Certificat de Calcul différentiel et intégral. Il le déborde, et largement, sur plus d'un point, tenant à effleurer tout au moins toutes les questions importantes de l'Analyse moderne, sans en excepter les plus ardues ni les plus récentes. Son Ouvrage sera étudié avec fruit par les étudiants, et il éveillera leur curiosité.

H. Vergne.

---

WILSON (Edwin Bidwell). — Advanced Calculus. A Text upon select parts of differential Calculus, differential Equations, integral Calculus, Theory of Functions, with numerous Exercises, 1 vol. in-8, IX-566 pages. Boston, New York, Chicago, London; Ginn and Company, 1911-1912.

C'est un Livre qui tient à la fois du Cours de Mathématiques générales et du Traité d'Analyse. L'auteur s'est proposé le but difficile d'écrire un Ouvrage composé de manière à satisfaire également les différentes catégories de lecteurs, en permettant à ceux qui se bornent à demander aux mathématiques des outils commodes, pratiques et sûrs, de se familiariser rapidement avec les théories essentielles et en fournissant, aux esprits dont la rigueur a plus d'inquiétudes, le moyen de les apaiser. « Comme il n'est pas possible, écrit M. Wilson, de faire des Livres correspondant aux besoins différents de chaque groupe d'étudiants, parce que ces groupes sont trop nombreux et que le nombre des étudiants de chaque groupe est trop faible, il faut essayer de composer un Ouvrage où chacun puisse trouver ce qu'exigent ses études et la forme de son esprit. »

Il est naturel qu'un Livre, écrit avec le continuel et double souci de donner satisfaction à des tendances opposées, ne puisse avoir l'unité d'un Traité conçu sous un seul point de vue; que la nécessité d'être clair et concis rompe souvent les liens qui rattachent entre elles les diverses théories ou les différentes parties d'une même théorie; que les Chapitres de l'Analyse défilent aux yeux du lecteur avec un caractère un peu trop individuel : on devine le regret que l'auteur a dû éprouver devant l'obligation de sacrifier un peu la cohésion à la commodité.

Mais il ne semble pas possible de remplir mieux la tâche que M. Wilson s'est imposée. Ses démonstrations sont des modèles de

simplicité et de clarté ; partout des exemples très nets et des calculs pratiques les illustrent : un effort considérable a été fait, qui a coûté six ans de travail, vers la concision et le meilleur agencement des idées. Le choix des exercices est particulièrement remarquable : ils sont à leur place, gradués, depuis l'application immédiate des théories qui les précèdent jusqu'aux problèmes exigeant quelque initiative et aux questions qui ouvrent à l'étudiant une voie nouvelle. Un grand nombre de ces exercices sont empruntés à la Mécanique et aux Sciences physiques, beaucoup habituent le lecteur aux calculs d'approximation et à l'emploi des notations vectorielles. La disposition typographique n'est pas moins à louer : la partie critique est en petits caractères et les notions fondamentales se détachent de façon que chacun puisse aisément trouver ce qu'il veut et juste ce qu'il veut.

L'auteur ne cache pas, dans sa Préface, qu'il eût préféré consacrer à des recherches personnelles le temps qu'il a passé à composer ce Livre, mais que le désir et la conviction de faire œuvre utile l'ont encouragé et soutenu dans son travail : je crois que la gratitude des lecteurs auxquels il a rendu un indiscutable service le dédommagera de ses peines et lui montrera que ses efforts ont été fructueux.

L'Ouvrage est divisé en quatre Parties, précédées d'une Introduction pour la revision des questions plus élémentaires. Deux Chapitres forment cette Introduction : le premier rappelle les règles fondamentales de différentiation et d'intégration, en se plaçant au point de vue pratique et intuitif; le second est consacré à une étude critique de ces mêmes questions, après une théorie rapide des nombres irrationnels, des limites, des ensembles de points.

La première Partie traite du Calcul différentiel des fonctions d'une ou de plusieurs variables avec des applications à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique; des opérateurs et des nombres complexes.

Les équations différentielles sont étudiées dans la seconde Partie : l'auteur montre comment ces équations s'introduisent naturellement dans la Géométrie, la Mécanique et la Physique; il indique par quels procédés on peut en obtenir des solutions approchées, graphiques et analytiques; il s'occupe ensuite des cas classiques d'intégration et du facteur intégrant : les équations linéaires sont traitées d'une manière particulièrement simple et heureuse par la

décomposition de leur premier membre en un produit symbolique de facteurs binomes et cette méthode est aussi appliquée aux systèmes d'équations simultanées. Viennent enfin les équations aux différentielles totales et les équations aux dérivées partielles avec les notions d'intégrale complète et de caractéristique.

La troisième Partie s'occupe du Calcul intégral : opérations sous le signe somme; intégrales curvilignes avec les applications à la Mécanique et à la Thermodynamique; intégrale des fonctions de variable complexe; intégrales multiples, formules de Green et de Stockes avec leur interprétation dans les champs vectoriels; intégrales aux limites infinies ou dont l'élément différentiel devient infini; intégrales eulériennes, notions sur le calcul des erreurs; fonctions de Bessel; les premiers éléments du calcul des variations, la variation des intégrales simples et le principe de Hamilton, la variation des intégrales doubles et les applications à la Physique.

La théorie des fonctions est étudiée dans la dernière Partie qui traite des séries numériques, des séries de fonctions et, en particulier, des séries de Fourier et des séries définissant les fonctions thêta de Jacobi et les fonctions elliptiques. On s'occupe ensuite des théorèmes fondamentaux relatifs aux fonctions de variable complexe, de la représentation conforme, des surfaces de Riemann, de l'inversion des intégrales. On arrive alors à une étude des fonctions elliptiques reposant d'une part sur les intégrales de Legendre, d'autre part sur celles de Weierstrass. Un dernier Chapitre est consacré aux fonctions de variables réelles, solutions d'équations de la Physique mathématique, en particulier aux fonctions harmoniques et au potentiel.

Cette rapide énumération montre la richesse du contenu de l'Ouvrage de M. Wilson : j'ajoute que des notions comme celles de l'ordre de connexion d'une surface, de la longueur d'un arc de courbe, de l'aire limitée par une courbe, sont exposées avec précision au moment où elles se présentent naturellement et qu'il n'est pas une partie de ce Livre où la rigueur n'ait pénétré.

PAUL MONTEL.

PASCH (MORITZ). — 1° GRUNDLAGEN DER ANALYSIS. Ausgearbeitet unter Mitwirkung von CLEMENS THAER. 1 vol. in-8, v-140 pages, 1909. — 2° VERÄNDERLICHE UND FUNKTION. 1 vol. in-8, VI-186 pages, 1914. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner.

Selon leurs aptitudes et leur tempérament, les mathématiciens suivent deux directions principales : les uns tendent à la rigueur la plus complète, les autres s'embarrassent le moins possible d'entraves dans leur marche en avant. M. Moritz Pasch est des premiers : au cours de sa longue carrière de professeur, ce sont surtout les questions de méthode qui l'ont préoccupé et qui ont fait l'objet de ses publications. Avant les deux Livres plus récents que nous allons analyser, il avait fait paraître en 1882 chez Teubner : *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*, ainsi que *Vorlesungen über neuere Geometrie*, dont une deuxième édition augmentée a paru en 1912 ; l'auteur se plaçait, dans ces Ouvrages, au point de vue de la rigueur des principes, assez rare dans la plupart des traités de cette époque. Si c'est dans ces parties des Mathématiques, plus proches de l'expérience, que le besoin de rigueur s'est fait sentir et a reçu satisfaction le plus tôt, on n'en est pas moins obligé d'y faire appel à l'Analyse, qui seule est indépendante, et il est d'autant plus nécessaire de donner une assise solide à celle-ci : c'est le but des *Grundlagen der Analysis*.

### 1° GRUNDLAGEN DER ANALYSIS.

Tous les développements de l'Analyse se ramènent, en définitive, aux variables réelles, c'est-à-dire aux nombres rationnels et irrationnels, absolus et relatifs. « *En poussant les recherches de plus en plus*, a dit Pascal, *on arrive nécessairement à des mots primitifs qu'on ne peut plus définir, et à des principes si clairs qu'on n'en trouve plus qui le soient davantage pour servir à leur preuve.* » C'est uniquement à partir de là que doit se dérouler la trame des déductions. Il s'agit donc de mettre en lumière ces notions primitives et les propositions logiquement enchaînées qui suffisent pour parvenir aux définitions des nombres et à leurs propriétés fondamentales. Sans entrer dans le détail, bornons-nous,

pour donner une idée de la manière de M. Pasch, à indiquer les notions primitives et les principes auxquels il a recours.

*Notions primitives.* — 1° Chose ou objet (*Ding*), et nom (nom propre, nom commun).

2° Donnée (*Angabe*) ; donnée d'une chose.

3° Antérieur (*früher*) ; donnée antérieure.

4° Suite (*Folge*) ; suite de données, dans le sens de collection, d'ensemble de données.

*Principes.* — 1° $a$ désignant la donnée d'une chose, $b$ également, et $b$ étant différent de $a$, ou bien $a$ est antérieur à $b$, ou bien $b$ est antérieur à $a$, et ces deux possibilités s'excluent mutuellement.

2° Des choses étant données, on peut encore donner une chose différente des premières.

3° Si l'on a fait plusieurs données, d'une ou de plusieurs choses, l'une de ces données est antérieure, une autre postérieure à toutes les autres.

4° Si $a$ désigne la donnée d'une chose $\alpha$, on peut, après la donnée $a$, redonner la chose $\alpha$. $a$ désignant la donnée d'une chose $\alpha$, $b$ la donnée consécutive d'une autre chose, la chose $\alpha$ peut encore être donnée après $b$.

5° Soient des données A : on peut donner une chose $\mathcal{A}$ qui est la suite des données A ; aucune autre chose que $\mathcal{A}$ n'est la suite des A ; la donnée de $\mathcal{A}$ est postérieure à tous les A [1].

Tous ces éléments sont empruntés à l'expérience.

En partant de là, l'auteur arrive à la notion de *nombre entier* au bout de 22 pages, consacrées surtout à l'étude des *séries* finies, c'est-à-dire des suites d'objets tous *distincts*, rangés dans un *ordre* déterminé, et des *ensembles* finis, c'est-à-dire des suites ou collections d'objets *distincts* sans ordre déterminé.

Viennent ensuite les développements naturels de la notion ainsi acquise : parité ; nombres ordinaux ; numération, chiffres ; égalité, supériorité, infériorité ; addition, permutations, addition des nombres concrets ; notions d'opération et de calcul ; soustraction ; multiplication, élévation aux puissances.

---

[1] Nous avons ici, comme l'auteur dans *Veränderliche und Funktion*, modifié légèrement l'énoncé de ce dernier principe.

La division et la divisibilité amènent aux *fractions* (dont la définition, par les parties aliquotes, ne diffère pas de celle des livres élémentaires), au calcul des fractions, aux fractions décimales.

L'auteur définit alors et étudie le nombre ou symbole $\infty$, les nombres négatifs, les valeurs approchées, les racines, les ensembles infinis, les ensembles de nombres (rationnels) et les nombres *irrationnels :* ces derniers sont définis d'une manière identique au fond à celle de Dedekind, mais présentée d'une façon personnelle à l'auteur, à l'aide de ce qu'il appelle une *Schicht*, c'est-à-dire un ensemble de nombres rationnels tel que tout nombre situé entre deux nombres de l'ensemble en fait encore partie. Il ne reste plus, ce qui se fait sans difficulté, qu'à établir les règles de calcul pour l'ensemble complet des nombres (rationnels et irrationnels, positifs et négatifs). A la fin se trouvent quelques applications aux puissances d'exposants fractionnaires, aux logarithmes et au calcul combinatoire.

L'Ouvrage contient 145 définitions et 328 théorèmes qui se déduisent des seuls principes posés au début : et même le morcellement serait bien plus grand encore, si l'auteur s'était astreint à n'avancer jamais que pas à pas ; mais il a préféré à bon droit, selon l'usage ordinaire, énoncer seulement les propositions les plus utiles, en supprimant les intermédiaires évidents qui ne serviraient qu'aux démonstrations.

Il resterait à aborder la question de la réduction à un nombre *minimum* de principes. Mais, en face d'une construction compliquée, c'est déjà un résultat satisfaisant de pouvoir en démontrer l'équilibre et la cohésion, alors même qu'on est encore incertain qu'une partie des appuis et des liaisons conservés ne soit pas surabondante.

Le Volume se termine par quatre extraits des Leçons sur la Géométrie nouvelle, de l'Introduction au calcul différentiel et intégral, d'une Note sur l'Introduction des nombres irrationnels et d'un Discours académique sur la Valeur éducative des mathématiques.

### 2° Veränderliche und Funktion.

Le titre seul de ce second Livre ne donnerait pas une idée exacte de son contenu, dont une grande partie n'est pas consa-

crée aux notions de variable et de fonction; il se justifie cependant, car ce sont elles qui ont guidé l'auteur dans le choix des questions traitées. Les 40 premières pages du Livre sont à rapprocher des *Grundlagen der Analysis*, dont elles reproduisent en les développant et en les précisant encore les principes et les propositions. A partir de là il y a plus d'arbitraire dans le choix et l'arrangement des sujets; on peut, semble-t-il, les classer en deux groupes : d'une part, les définitions et les propriétés essentielles des fonctions élémentaires; d'autre part, des considérations de méthode ou de philosophie.

Parmi ceux du premier groupe, nous citerons les paragraphes consacrés aux expressions algébriques, aux notions de variabilité et de dépendance, aux fonctions d'une ou de plusieurs variables, notamment aux polynomes entiers, aux équations, à la parité des fonctions, aux fonctions symétriques et alternées, aux variables et aux fonctions homogènes, à la continuité ordinaire et uniforme, aux fonctions exponentielle et logarithmique. Des paragraphes particulièrement intéressants sont ceux qui traitent des ensembles énumérables et non énumérables et des séries infinies.

Parmi ceux du second, mentionnons les articles relatifs aux nombres concrets, à l'emploi du mot *grandeur*, à l'empirisme, aux notions et propositions *souches* (*Stammbegriffe* und *Stammsätze*), à l'induction complète et au calcul, mais surtout au *formalisme :* M. Pasch entend par là cet enchaînement logique des propositions qui fait toute la valeur du raisonnement mathématique. Il est arrivé aux plus grands mathématiciens de pécher sur ce point et c'est ce que rappelle l'auteur en se livrant à un examen détaillé et instructif des quatre exemples suivants.

Ampère, dans son Mémoire : *Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, etc.* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1806, Cahier 13), considère une fonction $f(x)$ finie et continue de $x$ dans un intervalle $ab$ et, supposant $f(a) \neq f(b)$, croit démontrer qu'elle a en chaque point de cet intervalle une dérivée, dont les zéros et les infinis y sont en nombre limité.

Cauchy, dans son *Analyse algébrique* (1821, p. 131) croit démontrer qu'une série convergente de fonctions continues est elle-même une fonction continue.

Gauss considère l'intégrale

$$U = \int_a^b [f(x, u, u')]^2 dx$$

où $f(p, q, r)$ est une fonction partout finie et continue, et $u$ une fonction finie et continue de $a$ à $b$, prenant en $a$ et $b$ des valeurs données et ayant sur $ab$ une dérivée finie et continue, et il admet comme évidente l'existence dans le champ fonctionnel ainsi défini d'une fonction $u$ rendant U minimum.

Hesse (*Journal de Crelle*, t. 42, p. 117 à 124) croit démontrer que, si le déterminant des dérivées secondes d'une forme de $n$ variables (le hessien) est identiquement nul, cette forme est impropre, c'est-à-dire réductible par une substitution linéaire à moins de $n$ variables indépendantes.

Le Livre se termine par une Note intéressante sur l'introduction des imaginaires.

Signalons que la lecture de *Veränderliche und Funktion* ne peut se faire indépendamment des *Grundlagen der Analysis*, à cause des nombreux renvois du premier de ces Livres au second.

TH. GOT.

---

VOLTERRA (VITO). — DREI VORLESUNGEN ÜBER NEUERE FORTSCHRITTE DER MATHEMATISCHEN PHYSIK, Gehalten im September 1909 an der Clark University. Mit Zusätzen und Erganzungen des Verfassers. Deutsch von ERNST LAMLA. Mit 19 Figuren und 2 Tafeln. 1 vol. gr. in-8, IV-97 à 181 pages. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1914.

A l'occasion de la célébration du vingtième Anniversaire de la Fondation de *Clark University*, M. V. Volterra a lu trois Leçons intitulées *Sur quelques progrès récents de la Physique mathématique*. M. Ernst Lamla vient de publier la traduction en allemand de ces importantes Leçons. Il y a seulement lieu de rappeler ici que l'analyse de la troisième Leçon a été faite par M. E. Lacour et publiée dans ce *Bulletin* en août 1912 (t. XXXVI, 1re Partie, p. 256-260). Dans ces trois Leçons, M. V. Volterra se contente d'envisager l'évolution de quelques idées et de développer quelques points qui ont été le but de ses recherches personnelles.

Aussi pensons-nous qu'il suffit de reproduire ici le sommaire de ces Leçons pour donner une idée des questions qu'elles résument.

*Première Leçon :* Introduction. — I. L'analyse et la physique mathématique. — II. Comment la théorie de Maxwell des tensions dans un champ électrostatique est renfermée dans la formule qui donne la variation d'une intégrale triple. — III. Déduction des équations de l'électrodynamique du calcul des variations. — IV. Intérêt et applications de cette déduction; (*a*) interprétations mécaniques; (*b*) transformation des équations de l'électrodynamique; (*c*) invariants intégraux et théorème de réciprocité ; (*d*) l'action stationnaire et l'action variée en physique mathématique. — V. Nécessité d'étendre la conception de fonction pour étendre le principe de l'action variée ; comment les théories développées dernièrement s'orientent dans cette direction. — VI. Les caractéristiques et le temps regardé comme une coordonnée. Le monde de Minkowski. — VII. Interprétation des caractéristiques. Cas du monde à 4, à 3 et à 2 dimensions. Comment le mécanisme des ondes dans le cas des différents mondes isotropes n'est pas le même. Erreurs qui viendraient de l'intuition et de l'analogie. — VIII. Chocs et calcul des variations. — IX. Cas des milieux anisotropes. Les milieux biaxiques et uniaxiques. Leur différence par rapport au mécanisme des ondes. — X. Réduction à des équations symétriques. Introduction des imaginaires en physique mathématique. Principe des images. — XI. Considérations de Minkowski. La transformation de Lorentz. La contraction de Lorentz. La contemporanéité des événements. Relations avec le principe de l'action stationnaire et avec le calcul des variations.

*Deuxième Leçon :* Introduction. — I. Problèmes anciens et modernes de la théorie de l'élasticité. Mécanique physique et mécanique analytique. — II. Loi de Hooke. L'élasticité et la courbure de l'espace; recherches de Beltrami; difficultés qu'on rencontre. — III. Problèmes statiques et problèmes dynamiques; types d'équations relatives. Méthodes pour intégrer les équations différentielles. L'évolution de la méthode de Green. Recherches de Betti et de Somigliana. L'équation multiple de Laplace. — V. Recherches de Kirchhoff. Les polémiques sur le principe de Huygens et les anciennes méthodes de Poisson. — VI. Les caractéristiques. — VII. Les vibrations des corps élastiques, recherches de Tedone, Love, Somigliana. — VIII. Les corps élastiques à connexion multiple; les distorsions; les efforts; nouvelle transformation du théorème de Green. Le problème fondamental des distorsions. — IX. Les vérifications expérimentales de la théorie de l'élasticité; difficultés; vérification par les distorsions et la biréfringence accidentelle; recherches de Corbino et Trabacchi. — X. La double équation de Laplace; différentes méthodes pour l'étudier. Recherches de Lauricella, Almansi, Levi-Civita, Boggio, Hadamard. — XI. Le théorème d'existence; les méthodes des approximations successives. Le théorème de Fredholm. — XII. La méthode des solutions

simples. Les anciennes méthodes et les fondements des nouvelles méthodes de Hilbert.

*Troisième Leçon :* I. La loi de Hooke n'est pas rigoureuse. L'état d'un système dépend de toute l'histoire antécédente. — II. Distinction entre la mécanique de l'hérédité et la mécanique de la non hérédité. — III. Exemple de la torsion d'un fil. — IV. Expression analytique des quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une fonction. — V. Hérédité linéaire. Questions générales sur l'hérédité. — VI. Les équations intégrales et les systèmes des équations de premier degré. — VII. Cycles fermés et invariabilité de l'hérédité. Principe du cycle fermé. — VIII. Oscillations dues à la torsion. Les équations intégro-différentielles. — IX. Cas général de l'élasticité en ayant égard à l'hérédité. — X. Équations de l'électromagnétisme en ayant égard à l'hérédité. — XI. Extension de la méthode de Green. — XII. Méthode pour la solution des équations intégro-différentielles de l'élasticité dans le cas des phénomènes de l'hérédité. Rôle de la nouvelle analyse.

Er. L.

---

LECORNU (Léon). — Cours de Mécanique *professé à l'École Polytechnique*. Tome I, 1 vol. in-8 (25 × 16), VII-537 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1914.

L'enseignement donné à l'École Polytechnique présente des caractères particuliers qui le différencient nettement de celui qui est donné dans les Écoles techniques d'une part et dans les Facultés des Sciences d'autre part. Il s'adresse à des élèves qu'une préparation théorique activement poussée a déjà marqués de cette empreinte intellectuelle que donne l'habitude de la déduction et du raisonnement mathématique. En revanche, ces élèves qui se destinent à l'Armée et aux Services publics n'ont pas encore la moindre notion de Science appliquée; ils ignorent tout de l'enseignement technique qui trouvera son plein épanouissement dans les diverses Écoles d'application où se formeront futurs ingénieurs et futurs officiers. Enseignement de transition, tel est l'enseignement polytechnicien. Et n'est-ce pas au Cours de Mécanique, science à la fois théorique et expérimentale, que ce caractère doit se manifester le plus largement ? C'est certainement ce fait qu'il est essentiellement transitionnel, qu'il n'est qu'une étape et non la dernière dans la formation des artilleurs et des ingénieurs, qui donne à l'enseignement de la Mécanique à l'École Polytechnique

sa physionomie particulière et qui fait des Leçons de M. Lecornu un Ouvrage à part, qui ne saurait être comparé aux Cours des Facultés des Sciences et au célèbre Traité classique de Mécanique rationnelle de M. Appell, ceux-ci étant composés pour de tout autres fins.

Pour apprécier à sa juste valeur le *Cours* de M. Lecornu, il est indispensable d'approfondir un peu plus que nous ne l'avons fait jusqu'à présent les conditions qu'il doit remplir. Il comporte en lui-même une certaine dualité; ce n'est pas un Cours de Mécanique appliquée, ce n'est pas non plus un Cours de Mécanique rationnelle; « il doit, comme le dit l'Auteur, tout en faisant une large place aux théories de la Science pure, tâcher de développer chez eux (les élèves) le sentiment des réalités et amorcer, en quelque sorte, l'enseignement donné dans les Écoles d'application ». La dualité entre les deux points de vue théorique et technique est évidente. Ajoutons que la tendance actuelle est très favorable au développement du côté technique. Et certes, on ne peut reprocher à M. Lecornu de l'avoir négligé. Tout au contraire, il comporte, comme nous le montrerons plus loin, un développement considérable : le développement maximum, peut-on dire. En effet, les seuls mécanismes couramment employés peuvent être étudiés dans ce Cours; seules, les méthodes générales d'utilisation des principes de Cinématique et de Statique peuvent y être exposées. Ce n'est que plus tard que les élèves étudieront, dans les Écoles d'application, les méthodes spéciales à leur art et apprendront à connaître les mécanismes réservés aux constructions, exploitations, etc. qu'ils devront diriger dans l'avenir. C'est en se plaçant à ce point de vue qu'on peut dire qu' « il y aurait plus d'inconvénients que d'avantages à développer outre mesure la partie technique » et que celle-ci a trouvé, dans le Cours de M. Lecornu, son expansion maximum. Malgré le peu de temps dont dispose le professeur (37 leçons de cinq quarts d'heure pour chacune des deux années), ce résultat a été obtenu sans diminuer en rien la valeur éducative de l'enseignement polytechnicien qui doit, avant tout, former des hommes d'action.

Mathématiciens, techniciens et pédagogues seront reconnaissants à M. Lecornu d'avoir conçu la véritable portée de son enseignement. Une connaissance approfondie du canon et des lois de

la balistique suffit-elle à l'officier ? Une initiation parfaite à la technique de telle branche de l'activité industrielle doit-elle former la seule base de la préparation de l'ingénieur ? Évidemment non. Dans la formation de futurs directeurs des Services de l'État, de futurs entraîneurs d'hommes, la portée d'un enseignement est avant tout fonction de sa valeur *éducative* et non de sa valeur *instructive*. « La méthode de travail indispensable à tout homme d'action réclame impérieusement l'étude d'une science poussée à fond, étude qui assouplit l'esprit et donne une logique de déduction nécessaire à celui qui commande ». Cette opinion, émise en 1911 par l'une des personnalités les plus autorisées, le général Langlois, et reproduite par M. Lecornu dans son Avertissement, montre le grand danger qu'il y aurait à ne pas faire à la théorie, seule douée de valeur éducative, la large part. En se familiarisant avec les belles méthodes de la Science pure, en se pénétrant de ses principes, l'esprit se forme. Plus tard, la théorie est vite oubliée peut-être « mais l'empreinte intellectuelle subsiste, et c'est là le résultat essentiel en Mécanique comme dans tout autre ordre de connaissances ». Et M. Lecornu cite Renan et Schopenhauer. On se sent bien loin de la « science pour la science », « la science pour ses applications », « des Mathématiques comme moyen » et des formules stériles d'un utilitarisme mal compris.

Juger de l'intérêt que présentent les théories et les méthodes générales de la Mécanique rationnelle d'après leur valeur éducative, mesurer les développements de Mécanique appliquée à leur faculté d'éveiller le sentiment des réalités ; telles paraissent être les directives de l'auteur. Ce *Cours de Mécanique* est le Livre d'un savant et d'un penseur, d'un éducateur. Sa portée ne se limite pas aux horizons toujours trop bornés de la Science ; au delà des frontières de la Mathématique, l'auteur a su atteindre l'esprit, la raison. Il forme des géomètres ayant « la vue bonne » et qui concilient, suivant Pascal, l'esprit de géométrie et l'esprit de finesse.

Le Tome I, seul paru actuellement, comprend le Cours de Mécanique de première année : Cinématique, Statique et Dynamique du point, Statique des systèmes. Les heures de cours étant strictement limitées, la Cinématique du point et la Statique des corps solides ont été reléguées en partie dans le programme d'admission.

La Cinématique des mécanismes a été transférée au Cours de Géométrie et la théorie du potentiel newtonien au Cours d'Analyse. M. Lecornu a cru devoir néanmoins conserver une étude rapide de ces diverses questions. L'Ouvrage y gagne beaucoup en unité.

Le Livre I comprend les préliminaires géométriques indispensables à tout Cours de Mécanique. Le Chapitre I est consacré aux généralités sur les grandeurs vectorielles, les produits et couples de vecteurs, la réduction d'un système de vecteurs, la dérivée géométrique d'un vecteur. Le Chapitre II traite du déplacement d'un système invariable : déplacement d'une figure plane dans son plan, théorème de Savary, déplacement général d'un solide. Un emploi constant du raisonnement géométrique permet d'établir très simplement et avec beaucoup d'élégance les principaux résultats; un paragraphe spécial est consacré aux *champs de déplacements*.

Le Livre II traite de la Cinématique. L'Auteur considère l'idée de *temps* comme une idée première; le temps est une grandeur à une dimension. Quant à l'unité de temps, elle est définie suivant l'usage, comme en Astronomie, en admettant la parfaite constance du jour solaire moyen; bien entendu, aucune difficulté n'est soulevée au sujet de cette définition. Le Chapitre I traite de la Cinématique pure. La première Partie est consacrée à la Cinématique du point; la deuxième à la Cinématique des solides. L'étude du mouvement parallèle à un plan prépare celle du mouvement le plus général d'un solide. La troisième Partie traite de la composition des mouvements et du mouvement d'un solide au contact d'un solide fixe. La quatrième Partie renferme les théorèmes généraux sur les mouvements relatifs concernant la composition des vitesses et celle des accélérations (accélération de Coriolis) et est suivie de quelques applications de ces dernières théories. Le Chapitre II (*Cinématique appliquée aux mécanismes*) a reçu un développement considérable; il s'étend sur une centaine de pages, presque le cinquième de l'Ouvrage. M. Lecornu s'est efforcé de mettre en évidence le rôle des différents mécanismes décrits très succinctement, de signaler leur valeur pratique, leurs défauts, les conditions d'emploi, sans jamais entrer dans les détails qu'il est très facile de trouver dans les Ouvrages spéciaux. Pour chaque question, les conditions du problème sont nettement posées, les

méthodes générales sont rapidement et clairement exposées, les limitations qu'imposent la pratique (maximum et minimum du nombre des dents d'une roue d'engrenage, limite de résistance d'un métal, d'un câble, etc.) sont mises en évidence; il en est tenu compte dans les applications. Tout cela, sans longueurs, sans rien qui nuise à la bonne harmonie ou qui puisse faire perdre de vue, à l'élève, le principe essentiel de la méthode employée. Quelquefois, un simple dessin donne l'idée d'un mécanisme; il serait impossible d'introduire plus de concision sans nuire à la clarté. La classification adoptée pour les mécanismes élémentaires est celle de Willis. L'Auteur n'en dissimule pas les défauts, mais il ne s'agit que de mettre un peu d'ordre dans l'étude des divers mécanismes et non pas d'établir une classification d'une logique impeccable. Il existe donc trois *classes* de mécanismes, suivant que le rapport de transmission : 1° est constant en grandeur et signe, 2° a une grandeur variable et un signe constant, 3° a un signe variable et par conséquent une grandeur variable. Dans chaque classe, on distingue trois *genres* suivant que la transmission a lieu : 1° par contact direct; 2° par l'emploi d'un intermédiaire rigide; 3° par l'emploi d'un intermédiaire flexible. L'étude des mécanismes de première classe et du premier genre conduit au problème de la transformation par contact direct d'une rotation uniforme autour d'un axe (exceptionnellement une translation) en une autre rotation uniforme autour d'un autre axe. Le cas des axes parallèles admet comme solution les engrenages plans. La méthode des enveloppes et la méthode épicycloïdale pour déterminer les profils des deux roues sont exposées géométriquement; la dernière conduit à la solution analytique à l'aide d'une quadrature. Les notions de *denture*, *pas*, *roue menante* et *roue menée*, *ligne d'action*, etc. permettent de préciser les conditions pratiques imposées à la solution. M. Lecornu décrit ensuite les principaux types de profils qu'on rencontre couramment : engrenages à lanterne; engrenages à flancs rectilignes, épicycloïdaux, par développantes de cercle, à dents circulaires; engrenages sans frottement, trains d'engrenages épicycloïdaux, pignon valseur, etc. Enfin, dans le cas où les deux axes de rotation ne sont pas situés dans un même plan, on est conduit à une solution théorique et diverses solutions pratiques à l'aide de roues coniques et, dans des

cas particuliers, à la vis sans fin et à la vis différentielle de Prony. Les huit autres types de mécanismes, d'importance fort inégale d'ailleurs, sont étudiés avec le même soin. Nous ne pouvons les citer ici. Ce Chapitre contient, sous une forme très condensée, tout ce qui est essentiel dans la Cinématique des mécanismes.

Le Livre III, consacré à la Statique et à la Dynamique du point, débute par l'exposé des principes de la Dynamique. Le Chapitre I est consacré aux principes et à leurs conséquences. Les énoncés des trois principes fondamentaux : principe de l'inertie, principe de l'indépendance des effets des forces, principe d'égalité de l'action et de la réaction, sont ceux qu'a donnés Newton. M. Lecornu en précise le sens et insiste beaucoup sur les conditions d'applicabilité. A propos du principe de l'inertie, il met en évidence le caractère purement conventionnel des *axes absolus*. L'idée et la notion de *masse* retiennent assez longtemps l'Auteur qui se préoccupe, avant tout, de ne laisser aucune idée fausse ou insuffisamment précise dans l'esprit de ses élèves. Cette préoccupation est telle que, ne pouvant dissimuler tout ce que la notion de *force* renferme de métaphysique, M. Lecornu énonce, à nouveau, les principes de la Dynamique sans parler aucunement des forces et montre que ces derniers principes sont, au fond, à peu près équivalents à ceux de Newton. Après quoi, l'emploi des forces, dans le développement de la Dynamique, ne pourra éveiller aucun scrupule ni faire naître aucune idée de doute empreint de scepticisme. Les conséquences immédiates des principes, le théorème du mouvement du centre de gravité, les notions de dimension des grandeurs mécaniques, d'homogénéité des formules, de similitude en Mécanique terminent la première Partie du Chapitre. Les suivantes traitent du travail des forces, de l'attraction universelle et des théorèmes généraux sur le mouvement d'un point. Le Chapitre II est consacré à l'équilibre et au mouvement d'un point libre. Les conditions d'équilibre stable, indifférent, instable y sont discutées. La courbe balistique dans le vide et dans l'air y est étudiée en détail, ainsi que le mouvement plus général d'un point sous l'action d'une force centrale (mouvement planétaire et mouvement d'un électron). Le Chapitre III est consacré à l'équilibre et au mouvement d'un point sur une courbe (pendule simple circulaire, pendule cycloïdal), le quatrième à l'équilibre et

au mouvement sur une surface, le cinquième aux mouvements relatifs, à l'équilibre et au mouvement d'un point à la surface de la Terre et aux nombreuses applications de ce dernier problème (déviation vers l'Est d'un mobile en chute libre, cyclones, pendule de Foucault).

Le Livre IV traite de la Statique des systèmes. « Une liaison est une pure abstraction. » M. Lecornu explique ce qu'il faut entendre par *liaison* et précise les hypothèses qui se rapportent aux *forces de liaison*. Différents Chapitres sont consacrés à l'équilibre des systèmes pesants, des corps solides, des systèmes articulés ou flexibles, des fils, des lames et des tiges minces. A propos de la Statique des solides naturels, s'introduit la notion de *frottement;* divers problèmes d'équilibre sont traités où interviennent l'équilibre dû au frottement et les résistances au roulement et au pivotement.

Enfin, ce *Cours* se termine par un long Chapitre consacré à la *Statique des machines*. L'étude de la relation qui doit exister entre la puissance et la résistance d'une machine pour que ces deux forces se fassent équilibre conduit à un problème de Statique d'une grande importance pratique. L'Auteur passe en revue les différents types de machines. L'élève y rencontre de belles applications des principes et des théorèmes généraux de la Statique et se trouve ainsi initié à leur application pratique. Relativement à ce passage de la théorie à la pratique, M. Lecornu met en garde les élèves contre les erreurs qu'on peut commettre dès les premières pages de son Cours, dans l'Introduction, il met en évidence le caractère conventionnel des hypothèses de la Mécanique; il n'existe pas de corps rigides, indéformables et il peut arriver, dans certains cas, que l'influence des déformations ne puisse être négligée. Sans doute, les principes fondamentaux trouvent, en Mécanique céleste surtout et dans le constant accord de leurs conséquences avec l'observation directe, une indéniable justification, mais « le caractère mathématique que présentent les théories mécaniques ne doit pas faire illusion sur leur valeur pratique ». D'ailleurs, ajouterons-nous, ce caractère est plus subjectif qu'objectif; Poincaré écrivait dans *La Science et l'hypothèse:* « Les Anglais enseignent la Mécanique comme une science expérimentale; sur le continent, on l'expose toujours plus ou moins comme

une science déductive et *a priori*. Ce sont les Anglais qui ont raison. » M. Lecornu ne pouvait certes pas adopter le point de vue anglais, mais il insiste beaucoup sur la nécessité d'avoir recours à l'expérience, seule capable d'asseoir définitivement un résultat, une loi. Et, à ce point de vue, l'Introduction ne peut laisser subsister aucun doute.

Le *Cours* de M. Lecornu sera lu avec profit par les mathématiciens qui y trouveront une conception remarquable d'un tel Cours, y découvriront une tendance nouvelle, une façon fort ingénieuse de jeter un pont solide et durable sur le fossé profond qui sépare la Mécanique rationnelle et la Mécanique appliquée. Quant aux techniciens, même les plus expérimentés, trop facilement éloignés des théories générales par la nécessité qu'impose la pratique de descendre dans le détail, ils y puiseront les idées grâce auxquelles ils remettront facilement de l'ordre dans leurs connaissances. Mais ce serait mal juger cet Ouvrage que d'en faire uniquement l'œuvre d'un savant. Sa portée dépasse le cadre étroit de la Mécanique. Il met en évidence la remarquable unité des divers enseignements en mettant au premier plan leur valeur éducative; c'est une œuvre qui élève l'esprit et qui atteint le noble but que s'est proposé son Auteur : former des hommes d'action.

GASTON COTTY.

---

WINKELMANN (MAX). — UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE VARIATION DER KONSTANTEN IN DER MECHANIK. Une brochure grand in-8, 11-67 pages. Leipzig, B.-G. Teubner, 1909.

Dans ce travail, l'Auteur s'est proposé d'étendre les résultats de Lagrange et de Poisson. Les fondateurs de la méthode de la variation des constantes ont établi leurs formules pour le cas où les forces *principales* dérivent d'un potentiel, les forces *perturbatrices* pouvant être quelconques. Cette restriction n'a jamais été gênante jusqu'ici, parce que la méthode n'a été employée qu'en Astronomie, et pour quelques problèmes de Mécanique terrestre (comme le pendule de Foucault). Mais les problèmes posés par la technique moderne sont plus variés, et peuvent

amener à considérer des forces principales quelconques, dépendant de la position du système et de ses vitesses.

Lagrange avait assimilé l'action des forces perturbatrices à celle de petits chocs successifs ; cette conception conduit l'Auteur à des équations de perturbation qui généralisent celles de Poisson. Il obtient la généralisation des équations de Lagrange en partant de l'*équation centrale* (qui est une forme particulière de l'équation de D'Alembert). Appelons *éléments* les constantes d'intégration qui s'introduisent dans la résolution du problème non troublé, et *vitesses* de ces éléments leurs dérivées par rapport au temps dans le problème troublé. Les équations de Poisson donnent directement les vitesses des éléments en fonction des forces perturbatrices; celles de Lagrange donnent au contraire les forces perturbatrices en fonction des vitesses des éléments. L'Auteur établit entre les coefficients des équations, qui ne sont autres que les « crochets » de Poisson et de Lagrange, des relations qui montrent directement que les deux systèmes d'équations sont équivalents. Lagrange considère que la force de son analyse réside en ce fait que les crochets ne dépendent que des éléments, et ne contiennent pas explicitement le temps. Cette propriété subsiste-t-elle quand les forces sont quelconques? Il n'en est rien ; pour que tous les crochets de Poisson, ou de Lagrange, ne contiennent pas explicitement le temps, il est nécessaire et suffisant que les forces *principales* soient conservatives. La démonstration de ce théorème conduit à des relations qui permettent, lorsqu'on a la solution *complète* d'un problème mécanique, d'en tirer des conclusions sur la partie *non conservative* des forces qui agissent sur lui. L'étude des relations entre les deux espèces de crochets est complétée par l'établissement des formules qui relient les vitesses des crochets de Lagrange aux vitesses des crochets de Poisson ; ces formules sont linéaires, et les coefficients, de forme compliquée, sont reliés par des relations analogues à celles qui ont été démontrées pour les crochets eux-mêmes.

Le théorème de Lagrange établit une relation générale entre les variations des éléments. Cette relation peut facilement s'étendre au cas de forces quelconques. Par contre, la forme si simple que prennent ensemble les équations de Lagrange et de Poisson, quand on choisit des éléments canoniques, ne peut plus être obtenue

quand les forces ne sont pas conservatives; cependant les approximations successives couramment employées s'appliquent encore dans le cas général. Mais plusieurs raisons semblent devoir limiter l'application de la méthode de variation des constantes dans le cas de forces principales quelconques : c'est d'abord le petit nombre de problèmes entièrement intégrés, quand les forces ne sont pas conservatives; puis c'est l'absence de forme canonique simple des équations, et la présence explicite du temps. L'Auteur termine son intéressant travail en traitant, à titre d'exemple, les petites oscillations non amorties d'un système couplé à deux degrés de liberté, en prenant pour équations du mouvement non troublé

$$\ddot{x} - ky = 0, \qquad \ddot{y} + hx = 0$$

et il vérifie sur cet exemple particulier les relations générales qu'il a établies.

A. Blondel.

---

DENIZOT (Alfred). — Das Foucaultsche Pendel und die Theorie der relativen Bewegung. Mit 19 Figuren im Text. 1 vol. gr. in-8. IV-76 pages. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1913.

Le problème du mouvement relatif présente un intérêt tout particulier lorsqu'il est appliqué à l'étude du mouvement d'un corps à la surface de la Terre : ce dernier dépend, en effet, de la rotation du globe sur lui-même, et son observation fournit une preuve mécanique immédiate du mouvement diurne. Nous devons respectivement à Newton et à Foucault les deux procédés expérimentaux les plus simples, qui ont été maintes fois employés pour mettre en évidence la rotation de la Terre.

L'effet que pourrait avoir la rotation de la Terre sur le mouvement des corps lancés à sa surface n'avait, en effet, pas échappé à Newton et chacun connaît l'expérience de la tour qu'il a signalée : une bille abandonnée sans vitesse initiale du sommet d'une tour élevée ne touche pas le sol au point passant par la verticale issue du point de départ : elle conserve, pendant la chute, la vitesse d'entraînement qu'elle avait à l'origine, c'est-à-dire celle du sommet,

qui est supérieure à celle du pied, d'où une déviation dans le sens du mouvement de la Terre par rapport à la direction du fil à plomb passant par le sommet.

Mais l'expérience de Newton est d'une réalisation difficile : de nombreuses causes d'erreurs, résistance de l'air, vitesse du vent, etc., dont les effets arrivent parfois à être très supérieurs à celui qu'on veut révéler, peuvent troubler d'une façon complètement arbitraire et inconnue le mouvement prévu ; et pour que les résultats d'observation puissent être retenus, la conduite de l'expérience nécessite de multiples précautions : c'est ce qui explique pourquoi elle n'a pu être réalisée avec succès que bien longtemps après sa conception, puisque les premiers résultats concluants datent seulement de 1831 (mesures de Reich dans un puits de mine à Freiberg).

Les réflexions qui conduisirent Foucault à concevoir la célèbre expérience du pendule, qui fut montrée pour la première fois au Panthéon, apparaissent comme moins immédiates, mais l'expérience de Foucault a l'avantage, sur celle d'un corps tombant d'une grande hauteur et qui prend par conséquent une vitesse considérable, d'éliminer la principale cause perturbatrice, la résistance de l'air, et d'accumuler pendant un temps très long les effets infiniment petits que la rotation de la Terre introduit dans le mouvement apparent des corps. Ayant démontré l'invariabilité du plan d'oscillation du pendule simple, il conclut que la rotation de la Terre se traduirait en apparence par la rotation du plan d'oscillation du pendule autour de la verticale du point de suspension, dans le sens du mouvement diurne.

Mais si le déplacement du pendule met nettement en évidence le mouvement de rotation de la Terre, la loi du Sinus qui intervient ne peut se vérifier que grossièrement : comme dans l'expérience de Newton, on ne peut se mettre à l'abri de toute influence perturbatrice, frottements, résistance de l'air, etc. C'est pourquoi, dans la plupart des Traités qui exposent l'étude analytique du mouvement d'un point à la surface de la Terre, dans le but d'une application aux expériences de Newton et de Foucault, ne trouve-t-on le plus souvent qu'un calcul approché et rapide, mais suffisant pour l'explication et la compréhension des faits : une simplification importante, et qui paraît légitime, consiste à négliger dans le déve-

loppement des équations les termes dépendant du carré de la vitesse angulaire.

M. A. Denizot est hostile à cette façon de faire et, dans la première partie de son Opuscule, il reprend d'une façon minutieuse et complète le problème classique du mouvement d'un point à la surface de la Terre, montrant qu'il est non seulement incorrect de supprimer les termes contenant le carré de la vitesse angulaire, mais que les effets des termes négligés peuvent être comparables à ceux qui dépendent de la première puissance de la vitesse angulaire.

L'auteur étudie alors très complètement les équations du mouvement relatif d'un point matériel par rapport à des axes entraînés : il applique particulièrement son étude au cas de l'expérience de Newton, en supposant toutefois, comme on le fait d'habitude, que l'accélération de la pesanteur est constante avec l'altitude sur une même verticale.

La seconde Partie de l'Ouvrage est réservée à l'étude du pendule de Foucault (cas d'une latitude quelconque, cas du pendule au pôle).

Une particularité de la publication de M. Denizot est que l'auteur s'est efforcé, dans le développement des équations du mouvement et dans l'intégration, de laisser toujours distincts les termes provenant respectivement des deux forces fictives, force centrifuge et force centrifuge composée, afin de pouvoir aisément discuter les effets de chacune d'elles. Cette précaution lui permet de donner de ses résultats des énoncés comme le suivant, qui se lisent sur les équations :

« Dans la chute libre d'un corps, la force centrifuge composée (Coriolis) provoque une déviation Est et une déviation Sud, la force centrifuge (force d'inertie d'entraînement) une déviation Nord. La déviation Est apparaît comme provenant du seul effet de la force de Coriolis, la déviation Sud comme résultant de la composition des effets de deux forces, force centrifuge composée et force centrifuge. »

Enfin, M. Denizot donne un Tableau indiquant la comparaison entre les données du calcul et les résultats numériques obtenus dans les expériences faites par la méthode de Newton.

JEAN MASCART.

SILBERSTEIN (L.), VECTORIAL MECHANICS. 1 vol. in-8, VIII-197 pages. London, Macmillan and Co, 1913.

Cet Ouvrage n'est qu'un simple Manuel ou un Traité de Mécanique écrit en notation vectorielle, mais il est intéressant à un double point de vue, par la manière dont l'Auteur a compris l'enchaînement et la matière classique de la mécanique et par le parti qu'il a su tirer de la notation en question. Comme il le dit expressément dans sa Préface : « Ce petit volume (moins de 200 pages), a pour but de présenter les principes et les théorèmes fondamentaux de la Mécanique en notation vectorielle, et de contribuer ainsi à la diffusion et à l'usage des méthodes vectorielles. » Il a voulu montrer en outre comment on peut tirer toute la Mécanique du principe de d'Alembert.

L'ordre des matières traitées, tel qu'il est indiqué par la Table, est assez suggestif. Après les 50 premières pages consacrées à exposer les éléments du calcul vectoriel, l'Auteur étudie d'abord les principes généraux : principe de d'Alembert, équations de Lagrange et principe d'Hamilton; puis les principes spéciaux : principe des forces vives, principe du centre de gravité et principe des aires. Les trois autres Chapitres, qui forment les deux tiers de l'Ouvrage, sont consacrés à la dynamique des corps solides, à la dynamique des corps déformables et à l'hydrodynamique.

L'exposé des éléments du calcul vectoriel aurait gagné peut-être à être condensé en 20 pages au lieu de 50. Mais il est clair et parfaitement didactique. Je signalerai en particulier une heureuse démonstration de la loi distributive du produit vectoriel.

La notation adoptée par l'Auteur est celle d'Heaviside, Föppl, Daniels, Bucherer, etc., et certainement l'une des meilleures. Les vecteurs et les directions vectorielles sont représentés par des lettres grasses, notation à peu près universelle actuellement, sauf chez les Allemands, qui continuent à employer leurs lettres gothiques spéciales. Le produit scalaire ou algébrique, ou encore travail de deux vecteurs, s'écrit comme celui de deux nombres algébriques. Le produit vectoriel ou géométrique, ou encore moment de deux vecteurs, est indiqué par un V, qui joue le même rôle que le signe $\sqrt{\phantom{x}}$ devant un radical ou la lettre L devant un

logarithme népérien. Il semble moins compliqué de tirer simplement un trait au-dessus du produit géométrique, pour indiquer que c'est un vecteur. C'est moins encombrant, et tous les signes algébriques de produits peuvent s'appliquer sans aucune complication accessoire.

Les directions des axes $x$, $y$, $z$ sont toujours représentées par les lettres **i**, **j**, **k** depuis Hamilton. Elles le seraient beaucoup plus clairement par **x**, **y**, **z**. Les quaternions d'Hamilton d'où dérive la notation vectorielle, ainsi que les formes de Grassmann, étaient un premier essai, et de tout premier ordre, pour étendre à l'espace à trois dimensions les variables complexes, $z = x + iy$, d'où la suite $i$, $j$, $k$ dans le quaternion, $q = a + ix + jy + kz$. On sait depuis Weierstrass, et surtout depuis la Thèse de Berlotti, que la généralisation du nombre algébrique est complète et définitive avec le nombre complexe, et qu'aucune des nombreuses quantités complexes à plus de deux paramètres ne peut réunir toutes les propriétés générales des nombres algébriques, ne peut être un simple nombre. On a renoncé depuis longtemps à regarder les directions axiales **i**, **j**, **k** comme des analogues de $i$. En les écrivant **x**, **y**, **z**, on traduit bien mieux leur rôle.

On verra d'ailleurs appliqués dans la traduction du *Vectoranalysis* de Coffin, qui paraît chez Gauthier-Villars, tous les principes de la notation française indiquée ici.

Après l'exposé des principes de la Mécanique, M. Silberstein étudie dans le Chapitre III la dynamique du corps solide. Il établit très rapidement en vectoriel les équations différentielles du mouvement de rotation, l'expression de la force vive et les équations d'Euler. L'Auteur passe d'ailleurs assez vite sur l'étude du corps solide, dont on trouvera la théorie vectorielle plus complète dans Coffin. Il introduit ici l'étude de la fonction linéaire vectorielle. On sait qu'elle équivaut à un système d'équations linéaires algébriques et permet de le résoudre par une simple multiplication. La fonction linéaire symétrique se retrouve aussi à la base de la théorie des quadriques, et l'Auteur en déduit en quelques pages l'étude du mouvement à la Poinsot et le cas de Lagrange et Poisson.

Dans le Chapitre de la mécanique des corps déformables, l'Auteur reprend l'étude générale de la fonction linéaire vectorielle

non symétrique, qui le conduit à l'établissement de l'ellipsoïde des efforts, comme la précédente l'avait conduit à l'ellipsoïde d'inertie, mais la nouvelle fonction plus générale permet d'exprimer en plus la déformation continue de l'ellipsoïde par rotation ou torsion. Il termine ensuite par l'étude des surfaces de discontinuité, stationnaires ou mobiles, et par la théorie de la propagation des ondes, d'après les vues de M. Hadamard.

Dans le dernier Chapitre sur l'hydrodynamique, les notions de divergence et de rotation ou tourbillon de vecteurs, qui sont intuitives et simples en notation vectorielle, permettent d'établir rapidement et de façon suggestive les notions de continuité, de filet fluide et tourbillonnaire, puis la transformation remarquable due à Clebsch des équations différentielles de l'hydrodynamique, les conditions générales d'équilibre, les lois de Pascal, Bernoulli, Toricelli, enfin sur les mouvements tourbillonnaires, les théorèmes de Bernoulli, Thomson, Helmholtz, Hugoniot, et la propagation des ondes d'accélération.

L'Ouvrage est terminé par un Tableau intéressant et suggestif de la traduction des formules vectorielles du texte dans les formules cartésiennes correspondantes. Il permet de saisir immédiatement la signification des quelques symboles spéciaux et toute leur clarté représentative et intuitive. Un coup d'œil attentif sur ce Tableau suffit pour faire saisir l'intérêt de la présente notation pour l'enseignement en particulier et le soulagement de la mémoire.

ALEX. VÉRONNET.

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de JULES MOLK. Tome II (Vol. 5) : *Développements en séries*. 2e fasc. gr. in-8, p. 161-268. Paris, Gauthier-Villars. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m. — Tome IV, vol. 5 : *Systèmes déformables*.

2e fasc. In-8, p. 97-208, Paris, Gauthier-Villars. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m. 20.

NIEWENGLOWSKI (B.). — *Cours de Géométrie analytique.* Tome III. Géométrie dans l'espace, avec Note de *E. Borel* sur les transformations en Géométrie. 2e édit. In-8, IV-608 p. avec 43 fig. Paris, Gauthier-Villars. 14 fr.

SCHUBERT (Herm.). — *Arithmetik u. Algebra.* (*Sammlung Göschen,* n° 47.) 2e édition. In-8, 171 p. Berlin, G.-J. Göschen. Relié, 0 m. 90.

JUNKER (Fr.). — *Höhere Analysis.* 2. Tl. Integralrechnung. (*Sammlung Göschen,* n° 88.) 3e édition. In-8, 190 p. avec 86 fig. Berlin, G.-J. Göschen. Relié, 0 m. 90.

HAUSSNER (Rob.). — *Darstellende Geometrie.* 1. Tl. Elemente; ebenflächige Gebilde. (*Sammlung Göschen,* n° 142.) 3e édition. In-8, 207 p. avec 110 fig. Berlin, G.-J. Göschen. Relié, 0 m. 90.

HACK (Frz.). — *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* (*Sammlung Göschen,* n° 508.) In-8, 123 p. avec 15 fig. Berlin, G.-J. Göschen. Relié, 0 m. 90.

SCHULZ (Otto). — *Ueber Tetraeder m. rationalen Masszahlen der Kantenlängen u. des Volumens.* Gr. in-8, XII-292 p. Halle, Gebauer-Schwetschke. 4 m. 50.

TRACY (J.-C.) and NORTH (H.-B.). — *Descriptive Geometry.* In-8. London, Chapman et Hall. 8 s. 6 d.

SCHWEYDAR (Wilh.). — *Harmonische Analyse der Lotstörungen durch Sonne u. Mond.* (*Veröffentlichung des königl. preussischen geodätischen Institutes.* Neue Folge. N° 59.) In-8, IV-72 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 5 m.

KRÜGER (L.). — *Transformation der Koordinaten bei der konformen Doppelprojektion des Erdellipsoids auf die Kugel u. die Ebene.* (*Veröffentlichung des königl. preussischen geodätischen Institutes.* Neue Folge. N° 60.) In-8, III-43 p. avec 3 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 3 m.

ALMANSI (E.). — *Le equazioni generali della dinamica e la legge di gravitazione.* In-4, 34 p. Roma, E. Loescher e C. 3 l. 50.

KLEIN (F.) u. SOMMERFELD (A.). — *Ueber die Theorie des Kreisels.* 1. Heft. Die kinemat. u. kinet. Grundlagen der Theorie. 2. durchgeseh. Abdr. Gr. in-8, VIII-196 p. avec 23 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 5 m. 60; relié, 6 m. 60.

PALAGYI (Melch.). — *Die Relativitätstheorie in der modernen Physik.* Vortrag. In-8, 77 p. Berlin, G. Reimer. 1 m. 50.

LIETZMANN (W.). — *Die Organisation des mathematischen Unterrichtes in den preussischen Volks- u. Mittelschulen.* (*Abhandlungen üb. den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Veranlasst durch die internationale mathemat. Unterrichtskommission. Hrsg. v. *F. Klein.*) In-8, v-106 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 3 m.

AUBERT (P.) et PAPELIER (G.). — *Exercices de Géométrie analytique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales.* T. I. In-8, 364 p. avec figures. Paris, Vuibert. 6 fr.

BACKES (Wilh.). — *Weitere Beweise f. den Fermat'schen Satz.* 2., umgearb. u. verm. Aufl. von « Ein Beweis des Fermat'schen Satzes ». In-8, 8 p. Mayence, imp. Lehrlingshaus. 3 m.

BRAUDE (L.). — *Les coordonnées intrinsèques, théorie et applications.* In-8, 100 p. avec 13 fig. et 1 portrait. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr.

*Connaissance des temps et des mouvements célestes*, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1916, publiée par le Bureau des Longitudes. In-8, XXX-820 p. et planches. Paris, Gauthier-Villars et Cie. 4 fr.

FORSYTH (A.-R.). — *Lectures introductory to the theory of functions of two complex variables*, Delivered to the Univ. of Calcutta during Jan. and Feb. 1913. In-8, 298 p. Cambridge, Univ. Press. 10 s.

GALITZIN (Fürst B.). — *Vorlesungen üb. Seismometrie.* Deutsche Bearbeitg., unter Mitwirkg. v. *Clara Reinfeldt* hrsg. v. *O. Hecker.* In-8, VIII-538 p. avec 162 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 22 m.; relié, 24 m.

GANS (Rich.). — *Einführung in die Vektoranalysis m. Anwendungen auf die mathematische Physik.* 3. Aufl. gr. in-8, X-131 p. avec 36 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 4 M.

SANDEN (Horst v.). — *Praktische Analysis.* (*Handbuch der angewandten Mathematik.* Hrsg. v. *H.-E. Timerding.* 1. Tl.). In-8, XIX-185 p. avec 30 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 3 m. 60; relié, 4 m. 20.

HJELMSLEV (Johs.). — *Darstellende Geometrie.* (*Hamdbuch der angewandten Mathematik.* Hrsg. v. *H.-E. Timerding.* 2. Tl.). In-8, IX-320 p. avec 305 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 5 m. 40; relié, 6 m.

HAUSDORFF (Fel.). — *Grundzüge der Mengenlehre.* Gr. in-8, VIII-476 p. avec 53 fig. Leipzig, Veit et Co. 18 M.; relié, 20 m.

1re Partie

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOREL (Émile). — INTRODUCTION GÉOMÉTRIQUE A QUELQUES THÉORIES PHYSIQUES. 1 vol. in-8, VII-139 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1914 (1).

Les deux théories principalement visées par M. E. Borel sont le *Principe de relativité* et la *Mécanique statistique*. En exposant ces théories avec la précision et la netteté qui lui sont habituelles, en les interprétant d'une façon claire et originale, l'Auteur a rendu accessibles des questions qu'on regarde généralement, non sans raison, comme difficiles à comprendre. Nous allons essayer d'en donner une idée.

Dans le but d'interpréter le Principe de relativité, M. Borel commence par étudier une géométrie particulière non euclidienne dont nous allons dire quelques mots. La géométrie *plane* euclidienne ordinaire consiste essentiellement dans l'étude du « groupe des déplacements », représenté analytiquement par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \alpha + X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \\ y = \alpha' + X\sin\varphi + Y\cos\varphi. \end{cases}$$

Ces formules, qui définissent un changement d'axes rectangulaires, représentent le changement linéaire de variables le plus général (2) transformant en elle-même la forme quadratique

$$f = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

c'est-à-dire le carré de la distance des deux points $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$.

On constituera une géométrie différente si, au lieu du groupe précédent, on envisage le groupe des transformations linéaires laissant invariante une *autre* forme quadratique fondamentale;

(1) Cet Ouvrage comprend deux Parties. La première, rédigée par M. Deltheil, reproduit les Leçons faites par M. Borel à la Sorbonne en 1912-1913. La seconde Partie consiste en quelques Notes dont la plupart ont été publiées antérieurement dans divers recueils.

(2) Nous laissons de côté les « symétries » qui consisteraient, par exemple, à changer $y$ en $-y$.

par exemple la suivante :

$$f = A^2(x_2 - x_1)^2 + B^2(y_2 - y_1)^2.$$

Ce nouveau groupe, évidemment représenté par les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} Ax = \alpha + AX\cos\varphi - BY\sin\varphi, \\ By = \alpha' + AX\sin\varphi + BY\cos\varphi, \end{cases}$$

présente un lien intime avec le précédent, et peut même être confondu verbalement avec lui par la convention de langage suivante :

1° Appelons carré de la distance de deux points $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ la quantité

$$f = A^2(x_2 - x_1)^2 + B^2(y_2 - y_1)^2;$$

2° Appelons angle de deux directions la moitié du rapport anharmonique que définissent ces deux directions avec les deux directions fondamentales $A^2x^2 + B^2y^2 = 0$ : deux directions seront dites rectangulaires si elles sont conjuguées par rapport aux directions fondamentales.

Alors, toutes les propriétés du groupe (2) pourront s'énoncer dans le langage de la géométrie euclidienne ordinaire représentée par le groupe (1). Les formules (2) définiront le « groupe des déplacements » ou encore le changement d'axes rectangulaires le plus général pour la nouvelle géométrie : ces déplacements, avec notre convention de langage, conserveront les distances et les angles. Les directions fondamentales $A^2x^2 + B^2y^2 = 0$ joueront le rôle des droites isotropes. Dans une « rotation » autour de l'origine ($\alpha = \alpha' = 0$), les coniques $A^2x^2 + B^2y^2 = \text{const.}$ glisseront sur elles-mêmes, tout comme font les circonférences dans une rotation euclidienne.

Si $A^2$ et $B^2$ sont de même signe, la nouvelle géométrie sera dite *elliptique* [1]; s'ils sont de signes contraires, elle sera dite *hyperbolique* : les droites isotropes $A^2x^2 + B^2y^2 = 0$ seront alors réelles.

Le cas le plus intéressant est justement celui où $A^2 = -B^2$ ; la

---

[1] Cette géométrie elliptique est, en quelque sorte, une projection oblique de la géométrie euclidienne ordinaire.

forme fondamentale devient

$$f = (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2,$$

et les formules (2) peuvent alors être écrites ainsi (en nous bornant aux « rotations », c'est-à-dire en supposant $\alpha = \alpha' = 0$) :

$$(3) \qquad \begin{cases} x = X \operatorname{ch}\lambda + Y \operatorname{sh}\lambda, \\ y = X \operatorname{sh}\lambda + Y \operatorname{ch}\lambda. \end{cases}$$

Dans une telle « rotation hyperbolique », toutes les hyperboles équilatères $x^2 - y^2 = \text{const.}$ glissent sur elles-mêmes : en particulier les bissectrices des axes, $x^2 - y^2 = 0$, glissent sur elles-mêmes (comme les droites isotropes en géométrie euclidienne).

Il est facile, pour l'espace à trois ou à quatre dimensions, de définir des géométries elliptiques ou hyperboliques analogues. Disons un mot du cas de quatre dimensions. La géométrie *euclidienne* à quatre dimensions est l'étude du groupe de transformations linéaires laissant invariante la forme quadratique

$$f = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (t_2 - t_1)^2,$$

qu'on peut appeler *carré de la distance de deux points*. Ce groupe serait représenté par des formules, faciles à écrire, définissant un changement d'axes rectangulaires passant du système $oxyzt$ au système OXYZT. Dans cette géométrie, une rotation autour de l'origine fait glisser sur elles-mêmes les hypersphères $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = \text{const.}$, et en particulier l'hypercône isotrope $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$.

Au lieu de ce groupe, on pourra, encore ici, considérer celui des transformations linéaires transformant en elle-même une *autre* forme quadratique

$$f = A^2(x_2 - x_1)^2 + B^2(y_2 - y_1)^2 + C^2(z_2 - z_1)^2 + D^2(t_2 - t_1)^2.$$

Moyennant certaines conventions de langage faciles à imaginer (et généralisant celles faites pour le cas de deux dimensions), toutes les propriétés de ce nouveau groupe pourront être énoncées dans le langage euclidien : une « rotation » fera glisser sur elles-mêmes les hyperquadriques $f = \text{const.}$, et en particulier l'hyper-

cône $f = 0$ : ce sera un changement d'axes rectangulaires pour la nouvelle géométrie ainsi définie.

Le cas le plus intéressant est ici celui où l'on suppose $A^2 = B^2 = C^2 = -D^2$. La forme fondamentale laissée invariante est alors

$$f = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (t_2 - t_1)^2.$$

Il est assez facile de voir que, dans la géométrie hyperbolique à quatre dimensions ainsi définie, une *rotation* quelconque (autour de l'origine) peut se décomposer en :

1° Une rotation *euclidienne* ordinaire R de l'espace euclidien à trois dimensions $(x, y, z)$, cette rotation laissant fixe l'axe des $t$;

2° Une rotation *hyperbolique* dans le plan $(z, t)$ laissant fixe l'axe des $x$ et l'axe des $y$.

Donc, faisant abstraction de la rotation R qui est un simple changement d'axes dans l'espace euclidien $(x, y, z)$, notre changement de variables s'écrira ainsi :

$$(4) \qquad \begin{cases} x = X, \\ y = Y, \\ z = Z \operatorname{ch}\lambda + T \operatorname{sh}\lambda, \\ t = Z \operatorname{sh}\lambda + T \operatorname{ch}\lambda. \end{cases}$$

A un changement d'axes près dans l'espace euclidien ordinaire $(x, y, z)$, ces formules définissent la transformation linéaire la plus générale laissant invariante la forme $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. C'est la *transformation de Lorentz*.

Nous allons maintenant appliquer les considérations qui précèdent à l'étude du Principe de relativité. Pour commencer par un cas simple, considérons, sur une droite D prise pour axe des $x$, un mouvement (M) rectiligne et uniforme. Un groupe d'observateurs A, en repos sur la droite D, définira ce mouvement (M) par l'équation

$$x = vt;$$

ces observateurs pourront convenir de représenter ce mouvement par la droite que cette équation représente dans l'espace à deux dimensions $(x, t)$.

Imaginons maintenant un second groupe d'observateurs B, animé, sur la même droite D, d'une vitesse $w$ par rapport aux observateurs A : ceux-ci représenteront, dans le plan $(x, t)$, le mouvement des B par la droite d'équation

$$x = wt.$$

Nous allons étudier ce que sera, dans la Mécanique du principe de relativité, le mouvement (M) pour les observateurs B. Dans cette Mécanique, on admet que tout mouvement (M) uniforme pour les A est aussi uniforme pour les B ; mais si le mouvement (M) s'effectue avec la vitesse de la lumière pour les A, il s'effectuera *aussi* avec la vitesse de la lumière pour les B. Il est clair que, pour arriver à expliquer ce fait, il faut absolument renoncer aux notions vulgaires de longueur absolue et de temps absolu, car elles nous conduiraient tout droit à la Cinématique classique, c'est-à-dire à l'addition pure et simple des vitesses. Il faut donc admettre que les longueurs $x$ et les temps $t$ pour les observateurs A *ne seront pas les mêmes* que les longueurs X et les temps T pour les observateurs B. Et l'on passera du système $(x, t)$ au système (X, T) par un *changement de variables* que nous allons étudier.

Tout d'abord, le mouvement (M) restant uniforme pour les B, ceux-ci le représenteront par

$$X = uT,$$

ou bien par la droite qui a cette équation dans le plan (X, T). Notre changement de variables doit donc transformer une droite du plan $(x, t)$ en une droite du plan (X, T), ce qui nous conduit à le prendre *linéaire*.

En second lieu, si les A voient le mouvement (M) s'effectuer avec la vitesse de la lumière [1], c'est-à-dire si l'on a

$$x^2 - t^2 = 0,$$

les B le verront aussi s'effectuer avec la vitesse de la lumière, c'est-à-dire qu'on aura aussi

$$X^2 - T^2 = 0.$$

Cela nous conduit à admettre qu'on passera du système $(x, t)$

[1] Dans tout ce qui suit, nous prenons la vitesse de la lumière comme *unité*.

au système (X, T) par un changement linéaire de variables laissant invariante la forme fondamentale $x^2 - t^2$. Nous avons déjà défini un tel changement, qui est représenté par les formules (3) qui deviennent

$$(5)\qquad \begin{cases} x = X \operatorname{ch}\lambda + T \operatorname{sh}\lambda, \\ t = X \operatorname{sh}\lambda + T \operatorname{ch}\lambda; \end{cases}$$

la quantité $\operatorname{th}\lambda = w$ représente la vitesse des B par rapport aux A; celle des A par rapport aux B est $-\operatorname{th}\lambda$. On peut dire que ces équations définissent une « rotation hyperbolique » dans le plan $(x, t)$, consistant à prendre comme nouvel axe des T $(X = 0)$ la droite $x = wt$.

On voit que, considéré au seul point de vue mathématique, le Principe de relativité est excessivement simple, puisque tout l'appareil analytique consiste dans les formules (5) [1]. Ce qui est plus difficile, c'est l'interprétation physique de ces formules, parce que cette interprétation nous conduit à modifier profondément les notions ordinaires de longueur et de temps. Insistons sur ce point capital.

Soient $E_1$ et $E_2$ deux événements (par exemple deux étincelles) qui se passent, pour les observateurs A, à une distance $(x_2 - x_1)$ l'un de l'autre, et à un intervalle de temps $(t_2 - t_1)$. Les B verront ces deux *mêmes* événements se produire à une distance $(X_2 - X_1)$ et à un intervalle de temps $(T_2 - T_1)$, et l'on aura

$$(6)\qquad \begin{cases} x_2 - x_1 = (X_2 - X_1) \operatorname{ch}\lambda + (T_2 - T_1) \operatorname{sh}\lambda, \\ t_2 - t_1 = (X_2 - X_1) \operatorname{sh}\lambda + (T_2 - T_1) \operatorname{ch}\lambda. \end{cases}$$

Ainsi, *ni la distance des théâtres des deux événements, ni la durée qui les sépare n'apparaîtront les mêmes aux* B *et aux* A. Donnons quelques exemples.

En premier lieu, supposons que les observateurs A voient les deux événements $E_1$ et $E_2$ se produire *au même instant*

---

[1] En Cinématique classique, les formules qui tiennent lieu de (5) sont les suivantes :

$$x = X + wT,$$
$$t = T;$$

on voit qu'elles ne sont pas beaucoup plus simples. Seulement leur interprétation physique est immédiate, parce que la seconde revient à admettre la notion de *temps absolu*.

($t_2 - t_1 = 0$), mais en deux lieux différents ($x_2 - x_1 \neq 0$). Les B verront les deux mêmes événements *à deux instants différents* ($T_2 - T_1 \neq 0$), et à une distance $X_2 - X_1 = (x_2 - x_1)\,\mathrm{ch}\lambda$ : ces observateurs estimeront donc $\mathrm{ch}\lambda$ fois plus grande la distance des deux événements que les observateurs A. C'est le phénomène de la *contraction de Lorentz :* les A qui sont au repos diront que, pour les B qui sont en mouvement, les longueurs sont contractées.

Inversement, si les deux événements $E_1$ et $E_2$ étaient contemporains pour les B ($T_2 - T_1 = 0$), ils ne le seraient pas pour les A ($t_2 - t_1 \neq 0$), et l'on aurait, cette fois,

$$x_2 - x_1 = (X_2 - X_1)\,\mathrm{ch}\lambda.$$

Les B, se croyant en repos, diront que ce sont les A qui sont en mouvement et qui sont affectés par la contraction de Lorentz : rien, en effet, ne distingue la situation des B vis-à-vis des A de la situation des A vis-à-vis des B.

En second lieu, prenons deux événements $E_1$ et $E_2$ que les A voient se produire *au même point* ($x_2 - x_1 = 0$), mais à des époques différentes ($t_2 - t_1 \neq 0$). Les B verront ces deux mêmes phénomènes se produire en deux points différents ($X_2 - X_1 \neq 0$), et à un intervalle de temps $T_2 - T_1 = (t_2 - t_1)\,\mathrm{ch}\lambda$, qui *ne sera pas le même* que celui évalué par les A : ceux-ci diront que les B ont évalué trop grande la durée qui sépare les deux événements. C'est le phénomène du *temps propre* qu'on rencontre dans la Cinématique de Lorentz et de Minkowski.

Inversement, si c'étaient les B qui voyaient les deux événements $E_1$ et $E_2$ se passer au même point ($X_2 - X_1 = 0$), les A ne les verraient pas au même point ($x_2 - x_1 \neq 0$), et l'on aurait, cette fois,

$$t_2 - t_1 = (T_2 - T_1)\,\mathrm{ch}\lambda.$$

Les B, qui se croient en repos, diront donc que ce sont les A qui, étant en mouvement, ont évalué trop grande la durée, et sont affectés par la réduction du temps.

On voit avec quelle netteté se trouve mise en évidence l'intime rapport qui existe entre la *contraction* de Lorentz et le *temps propre* de Lorentz et de Minkowski : étant donnée la parfaite symétrie des formules (6) par rapport aux $x$ et aux $t$, l'un des phénomènes ne pourrait pas exister sans l'autre ; on peut même

dire qu'ils constituent, à eux deux, un seul et même fait, qui est la traduction, en langage physique, des formules analytiques (6).

Étudions maintenant la composition des vitesses dans l'espace à trois dimensions. Les observateurs A seront liés à un trièdre $oxyz$, et les observateurs B à un trièdre OXYZ, animé par rapport au premier d'un mouvement d'entraînement rectiligne et uniforme de vitesse $w = \text{th}\lambda$. Pour la commodité, faisons coïncider les deux axes $oz$ et OZ avec la direction de cette vitesse, et choisissons OX et OY respectivement parallèles à $ox$ et à $oy$ : les A représenteront alors le mouvement des B par les équations

$$(7) \qquad \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{w} = \frac{t}{1}.$$

Soit (M) un mouvement rectiligne et uniforme ; les A le représenteront par

$$\frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'} = \frac{t}{1},$$

et, pour eux, la vitesse de ce mouvement sera $v = \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}$. Les B représenteront le même mouvement (M) par

$$\frac{X}{a'_1} = \frac{Y}{b'_1} = \frac{Z}{c'_1} = \frac{T}{1}$$

et diront qu'il s'effectue avec la vitesse $u = \sqrt{a'^2_1 + b'^2_1 + c'^2_1}$ : le principe de relativité exige, en effet, qu'une translation uniforme pour les A soit aussi pour les B une translation uniforme. Seulement, si cette translation s'effectue pour les A avec la vitesse de la lumière, c'est-à-dire si l'on a

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0,$$

elle s'effectuera aussi avec la vitesse de la lumière pour les B, c'est-à-dire qu'on aura aussi

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2 = 0.$$

Nous sommes donc amenés à admettre qu'on passera du système $(x, y, z, t)$ au système $(X, Y, Z, T)$ par un changement linéaire de variables transformant en elle-même la forme quadratique fondamentale

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Grâce au choix particulier d'axes que nous avons fait, ce changement de variables ne sera autre que la transformation de Lorentz définie par les formules (4) ci-dessus. On peut interpréter ce changement de variables comme définissant une « rotation » dans l'espace hyperbolique à quatre dimensions $(x, y, z, t)$, ainsi que nous l'avons expliqué plus haut, le nouvel axe des T étant la droite représentée par les équations (7) : cette droite, en effet, qui représente pour les A le mouvement d'entraînement des B, représente le repos pour ceux-ci.

Interprétons physiquement les formules (4) : les deux premières, $x = X$, $y = Y$, nous montrent que les longueurs perpendiculaires au mouvement d'entraînement des B par rapport aux A (mouvement qui est, par hypothèse, dirigé suivant l'axe commun $oz$ ou OZ) sont *les mêmes* pour les B et pour les A. Mais les deux dernières montrent qu'on n'a ni $z = Z$, ni $t = T$ : c'est dire que les longueurs dans le sens du mouvement d'entraînement et le temps *ne sont pas les mêmes* pour les B et pour les A ; nous retrouvons les phénomènes du *temps propre* de Minkowski et de la *contraction* de Lorentz, cette dernière n'affectant que les longueurs dirigées suivant le mouvement d'entraînement, et pas les longueurs perpendiculaires.

Pour achever le problème de la composition des vitesses, il reste à exprimer la vitesse $u$ du mouvement (M) par rapport aux B, en fonction de sa vitesse $v$ par rapport aux A et de la vitesse d'entraînement $w$ des B par rapport aux A. C'est là un problème que M. Borel résout d'une façon simple et élégante, au moyen de l'interprétation du changement de variables comme une rotation dans l'espace hyperbolique à quatre dimensions $(x, y, z, t)$ : on trouve ainsi la formule

$$1 - u^2 = \frac{(1 - v^2)(1 - w^2)}{(1 + vw\cos\theta)^2}, \tag{8}$$

$\theta$ désignant l'angle des deux vitesses $v$ et $w$ $\left(\cos\theta = \frac{c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}\right)$.

Telle est la formule de composition des vitesses dans la Cinématique de la relativité. On voit que, si $v$ et $w$ sont inférieurs à 1 (c'est-à-dire à la vitesse de la lumière), $u$ l'est aussi. En outre, si $v$ et $w$ sont très petits par rapport à l'unité, on retrouve la formule de la Cinématique classique. Enfin, remarquons que, la formule

étant symétrique par rapport à $v$ et $w$, l'ordre dans lequel on compose ces vitesses importe peu.

Si l'on pose

$$u = \operatorname{th}\alpha, \qquad v = \operatorname{th}\beta, \qquad w = \operatorname{th}\gamma,$$

la relation (8) devient

$$\operatorname{ch}\alpha = \operatorname{ch}\beta \operatorname{ch}\gamma + \operatorname{sh}\beta \operatorname{sh}\gamma \cos\theta;$$

on reconnaît une des relations fondamentales entre les côtés et les angles d'un triangle géodésique tracé sur une surface à courbure constante négative égale à $-1$. Ainsi, aux trois vecteurs vitesses $u$, $v$, $w$, on peut faire correspondre un certain triangle pseudosphérique dans un espace lobatchewskien auxiliaire, que M. Borel appelle *espace cinématique*. C'est cette « règle du triangle pseudosphérique » qui, dans la théorie de la relativité, remplace la « règle du parallélogramme » que fournit la Cinématique classique dans un espace cinématique euclidien.

Le fait que, dans la théorie de la relativité, l'espace cinématique est non euclidien amène M. Borel à faire une remarque fort curieuse dans le cas où le mouvement d'entraînement des observateurs B par rapport aux observateurs A *varie*, c'est-à-dire ne reste pas constamment la même translation rectiligne et uniforme, à laquelle nous nous sommes bornés jusqu'ici. Dans ce cas, *il peut arriver que les* B *se croient constamment animés d'une translation* (*d'ailleurs variable*), *tandis que les* A *les voient animés d'une rotation*. C'est là un fait en apparence assez paradoxal, d'autant plus qu'il me semble que les A, en même temps qu'ils ont vu tourner le système B, l'ont vu nécessairement se déformer. On voit combien le Principe de relativité conduit à des conséquences bizarres et qui choquent nos habitudes les plus invétérées. Au reste, dans ce cas des mouvements variables, le problème de la relativité semble extrêmement ardu, et ne paraît même pas facile à poser nettement.

J'ai beaucoup insisté sur le Principe de relativité, et la place me manque maintenant pour parler de la Mécanique statistique. Heureusement je puis être très bref sur ce point, puisque l'Auteur a lui-même exposé ses idées sur ce sujet dans un Chapitre de son Livre récent sur *le Hasard*, que tout le monde a lu ou lira. Je me

contenterai d'indiquer que le point essentiel et original de la méthode de M. Borel consiste à prendre comme base de la Mécanique statistique *l'indétermination des données*, tandis que, dans les théories qu'on développe habituellement d'après Gibbs et Boltzmann, on suppose généralement les données initiales rigoureusement définies. Cette incertitude dans les données, qui répond bien à ce qui se rencontre dans les problèmes physiques (une grandeur physique n'est jamais *exactement* connue), donne un sens bien plus concret et plus précis à la notion même de probabilité. Ainsi acquièrent une clarté plus grande les principes fondamentaux de la théorie cinétique des gaz et de la théorie de l'irréversibilité.

En terminant, je tiens à dire un mot de la Note sur *les Théories moléculaires et les Mathématiques*, qui termine l'Ouvrage. Tandis que la Physique mathématique classique remplace la matière composée de molécules par de la matière continue, c'est-à-dire tandis qu'elle remplace le fini très grand par le continu, M. Borel pose, dans cette Note, les bases de ce qu'on pourrait appeler la Physique mathématique du discontinu, qui consiste à remplacer le fini très grand par l'infini énumérable, ce qui paraît plus en harmonie avec la conception moléculaire. Transportant la même idée dans le domaine d'une variable complexe, l'Auteur définit des fonctions admettant comme pôles tous les points d'un ensemble dense, infini mais énumérable, tel par exemple que l'ensemble des points à coordonnées rationnelles contenus dans un carré : ces fonctions sont *monogènes* au sens de Cauchy, c'est-à-dire que, même dans la région où les singularités sont denses, il existe des points où se croisent une infinité de droites suivant lesquelles la dérivée existe et a une valeur unique bien déterminée; mais elles ne sont pas *analytiques* au sens de Weierstrass, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas, dans la région des singularités, développables en série de Taylor. Je me borne seulement à mentionner ces fonctions monogènes non analytiques, parce qu'un Livre de M. Borel sur ce sujet va paraître prochainement.

H. Vergne.

HEATH (Sir Thomas L.). — ARCHIMEDES' Werke. Mit modernen Bezeichnungen herausgegeben und mit einer Einleitung versehen. Deutsch von Fritz Kliem. 1 vol. grand in-8, XII-477 pages. Berlin, O. Häring, 1914.

En 1897, Sir Thomas Heath avait donné une traduction anglaise des œuvres alors connues d'Archimède; c'était une traduction *complète*, en ce sens que Sir Thomas Heath ne s'était pas borné à faire passer en anglais le texte grec du grand Géomètre; il avait également, pour représenter les opérations mathématiques, substitué les notations modernes aux notations anciennes, afin que le lecteur pût, sans aucune peine, suivre les démonstrations.

La traduction de Sir Thomas Heath était précédée d'une Introduction étendue et du plus grand intérêt.

Un premier chapitre de cette Introduction retraçait ce que l'on connaît de la vie d'Archimède. Un second examinait les divers problèmes que pose l'étude philologique et critique du Syracusain : Manuscrits conservés jusqu'à ce jour, ordre de succession des divers écrits, dialecte de leur primitive rédaction, traductions, écrits perdus, etc. Sir Heath montrait alors, dans un troisième chapitre, l'état des Mathématiques grecques au moment où parut Archimède, et mettait ainsi en évidence les liens qui unissent celui-ci à ses devanciers. Puis quatre chapitres étaient consacrés à la méthode mathématique d'Archimède. Le premier avait pour objet l'arithmétique; le second, le problème dit des *inclinations* (νεύσεις); le troisième, l'équation du troisième degré; le quatrième, enfin, étudiait les intégrations que, par la méthode d'exhaustion, Archimède était parvenu à effectuer.

En 1906, survint la découverte, faite par Heiberg, du manuscrit qui contenait, outre le texte grec du traité *Des corps flottants*, le traité, jusqu'alors inconnu, *De la méthode, à Ératosthène*. Par suite de cette découverte capitale, l'œuvre de Sir Thomas Heath devenait incomplète; aussi, en 1912, la dota-t-il d'un supplément, où il donnait la version anglaise du traité *De la méthode*, et une étude sur ce traité.

La traduction, ou mieux, l'édition allemande de l'œuvre de Sir Thomas Heath, que M. Fritz Kliem vient de donner, fond, avec l'édition anglaise de 1897, le supplément publié en 1912;

quelques additions achèvent de la mettre entièrement au point et au courant. C'est dire qu'elle sera précieuse à tous les curieux de Science antique.

Sir Thomas Heath nous permettra-t-il d'exprimer un regret? Son Introduction, qui analyse si complètement et avec tant de finesse les œuvres purement mathématiques d'Archimède, est muette au sujet des découvertes faites par ce géomètre dans le domaine de la Mécanique; ni les recherches sur les centres de gravité, ni l'immortel traité sur l'équilibre des fluides et des corps flottants n'ont trouvé accueil dans cette Introduction. C'est, assurément, une fâcheuse lacune; si, dans quelque nouvelle édition, Sir Heath avait la très heureuse pensée de la combler, nous aurions désormais, de sa main, le portrait le plus ressemblant et le plus détaillé qui ait été peint, jusqu'ici, du génie d'Archimède.

PIERRE DUHEM.

---

CHAPELON (JACQUES). — SUR LES RELATIONS ENTRE LES NOMBRES DES CLASSES DE FORMES QUADRATIQUES BINAIRES DE DÉTERMINANT NÉGATIF. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences mathématiques*, soutenue le 6 juin 1914, sous la présidence de M. Émile PICARD. 1 vol. in-4°, v-197 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1914.

Le Mémoire de M. Chapelon est consacré à l'établissement de formules concernant des fonctions numériques qui se rattachent à la théorie des formes quadratiques définies et positives. Ces fonctions, très importantes dans la théorie des nombres, représentent le nombre de classes de formes quadratiques, propres ou impropres, ayant un discriminant donné.

Jacobi, le premier, a introduit la théorie des fonctions elliptiques dans la théorie des nombres, au moins en ce qui concerne les questions de représentation d'un entier par certaines formes quaternaires.

La méthode au premier abord paraît artificielle; elle consiste comme on sait, à développer des combinaisons de fonctions $\Theta$, et à égaler les coefficients d'une même puissance de $q$. Vinrent ensuite, par des voies différentes, Kronecker, Liouville et Hermite. Plus récemmment de nombreux géomètres s'occupèrent des rela-

tions arithmétiques curieuses que donne ainsi la théorie des fonctions elliptiques. En particulier, M. Humbert, dans ces dernières années, a été le plus loin dans l'étude de ces relations.

Dans son travail, qui témoigne d'une érudition étendue, M. Chapelon s'est attaché surtout à la méthode de Hermite, s'efforçant de montrer sa souplesse et sa très grande fécondité. Il est impossible, sans entrer dans de longs détails, d'analyser un travail de cette nature. Un des résultats principaux concerne la recherche des sommes

$$\Sigma F(N - \sigma^2) \quad \text{et} \quad \Sigma F_1(N - \sigma^2);$$

$F(n)$ et $F_1(n)$ désigne le nombre des classes de formes quadratiques (propres et impropres) pour le discriminant $-n$. Si les nombres $\sigma$ sont tous congrus (mod $p$), on dira que la somme correspondante est une somme d'ordre $p$; la Thèse de M. Chapelon a pour objet les sommes d'ordre *cinq*. Les formules définitives ne dépendent que de fonctions des diviseurs de N et du nombre des représentations de N par quatre carrés dont un, deux ou trois sont multiples de *cinq*.

L'obtention de ces résultats a demandé un effort de calcul considérable. Sans doute, M. Chapelon a utilisé des méthodes antérieures, s'inspirant, par exemple, du travail analogue de M. Humbert pour les sommes du troisième ordre. Des difficultés sérieuses se présentaient toutefois dans les interprétations qui ont conduit l'Auteur à mettre en évidence les fonctions arithmétiques assez cachées dont dépend la solution; il a su montrer dans ces discussions délicates une réelle originalité.

*La R.*

---

GARAVITO A. (Julio). — Aberración y Refracción. Explicación de algunos fenómenos ópticos que se relacionan con la Astronomia. (*Critica de la Hipótesis ondulatoria.*) Une brochure in-8, 1 planche, 42 pages. Bogota, Talleres del Estado Mayor General, 1913.

L'*aberration annuelle* des étoiles et ce fait que la *réfraction astronomique* est indépendante de l'angle que fait la vitesse de la lumière avec celle de la Terre n'ont pu s'expliquer en demeurant d'accord avec les théories optiques.

M. Garavito s'est proposé de rechercher les conditions auxquelles doit satisfaire la propagation de la lumière pour que ces phénomènes se vérifient. Il est parvenu aux résultats suivants :

Pour que le phénomène de l'aberration annuelle se vérifie, il suffit que la lumière se propage dans l'espace avec une vitesse supérieure à celle de la Terre, sans que la façon dont la propagation s'effectue influe en rien.

Le fait que la réfraction est indépendante de l'angle des vitesses de la Terre et de la lumière exige que la vitesse de la lumière, si on la considère comme une force d'énergie qui agit conformément aux lois de la Mécanique, remplisse les conditions suivantes :

*a*. La propagation de la lumière à travers des milieux diaphanes doit s'effectuer par communication des masses entre elles sans qu'il y ait, comme dans l'hypothèse de l'émission, transport de matière.

*b*. Dans chaque milieu diaphane isotrope, elle doit se propager en ligne droite, et avec une vitesse constante, dépendant des conditions physiques du milieu.

*c*. Au dedans de l'atmosphère, tout au moins près de la surface terrestre, elle doit se propager *comme* si l'atmosphère entraînait totalement le véhicule conducteur de la lumière.

On comprend très bien que l'hypothèse de l'émission explique l'aberration annuelle et soit impuissante à l'égard du phénomène que présente la réfraction.

Quant aux hypothèses élastique et électromagnétique, elles remplissent parfaitement toutes les conditions indiquées. L'équation de second ordre, à laquelle, selon les théories de M. Garavito, obéit la propagation, n'admet pas de doute puisqu'on y arrive aussi, directement, sans autre aide que les faits expérimentaux. Or, pour quel motif l'hypothèse ondulatoire a-t-elle été impuissante à expliquer les phénomènes indiqués ?

L'Auteur l'explique ainsi : l'erreur ne se trouve pas dans l'équation différentielle, mais dans l'interprétation qu'on a toujours donnée des solutions de cette équation. Le plan supposé de l'onde a été suggéré par la conception hypothétique de Huygens, selon laquelle l'onde est le tout dans la propagation, tandis

que le rayon lumineux n'est qu'un simple lieu géométrique, conception erronée, car c'est précisément le contraire qui est vrai. La solution de M. Garavito remplacerait la solution ondulatoire dans tous les développements qui se rapportent à la théorie de la lumière; toutefois, l'Auteur avertit que la solution ondulatoire ne présente de graves inconvénients que lorqu'il s'agit du passage de la lumière d'un milieu à un autre en mouvement relatif.

Il n'a pas exposé l'investigation conduisant à la connaissance des conditions qu'exige la propagation de la lumière afin que les phénomènes optiques qui ont trait au mouvement de la Terre se vérifient, parce que, dit-il, l'exposition serait trop laborieuse. Il a préféré procéder à rebours et expliquer les phénomènes indiqués en supposant que la lumière obéisse aux conditions exprimées.

Il a fait un premier essai en considérant la lumière comme une énergie qui se transmet par des chocs successifs, afin de rendre concrètes les idées. Cet essai se trouve dans une Brochure intitulée : *Théorie de l'Aberration*, 1912.

Aujourd'hui, il a voulu présenter la question sans l'aide d'aucune hypothèse relative à la nature spéciale de la lumière.

---

SALOMON (C.). — Étoiles magiques a 8, 16 et 20 branches (24, 64 et 100 points) et rosaces hypermagiques. *Questions inédites de Magie arithmétique polygonale.* 1 fasc. gr-in 8, 21 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

On obtient une figure magique contenant les $ab$ premiers nombres entiers en superposant deux figures magiques identiques (abaques) dont l'une contient $b$ fois les $a$ premiers nombres, et l'autre $a$ fois les nombres $0, a, 2a, 3a, \ldots, (b-1)a$ : il suffit de s'arranger de façon qu'en ajoutant ensemble les éléments semblablement disposés sur les deux abaques, on obtienne, sans omission ni répétition, les $ab$ premiers nombres.

Ce procédé, bien connu pour la formation des carrés magiques, M. Salomon l'utilise à la construction de figures magiques variées qu'il appelle *étoiles* et *rosaces;* ces questions de Magie arithmétique ne manqueront pas d'intéresser les amateurs de récréations mathématiques.

H. Vergne.

---

1re Partie

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

---

RIESZ (Frédéric). — Les Systèmes d'Équations linéaires a une infinité d'inconnues. (*Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions* publiées sous la direction de M. Émile Borel.) 1 vol. gr. in-8. VI-182 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

On peut poursuivre dans deux directions différentes l'extension à une infinité de variables du concept de *fonction de plusieurs variables*. On peut envisager, avec M. Volterra, des fonctions d'une infinité *continue* de variables (fonctions d'une ligne par exemple), ou considérer des fonctions d'une infinité *dénombrable* de variables. La Théorie des fonctions de ligne doit débuter par l'étude des équations intégrales linéaires; d'une façon tout à fait analogue, la première étape de la Théorie des fonctions d'une infinité dénombrable de variables doit être l'étude des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues de type

$$(1) \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_{k}\, a_{ik}\, x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots),$$

les inconnues étant $x_1, x_2, \ldots, x_3, \ldots$. Les deux Théories présentent d'ailleurs des affinités profondes, sur lesquelles nous aurons à revenir, et le développement considérable qu'a pris en ces dernières années la première de ces Théories a entraîné nécessairement un développement correspondant de la seconde : il n'en est que plus surprenant de constater que, tandis que de nombreux et excellents Traités ont été consacrés à la Théorie des équations intégrales, le Livre de M. Riesz est la première exposition d'ensemble de la Théorie des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. La lacune qu'il vient ainsi combler, et d'une façon excellente, était très importante : les directions très diverses dans lesquelles a été développée la Théorie des systèmes linéaires à une infinité d'inconnues en rendaient une synthèse tout à fait nécessaire.

Le premier Chapitre est surtout historique. L'Auteur y indique

d'abord comment c'est Fourier qui rencontra et résolut le premier des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues dans des questions telles que la suivante : développer en série trigonométrique une fonction impaire donnée par sa série de Taylor. On est conduit, pour déterminer les coefficients de la série trigonométrique, à un système tel que (1); Fourier le résout et, après quelques transformations, retombe sur les valeurs classiques des coefficients. Les calculs de Fourier n'ont aucune rigueur, mais la méthode de résolution qu'il emploie, convenablement précisée, joue un rôle dans la théorie actuelle : il limite le système aux $k$ premières équations et aux $k$ premières inconnues, le résout et admet que la solution ainsi obtenue tend vers une solution du système infini lorsque $k$ augmente indéfiniment. C'est le *principe des réduites*. Tout de suite après avoir énoncé ce principe, M. Riesz montre sur un exemple emprunté à la Théorie des fonctions comment il peut ne pas être applicable. Il s'occupe ensuite des recherches de Fürstenau (1860) et de Kötteritzsch (1870), sans intérêt au point de vue de la validité du principe des réduites. Il faut arriver jusqu'en 1885 pour trouver, dans deux Notes de Poincaré (*Bull. de la Société math.*), la première étude critique du principe des réduites. Dans son travail, Poincaré a véritablement fondé la théorie moderne des systèmes linéaires à une infinité d'inconnues. Poincaré se place à deux points de vue bien différents : il traite les systèmes en question par des méthodes de la Théorie des fonctions de variable complexe, ou par les *déterminants infinis* dont il développe à ce propos la théorie. C'est exclusivement le premier de ces points de vue qu'expose M. Riesz à la fin du Chapitre I. Il donne d'abord l'élégante méthode de M. Appell pour développer la fonction elliptique $\frac{\theta_1}{\theta}$ en série trigonométrique, méthode à propos de laquelle Poincaré fut conduit à s'occuper des systèmes à une infinité d'inconnues. Cette méthode conduit M. Appell au système

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k^i x_k = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

les données $a_k$ allant de 0 à $+\infty$ lorsque $k$ va de $-\infty$ à $+\infty$. M. Riesz indique seulement l'étude faite par Poincaré du système

un peu plus simple

$$\sum_{0}^{+\infty}{}_{k}\, a'_k x_k = 0.$$

Il montre enfin comment M. Borel appliqua à la résolution de systèmes analogues des méthodes procédant, elles aussi, de la Théorie des fonctions.

Le second Chapitre est consacré à l'étude des déterminants infinis. Il débute par un court historique : les déterminants infinis furent introduits pour la première fois par Hill dans un Mémoire sur le mouvement du périgée de la Lune; la légitimité de leur emploi fut démontrée, les principes de leur théorie furent établis par Poincaré, comme nous l'avons déjà dit. Les développements ultérieurs de cette théorie sont dus à M. Helge von Koch. M. Riesz s'occupe d'abord des déterminants nommés par M. von Koch *déterminants normaux;* leur considération (Poincaré) repose sur la remarque que tous les termes du déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 + a_{nn} \end{vmatrix}$$

figurent en module dans le produit

$$\pi_n = \prod_{k=1}^{n} \left( 1 + \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \right).$$

On en conclut aisément que tout tableau

$$\begin{matrix} 1 + a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & 1 + a_{22} & a_{23} & \dots \\ \dots & \dots\dots & a_{23} & \dots \end{matrix}$$

tel que la série $\sum_{i,k} |a_{ik}|$ converge définit un déterminant infini, dit *déterminant normal*, dont on peut calculer la valeur en le réduisant à ses $n$ premières lignes et à ses $n$ premières colonnes et en faisant tendre $n$ vers l'infini. Les propriétés des déterminants finis s'étendent aux déterminants normaux et l'étude d'un système infini

$$(2) \qquad \begin{cases} (1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \dots = c_1, \\ a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \dots = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

dont le déterminant est normal, les seconds membres $c_i$ étant inférieurs à une borne finie, dont on recherche seulement les solutions inférieures elles aussi à une borne finie, est aussi simple que l'étude d'un système fini : si le déterminant n'est pas nul, il y a une solution et une seule donnée par les formules bien connues pour les systèmes finis (le principe des réduites est alors valable); si le déterminant est nul, l'un de ses mineurs d'ordre fini n'est pas nul et la théorie se développe, ici encore, tout à fait parallèlement à celle des systèmes finis. La fin du Chapitre est consacrée à l'étude, d'après M. H. von Koch, des déterminants absolument convergents. C'est une notion plus générale que celle de déterminant normal, notion dont l'introduction procède de la remarque suivante : le produit $\Pi_n$ qui a servi à majorer $\Delta_n$ ne cessera pas de le majorer si l'on y conserve seulement les termes figurant dans le développement de $\Delta_n$. On est ainsi conduit à considérer la série formée par tous les termes figurant dans un $\Delta_n$ d'indice quelconque; si elle converge absolument, le déterminant sera dit absolument convergent. Ceci posé, la théorie des systèmes finis s'étend aux systèmes infinis toutes les fois que tous les déterminants intervenant dans le calcul sont absolument convergents. M. Riesz donne les critères les plus simples de convergence absolue d'un déterminant; il dit enfin quelques mots du cas où les $a_{ik}$ sont des fonctions entières d'un paramètre $\lambda$ : la solution est alors une fonction méromorphe de ce paramètre.

M. Riesz aborde alors le sujet principal de son Livre, l'étude des méthodes de Hilbert et Schmidt. Avant d'analyser cette étude, nous devons préciser un caractère des systèmes linéaires infinis : il faut y spécifier la nature des solutions admises $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ et cette nature joue un rôle essentiel dans la résolution du système. Ainsi, pour observer, quand le déterminant est normal, le parallélisme déjà indiqué avec la théorie d'un système fini, il fallait nommer solution du système (1) toute suite $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *bornée* le vérifiant. Or, dans bien des applications, la solution cherchée

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

est formée par les coefficients d'un développement de type de Fourier ou analogue, et est soumise par conséquent à la seule condition que la série $\Sigma |x_k|^2$ converge : c'est ce cas qu'ont étudié M. Hilbert et M. Schmidt.

Dans le Chapitre III, M. Riesz donne d'abord un magistral exposé d'une généralisation de la méthode de Schmidt. Le problème traité est le suivant : trouver une solution $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ du système

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

telle que la série $\Sigma |x_k|^p$ converge $(p > 1)$; les hypothèses faites sur les données sont bien naturelles, on admet simplement que la convergence de $\Sigma |x_k|^p$ entraîne celle des premiers membres de (1) $\left[\text{ceci entraîne (Landau) la convergence des séries } \Sigma_k |a_{ik}|^{\frac{p}{p-1}}\right]$. L'Auteur donne d'abord une condition nécessaire pour l'existence d'une solution, puis il prouve, d'abord pour un système à un nombre fini d'équations, puis, grâce à un théorème sur les limites de suites, pour les systèmes à une infinité d'équations, que la condition est suffisante : la condition remplie entraîne, en effet, l'existence d'un maximum d'une certaine expression, maximum qui se trouve être réalisé justement par une solution du système. J'en ai dit assez pour faire comprendre que la Méthode de M. Riesz démontre l'existence de la solution, mais ne constitue pas, au moins sous son état actuel, une méthode de calcul effectif de la solution. Les rapides indications qu'il donne sur le cas d'un système homogène présentent, à un degré plus grand encore, le même caractère. Mais sa méthode se prête bien au calcul effectif dans le cas le plus important, $p = 2$. On retrouve alors les résultats démontrés par M. Schmidt par l'*orthogonalisation*, méthode sur laquelle l'Auteur donne quelques indications.

C'est toujours au cas de $p = 2$ que M. Riesz se limite dans la suite. Les Chapitres IV et V sont consacrés surtout aux recherches de M. Hilbert; les systèmes qui y sont envisagés n'ont plus la généralité de ceux qui étaient considérés au Chapitre III, mais on peut pousser plus loin leur étude.

Dans le Chapitre IV, tout d'abord, M. Riesz étudie les substitutions linéaires de l'espace hilbertien (un point de cet espace est défini par des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ telles que la série $\Sigma |x_n|^2$ converge). De leur définition abstraite (correspondance distributive et continue, il s'élève à la définition analytique par

certains systèmes linéaires infinis

$$x'_i = \Sigma_k a_{ik} x_k.$$

Le critère pour l'inversion d'une telle substitution, donné par Toeplitz, puis Hilb par des méthodes dont M. Riesz donne un aperçu, est alors une conséquence des résultats donnés dans le Chapitre III. Dans le cas où ce critère ne s'applique pas, la théorie des substitutions infinies peut différer essentiellement, comme l'indique l'Auteur, de celles des substitutions finies : il étudie un cas important où les propriétés des substitutions finies s'étendent aux substitutions infinies, c'est celui où la substitution est de la forme $E + A$, $E$ étant la substitution unité et $A$ une substitution du type de celles que l'Auteur nomme complètement continues. Si l'on introduit dans l'équation précédente un paramètre $\lambda$, l'écrivant $E - \lambda A$, la substitution réciproque $(E - \lambda A)^{-1}$ est fonction méromorphe de $\lambda$. C'est à une étude de cette substitution réciproque, étude toute parallèle à celle que l'on rencontre dans la théorie des équations intégrales, qu'est consacrée la fin du Chapitre IV.

Poursuivant la particularisation qui lui permet d'entrer davantage dans le détail, M. Riesz se limite, dans le Chapitre V, à l'étude des substitutions représentées par des tableaux de nombres $a_{ik}$ réels et tels que

$$a_{ik} = a_{ki},$$

tableaux que l'on peut associer à une forme quadratique à infinis variables (Hilbert). Je dois me limiter ici à de brèves indications sur le but de ce Chapitre et le principal instrument analytique qui y est employé : le but est l'étude du spectre de la réciproque $(\lambda E - A)^{-1}$, l'instrument analytique est une correspondance entre les fonctions d'une variable et les fonctions symboliques de la forme quadratique correspondant à la substitution $A$; cette correspondance ressemble beaucoup à celle qu'établit M. Volterra, dans la théorie de la permutabilité, entre les fonctions analytiques et des fonctions permutables avec une fonction donnée, mais elle ne doit pas limiter son champ aux fonctions analytiques, elle doit au contraire s'appliquer à certaines fonctions discontinues.

Le Chapitre VI et dernier est consacré à diverses applications de la théorie précédente. C'est d'abord son application (H. von Koch)

à l'étude de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n x}{dz^n} + P_1(z)\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} + \ldots + P_n(z)u = 0,$$

les coefficients $P_i(z)$ ayant l'origine pour point singulier essentiel; lorsqu'on cherche les intégrales de forme

$$u(z) = z^\rho \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \alpha_k z^k,$$

on obtient, pour déterminer les $\alpha_k$, un système d'équations linéaires qui s'étudie fort bien par la méthode des déterminants infinis. M. Riesz développe ensuite les relations, auxquelles nous avons déjà fait allusion, entre la théorie des systèmes linéaires à une infinité d'inconnues et la théorie des équations intégrales linéaires; une équation intégrale linéaire

$$\varphi(s) - \int_a^b H(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$

est complètement équivalente à un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues

$$\varphi_i - \sum_1^\infty{}_k h_{ik}\varphi_k = f_k;$$

il suffit, pour établir cette équivalence, de remplacer l'inconnue $\varphi(s)$ par les coefficients $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k, \ldots$ de son développement suivant un système de fonctions orthogonales; ces coefficients satisfont à la condition, posée aux Chapitres IV et V, que $\Sigma|\varphi_k|^2$ convergent et déterminent inversement une fonction $\varphi(s)$. Enfin, la dernière application des théories précédentes est l'étude, d'après M. Toeplitz, des substitutions dites *Laurentiennes*, dont les coefficients $a_{ik}$ sont déduits d'une suite indéfinie dans les deux sens de quantités $\alpha_k$, en posant

$$a_{ik} = \alpha_{k-i};$$

cette étude permet la détermination des deux bornes d'une fonction donnée par son développement de Fourier; elle se relie, comme le montre en terminant M. Riesz, aux recherches de MM. Landau et Carathéodory sur le théorème de M. Picard.

Je crois avoir mis suffisamment en relief la grande diversité des points de vue sous lesquels a été envisagée la théorie des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. C'était précisément la difficulté de la tâche qu'avait assumée M. Riesz que de mettre en lumière les liens existant entre ces différents points de vue : qu'il ait parfaitement réussi, avec l'autorité que lui donnent ses recherches sur ce sujet et des sujets voisins, c'est ce dont se rendront compte tous ceux qui liront son Livre. Il a su être original dans son exposition et faire de matériaux divers une construction harmonieuse. C'est pourquoi il est permis de penser que son Ouvrage aura la plus heureuse influence sur le développement d'une théorie appelée à jouer un grand rôle dans l'Analyse de l'avenir.

JOSEPH PÉRÈS.

---

FESSENKOFF (B.). — LA LUMIÈRE ZODIACALE. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris pour obtenir le grade de Docteur de l'Université*, soutenue le 25 avril 1914, sous la présidence de M. PAUL APPELL. 1 vol. in-4°. v-175 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914.

M. B. Fessenkoff, licencié de l'Université de Kharkoff, s'est familiarisé avec la pratique de l'Astronomie dans les Observatoires de Tachkent et de Paris, où il a été attaché comme stagiaire et où il s'est fait connaître comme un observateur habile et consciencieux.

Le travail que M. Fessenkoff a présenté à l'Université de Paris a pour objet l'exposé et la discussion des opinions très diverses émises au sujet de la lumière zodiacale. Il éclaire la question par des données nouvelles, fruit d'observations patientes et de longs calculs.

La rédaction comprend trois parties :

1° Revue historique des apparences notées, des renseignements fournis par le polariscope, le spectroscope, le thermomètre, la photographie ;

2° Nouvelle étude photométrique de la lumière zodiacale. Discussion, à l'aide des résultats donnés par cette étude, de la plus importante série d'observations anciennes ;

3° Examen des principales hypothèses faites sur la nature de la

lumière zodiacale. Tentative pour y assigner la distribution des densités, la forme générale, la valeur de la masse totale.

Le nombre des publications en langues diverses que M. Fessenkoff s'est vu obligé de consulter et d'analyser est très considérable.

Depuis que J.-D. Cassini, en 1683, a signalé la lumière zodiacale comme une apparence habituelle et normale, depuis que A. de Humboldt, en 1803, a fait connaître le Gegenschein, lueur nocturne directement opposée au Soleil, ce sujet, qui peut être abordé sans instruments ni préparatifs spéciaux, a tenté nombre d'observateurs.

La variété des descriptions pourrait faire croire qu'il s'agit d'un objet essentiellement changeant. Mais si l'on accorde, comme on doit le faire, une attention spéciale aux travaux des observateurs les plus persévérants et les mieux préparés, on arrive au contraire à se convaincre qu'il s'agit d'un objet stable et à reconnaître l'intervention de sources de variation apparente.

M. Fessenkoff évalue judicieusement l'influence que ces causes d'erreur ont pu acquérir pour divers observateurs. On est ainsi amené à trouver explicables des divergences à première vue inadmissibles. Certaines descriptions sembleraient imposer pour la lumière zodiacale une origine locale et des variations rapides. L'opinion contraire (origine cosmique et variations lentes) est beaucoup plus plausible et n'a point contre elle de faits avérés.

Jusqu'à ce jour il n'a pas été constitué de série photographique homogène embrassant plusieurs années, et il n'a pas été fait d'observations simultanées et prolongées dans les deux hémisphères.

M. Fessenkoff fait voir que ces deux progrès sont maintenant possibles et qu'on doit les réaliser avant de vouloir dire si la matière zodiacale varie avec le temps et si elle est inégalement répartie des deux côtés de l'écliptique.

Les changements considérables signalés dans l'étendue et l'éclat du Gegenschein sont aussi rattachés, avec beaucoup de vraisemblance, à l'influence de la saison.

Désireux d'apporter une contribution personnelle au sujet, M. Fessenkoff a remarqué que les comparaisons photométriques faites entre diverses parties de la lumière zodiacale n'ont eu jusqu'à présent que le caractère d'estimations assez grossières. Pour com-

bler cette lacune, l'auteur a fait construire un photomètre spécialement adapté aux surfaces de faible éclat. Cet appareil, que j'ai eu l'occasion d'examiner, est fondé sur un principe rationnel, mais d'une réalisation difficile. Aussi l'auteur conclut sagement qu'on ne devra pas supposer la construction parfaite, et qu'il faudra former des tables de correction empiriques plutôt que de traiter les intensités lumineuses comme proportionnelles aux lectures de l'instrument.

Ainsi armé, M. Fessenkoff a exécuté, de février à mai 1913, trois séries d'observations, à Meudon, à Paira Cava (Alpes-Maritimes) et à Nice. Pour effectuer la correction très importante exigée par l'absorption atmosphérique, on s'est servi des formules du Dr G. Müller, applicables à des stations d'altitude diverse.

Cette correction faite, ainsi que celles qui tiennent à l'instrument, on arrive à exprimer l'intensité lumineuse en un point de la lumière zodiacale comme fonction de la latitude et de la longitude comptée à partir de la direction du Soleil.

On doit considérer comme possible que cette intensité lumineuse soit aussi fonction du temps. Les observations de M. Fessenkoff n'embrassent pas un intervalle assez long pour trancher la question à ce point de vue. Aussi l'auteur s'est-il décidé à soumettre à sa méthode de réduction, au prix d'un labeur considérable, la plus importante des séries anciennes, celle que Heis et Weber ont constituée de 1847 à 1875. On est ainsi fondé à conclure que la lumière zodiacale est demeurée stable depuis cette époque, qu'elle est toujours couchée sur l'écliptique, avec une légère tendance à s'en écarter vers le Nord. Les observateurs qui ont cru trouver à la lumière zodiacale une inclinaison marquée sur l'écliptique n'avaient pas tenu un compte suffisant de l'influence, variable avec la saison, de l'absorption atmosphérique.

Dans la troisième partie de son travail, M. Fessenkoff examine successivement la théorie de Serpieri, qui assimile la lumière zodiacale aux aurores boréales, celle de Houzeau, qui en fait une queue cométaire projetée par la Terre à l'opposé du Soleil, celle de Wegener qui la considère comme un crépuscule particulier aux plus hautes régions de l'atmosphère. Toutes ces hypothèses paraissent entraîner des conséquences nettement contraires aux faits observés.

D'autres auteurs (par exemple Jones et Barnard) disposent la lumière zodiacale suivant un anneau centré sur le globe terrestre. Il en résulterait, contrairement aux faits constatés, que la luminosité doit y croître avec la distance au Soleil. Le calcul un peu pénible auquel M. Fessenkoff se livre pour l'établir peut, je crois, être évité si l'on admet avec l'auteur que la diffusion de la lumière est régie par la loi d'Euler.

On échappe à ces difficultés en considérant, avec Laplace, la matière zodiacale comme un anneau environnant le Soleil. M. Fessenkoff pense que cette matière est disséminée en petits fragments analogues à ceux qui se montrent à nous sous la forme d'étoiles filantes et provenant de la dissolution des comètes.

La répartition de l'éclat apparent dans la lumière zodiacale est liée à la distribution de la densité, considérée comme fonction de la distance au Soleil. Cette liaison, comme il est facile de le prévoir, est compliquée et dépend du choix qui aura été fait pour la loi de diffusion de la lumière. Elle s'exprime par une équation intégrale et ne laisse guère espérer qu'une solution empirique.

M. Fessenkoff trouve qu'avec la loi de diffusion d'Euler et l'hypothèse d'une densité uniforme, l'éclat apparent ne peut pas être bien représenté. Si, au contraire, on admet que la densité varie en raison inverse de la distance au Soleil, l'éclat apparent est assez bien expliqué, tant avec la loi d'Euler qu'avec celles de Lambert ou de Lommel-Seeliger.

Cette dernière loi de densité étant acceptée, l'éclat apparent fournit une indication sur la forme de l'anneau. La surface analytique qui se présente *a priori* comme la limite la plus vraisemblable est un ellipsoïde de révolution. Par la voie des quadratures mécaniques, M. Fessenkoff montre que le rapport des axes de ces ellipsoïdes doit être pris aux environs de 12,5 si l'on veut représenter le mieux possible l'éclat apparent.

Enfin, si l'on conserve la même loi des densités, une évaluation de la masse totale de la lumière zodiacale devient possible. Il suffit d'emprunter à l'observation des étoiles filantes une valeur probable de leur masse moyenne et du nombre de ces corps errants qui existent dans une unité de volume à la distance qui nous sépare du Soleil. Sur ces bases un peu incertaines, l'auteur établit par un calcul correctement conduit que la masse totale est extrêmement

faible et sans doute incapable d'agir sensiblement par son attraction newtonienne sur le mouvement des planètes.

M. Fessenkoff termine par une revue intéressante des hypothèses émises sur la nature du Gegenschein, mais estime qu'il serait prématuré de manifester une préférence.

Il me semble que celles des conclusions de M. Fessenkoff qui entraînent la conviction sont contenues dans la partie critique de son travail. Il a su écarter, avec modération, mais avec force, des hypothèses mal fondées. Les résultats numériques proposés par lui en ce qui concerne la loi des densités, la figure, la masse, ne sauraient inspirer beaucoup de confiance, parce qu'ils dépendent de données très peu précises. Mais la méthode d'observation dont l'auteur a donné l'exemple serait certainement instructive si, avec une vue désormais plus claire du but à atteindre, on l'appliquait pendant plusieurs années, sous le ciel transparent de stations tropicales choisies dans les deux hémisphères.

En résumé, l'auteur a fait une étude approfondie, avec une bibliographie détaillée de toutes les publications antérieures. Il a critiqué les anciennes observations et les anciennes théories. Il a fait des observations nouvelles avec un astrophotomètre de son invention. Il a joint à ses observations une théorie mathématique de la distribution des poussières cosmiques. M. Fessenkoff a exposé ces différentes parties de son travail avec une intelligente précision.

*La R.*

---

С. Г. ПЕТРОВИЧЪ. — Курсъ теоретическоiи механики. часть III : динамика системы. — PETROVITCH (S.). — Cours de Mécanique rationnelle. Tome III : *Dynamique des systèmes.* 1 vol. gr. in-8, VI-339 pages. Pétrograd, Typographie du Ministère des Ponts et Chaussées, 1913.

Ce Tome III est la suite du Cours de M. Petrovitch à l'Académie d'Artillerie Michel. L'analyse des deux premiers Tomes a été faite dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* en juillet 1913. Ce Tome contient l'exposé de la Dynamique des systèmes matériels.

Les deux premiers Chapitres sont consacrés à la géométrie des

masses. Dans le Chapitre I est établie la notion du centre d'inertie et sont exposés les théorèmes fondamentaux pour la recherche de ce centre. En expliquant cette notion par les formules ordinaires, l'Auteur n'a pas exposé le sens géométrique du centre d'inertie, comme point pour lequel une certaine somme géométrique devient nulle, propriété qui peut permettre de simplifier certaines démonstrations. Dans le même Chapitre sont exposés les théorèmes de Guldin. La théorie des moments d'inertie est traitée dans le Chapitre II.

Plus loin vient la Dynamique des systèmes. Dans le Chapitre III, on trouve la définition du système matériel et l'étude des liaisons cinématiques. L'Auteur y introduit la notion des systèmes conservatifs comme étant ceux dont les liaisons finies et différentielles ne dépendent pas explicitement du temps. Ensuite, en mettant l'intégrale des forces vives dans un Chapitre suivant, il ajoute la condition d'homogénéité des liaisons différentielles. Il faut faire observer qu'il y a là une différence avec la terminologie habituelle; sans quoi le lecteur pourrait ne pas remarquer que le système peut être conservatif au sens ordinaire, c'est-à-dire que l'énergie totale peut être constante, quoiqu'il ne soit pas conservatif au sens de M. Petrovitch, parce que les liaisons différentielles peuvent dépendre du temps explicitement. Dans le même Chapitre, l'Auteur signale le cas où les liaisons différentielles se présentent sous forme de différentielles exactes ou s'y transforment après multiplication par un facteur intégrant : le système est alors holonome; il y aurait lieu, d'ailleurs, d'observer qu'il peut l'être aussi si l'on arrive aux différentielles totales par des combinaisons des liaisons. Le Chapitre IV est consacré aux équations du mouvement avec le multiplicateur des liaisons. Dans le Chapitre V se trouvent les théorèmes des quantités de mouvement, des moments des quantités de mouvement et des forces vives, avec les intégrales correspondantes. Le Chapitre VI contient les équations de Lagrange sans multiplicateurs. Les équations du mouvement des systèmes non holonomes y sont exposées également; malheureusement l'Auteur ne donne aucun exemple pour illustrer la théorie. Le Chapitre VI comprend la théorie des équations canoniques de Hamilton. Puis viennent la méthode de Jacobi et le théorème des crochets de Poisson.

Dans le Chapitre VIII, on trouve la Statique du système de

points matériels. Au début de ce Chapitre, M. Petrovitch dit, par inadvertance, que, pour l'équilibre, *il faut* que les forces appliquées ne dépendent pas explicitement du temps.

Le Chapitre IX renferme la théorie du choc. Et enfin, dans le dernier Chapitre, sont exposés, avec des détails, les principes généraux de la Mécanique.

A. Bilimovitch.

---

HOBSON (E.-W.). — John Napier and the Invention of Logarithms, 1614. A Lecture. 1 vol. petit in-8 de 48 pages, avec un portrait de John Napier et un fac-simile de sa Table. Cambridge, at the University Press, 1914.

Au Tricentenaire de l'invention des Logarithmes, célébré à Edimbourg en juillet 1914 (voir *Bull. des Sc. math.*, p. 125), M. E.-W. Hobson a exposé la Vie de John Napier de Merchiston et a résumé sa superbe invention. Son Discours a été publié en un élégant Opuscule.

L'invention des Logarithmes marque un progrès de première importance en Mathématiques appliquées. Il ne faut pas oublier, pour apprécier à sa juste valeur l'effort d'imagination de John Napier, qu'à son époque le calcul au moyen de séries infinies n'était pas encore connu, que la notion générale d'exposant ne faisait pas encore partie du bagage d'idées d'un mathématicien.

John Napier est né en 1550 à Merschiston, près d'Edimbourg. Son premier Ouvrage, publié en 1593, qui contient des interprétations théologiques hardies pour l'époque, fut traduit en plusieurs langues. On voit en 1594 John Napier s'occuper de Magie, en 1596 inventer un miroir destiné à brûler les vaisseaux ennemis.

Il est certain que l'attention de John Napier, dès sa jeunesse, fut vivement attirée par les mathématiques. On signale qu'il s'est occupé des racines imaginaires des équations, qu'il donna une méthode générale d'extraction des racines de degrés quelconques, qu'il chercha à diminuer les calculs laborieux. On sait que, vers 1594, John Napier avait fait connaître à Thomas Craig l'espoir qu'il avait de pouvoir apporter une importante simplification dans les procédés en usage pour les calculs arithmétiques. Mais c'est seulement en 1614, un an après la publication par Rheticus d'une

Table de sinus naturels à cinq décimales, qu'il fit connaître l'invention qui amena une révolution dans les méthodes de calcul.

Son premier Livre a pour titre *Descripto*. En 1617, il publia son second Livre intitulé : *Rabdologia*, où les multiplications et les divisions sont faites par la méthode rapide qu'il avait inventée. La même année, peu de temps après cette seconde publication, il mourut. Ce fut son fils Robert Napier qui publia en 1619, sous le titre *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, l'Ouvrage qui contient une complète explication de la méthode annoncée par l'appellation *wonderful Canon* dans l'*Admonitio* imprimée à la fin du Chapitre II de la *Rabdologia*.

La nouvelle invention attira l'attention des mathématiciens anglais et étrangers. Képler et Henri Briggs en parlèrent avec enthousiasme.

La fin du Discours de M. E.-W. Hobson, qui en est la partie la plus longue, est consacrée à faire connaître les matières que contiennent la *Descriptio* et la *Constructio*, à indiquer les travaux des précurseurs de John Napier, ainsi que la Table publiée en 1620 par le Suisse Jobst Bürgi.

Er. L.

POINCARÉ (Henri). — Analyse de ses Travaux scientifiques. 1 vol. in-4 jésus, 135 pages. Extrait des *Acta mathematica*, t. XXXVIII. Upsala, Almqvist et Wiksells, 1913.

Cet important et utile travail, publié par M. Mittag-Leffler, comprend d'abord la *Bibliographie* des publications de Henri Poincaré, puis des analyses de ses Notes, Mémoires et Ouvrages extraites d'une Notice publiée par Henri Poincaré en 1886 et de Notes inédites rédigées par ce savant sur ses travaux postérieurs à 1886.

La Bibliographie est présentée par ordre chronologique dans les diverses publications académiques et périodiques où Henri Poincaré a publié ses Écrits.

Er. L.

## MÉLANGES.

### QUELQUES RÉFLEXIONS SUR CERTAINS RÉSULTATS DE HENRI POINCARÉ CONCERNANT LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE ;

PAR M. ÉMILE PICARD.

En relisant quelques pages célèbres de Henri Poincaré sur la stabilité en Mécanique et sur l'explication mécanique des phénomènes naturels, j'ai été conduit à faire quelques réflexions qui, si simples qu'elles soient, présentent peut-être quelque intérêt.

### I.

1. On sait quelle admirable application Poincaré a fait de la théorie des invariants intégraux à la discussion de ce qu'il appelle *la stabilité à la Poisson* (¹). Prenons d'abord le cas le plus simple, en envisageant le système

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

possédant un invariant intégral

$$\int \cdots \int M\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n, \tag{2}$$

positif, c'est-à-dire pour lequel $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est positif.

On suppose que, pour des positions initiales correspondant à un certain volume, la trajectoire du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reste à l'intérieur d'un volume fini V. Poincaré établit que, dans ces conditions, il y a stabilité à la Poisson, c'est-à-dire que, étant considéré un volume $v_0$ si petit que l'on voudra, il y a des trajectoires qui traversent $v_0$ une infinité de fois avant et après l'époque

(¹) *Voir* le Tome III (Chap. XXVI) des *Nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*.

*zéro*. D'une manière encore plus précise, la probabilité pour qu'une trajectoire partant d'un point de $v_0$ ne traverse pas une infinité de fois $v_0$ est nulle. La démonstration de ces résultats donnée par Poincaré est merveilleuse par sa simplicité et son élégance. Les applications à des questions de Mécanique analytique sont nombreuses, car pour les équations canoniques on peut prendre $M = 1$; il suffira de citer l'exemple d'un corps pesant mobile autour d'un point fixe.

2. On a supposé implicitement, dans ce qui précède, que M et les X restaient finis dans le volume fini V. Poincaré s'arrête un moment sur le cas où il en serait autrement, mais il resterait ici bien des points à élucider, et notamment celui-ci. Disons qu'il y a choc quand les X deviennent infinis. Des circonstances très différentes peuvent alors se produire ; un cas intéressant est celui où l'on peut faire un *prolongement analytique* de la trajectoire après le choc, où l'on a, par exemple, quelque chose d'analogue à ce qui se passe d'après Sundmann dans le problème des trois corps quand deux corps viennent à se choquer (le problème des trois corps ne rentre pas d'ailleurs dans le cas actuel, le volume V n'étant pas fini). Il faut évidemment supposer que l'intégrale (2) étendue au volume V reste finie, et l'on peut alors montrer que le théorème sur la stabilité subsiste à condition d'être généralisé, c'est-à-dire en l'étendant aux trajectoires des points du volume $v_0$ et à leurs prolongements analytiques, s'il y a lieu de les envisager.

Pour donner un exemple très simple, envisageons dans un plan un point en mouvement avec une fonction des forces $U(x, y)$. On a les deux équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Le système des quatre équations à considérer est ici

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

On a l'intégrale première des forces vives

$$\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)-U=h,$$

et l'invariant intégral est

$$(\alpha)\qquad \int\int\int\int dx'\,dy'\,dx\,dy.$$

Pour pouvoir appliquer la théorie générale, il faudra que, pour les valeurs $h'$ voisines d'une valeur convenable $h$, soit pour $h'$ compris $h-\varepsilon$ et $h+\varepsilon$ ($\varepsilon$ étant un nombre positif déterminé), l'inégalité

$$U+h'>0$$

ait pour conséquence que $x$ et $y$ sont limités. Nous avons alors, par hypothèse, un domaine *fini* dans le plan $(x, y)$ défini par l'inégalité

$$(\beta)\qquad U+h-\varepsilon>0.$$

Il faut voir si l'intégrale $(\alpha)$ est finie. Il en est bien ainsi. Le domaine d'intégration qui joue le rôle de $c$ de la théorie générale correspond à l'ensemble des valeurs de $(x, y, x', y')$ répondant à l'inégalité $(\beta)$ et aux inégalités

$$U+h-\varepsilon<\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)<U+h+\varepsilon.$$

On peut intégrer séparément par rapport à $(x, y)$ et à $(x', y')$. Or

$$\int\int dx'\,dy'$$

est l'aire de la couronne

$$2\pi[U+h+\varepsilon-(U+h-\varepsilon)]=4\pi\varepsilon.$$

Il faut former ensuite l'intégrale

$$4\pi\varepsilon\int\int dx\,dy$$

étendue à l'aire finie $(x, y)$ définie par l'inégalité $(\beta)$. Donc *l'intégrale* $(\alpha)$ *a une valeur finie*. On remarquera que U ne reste pas nécessairement finie ; pourvu qu'on puisse envisager un prolonge-

ment analytique correspondant au cas de $U = \infty$, c'est-à-dire à un choc, la théorie s'applique.

Ceci peut s'appliquer en particulier à un point attiré par $n$ points fixes en raison inverse du carré de la distance. On aurait

$$U = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} + \ldots + \frac{\mu_n}{r_n} \qquad (\text{les } \mu \text{ positifs}),$$

les $r$ désignant les distances du point $(x, y)$ à $n$ points fixes $O_1$, $O_2$, ..., $O_n$. Pour $h$ négatif et de valeur absolue assez petite, les courbes

$$U + h = 0$$

ont une forme facile à tracer, et l'on aura l'inégalité

$$U + h > 0$$

à l'intérieur d'une aire *limitée*. Tout ce qui précède est susceptible d'application.

3. La question devient singulièrement difficile quand V est infini, et ici Poincaré développe quelques vues hardies qui demanderaient à être approfondies. Supposons que, pour le système (1), on puisse prendre $M = 1$. En même temps que le système (1), envisageons le système

$$(3) \qquad \frac{dx_i}{dt'} = \frac{X_i}{P} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

P étant une fonction positive de $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$. Si P est convenablement choisi, l'invariant intégral du système (3)

$$\int \cdots \int P\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

pourra avoir un sens, quand l'intégrale est étendue au volume infini V; c'est ce que nous allons supposer. Les équations (1) et (3) donnent

$$dt = \frac{dt'}{P}, \qquad \text{d'où} \qquad t = \int_0^{t'} \frac{dt'}{P}.$$

Les trajectoires correspondant à (1) et (3) sont les mêmes, mais diversement parcourues. Il peut arriver que, pour une valeur

finie $t' = \mathrm{T}$, le point s'éloigne à l'infini, et qu'en même temps l'intégrale

$$\int_0^{\mathrm{T}} \frac{dt'}{\mathrm{P}}$$

soit infinie. C'est, en quelque sorte, *un prolongement analytique des trajectoires de* (1) *au delà du temps* $t = \infty$ que propose Poincaré. On peut y parvenir si, pour le système (3), il est possible de définir un prolongement analytique de la trajectoire au delà du temps $t' = \mathrm{T}$. En supposant que toutes les conditions indiquées se trouvent remplies, *ce qui pourra être singulièrement difficile à décider*, il y aura un théorème de stabilité en l'étendant non seulement aux trajectoires, mais aussi à leurs prolongements analytiques.

Un exemple extrêmement simple du type précédent est fourni par le mouvement dans un plan d'un point repoussé par un point fixe en raison inverse du carré de la distance. Supposons le point qui repousse placé à l'origine, et $r_1$ sa distance au point $(x, y)$; la trajectoire est l'hyperbole classique. La surface

$$(\gamma) \qquad \frac{\mu_1}{r_1} + h > 0 \qquad (\mu_1 < 0,\ h > 0)$$

s'étend à l'infini. On peut trouver $\mathrm{P}(x, y)$ de telle sorte que l'intégrale

$$\int\int \mathrm{P}(x, y)\, dx\, dy,$$

étendue à l'espace infini $(\gamma)$, soit finie. Il suffit de prendre

$$\mathrm{P}(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

La nature du prolongement analytique en question est facile à apercevoir; c'est le passage d'une branche d'hyperbole à l'autre. Servons-nous des coordonnées polaires. On a

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta} \qquad (e > 1).$$

On voit que

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \mathrm{C},$$

$t$ est infini pour $\theta = \alpha \left(\cos\alpha = \frac{1}{e}\right)$. On obtient de suite

$$dt' = \mathrm{P}\, d\theta = \frac{1}{\mathrm{C}} \frac{r^2\, d\theta}{(1 + r^2)^2}.$$

Donc

$$t' = \frac{1}{\mathrm{C}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{r^2\, d\theta}{(1 + r^2)^2},$$

et il est clair que $t'$ est fini pour $\theta = \alpha$; on a

$$\mathrm{T} = \frac{1}{\mathrm{C}} \int_{\theta_0}^{\alpha} \frac{r^2\, d\theta}{(1 + r^2)^2},$$

et l'on reconnaît de suite que $\theta$ peut être développé suivant les puissances de $(t' - \mathrm{T})^{\frac{1}{3}}$; d'où le prolongement analytique cherché.

4. J'ai tenu à entrer dans quelques détails sur la proposition célèbre de Poincaré concernant la stabilité à la Poisson. Il faut reconnaître que c'est seulement dans le cas du paragraphe 1 que l'on a une conclusion précise permettant d'affirmer réellement la stabilité. Aussi, ce n'est pas sans étonnement que l'on voit le parti que d'éminents physiciens ont cherché à tirer de ce théorème auquel ils donnent la forme générale suivante : *un système dynamique, si complexe soit-il, repasse en général une infinité de fois par une configuration aussi voisine que l'on veut de son état initial.* D'après ce qui précède, rien n'autorise à énoncer une telle proposition, et les probabilités sont plutôt pour qu'elle soit inexacte. Pour le moment au moins, l'idée du *retour éternel*, à laquelle se sont plu tant d'esprits philosophiques, cherche en vain des confirmations dans les théorèmes généraux de la Mécanique analytique, et l'*on peut constater une fois de plus la tendance qu'ont à oublier des restrictions gênantes ceux qui veulent philosopher sur l'avenir de l'Univers.*

## II.

Je passe maintenant à une tout autre question. Dans la Préface de son livre *Électricité et Optique*, Poincaré se demande ce que l'on doit entendre par *interprétation mécanique d'un phéno-*

*mène naturel.* Cette interprétation est ramenée par lui *à la possibilité de la formation d'un système d'équations de Lagrange avec un certain nombre de paramètres* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *que l'expérience atteint directement et permet de mesurer.* Dans ces équations figurent l'énergie cinétique T et une fonction des forces U. Cette possibilité étant supposée, on pourra toujours, d'après Poincaré, déterminer $p$ *masses* $m_i$ (visibles ou cachés) et leurs $3p$ coordonnées $(x_i, y_i, z_i)$ fonctions des $q$ (en prenant $p$ assez grand), de manière que la force vive de ce système de masses soit égale à l'énergie cinétique T figurant dans les équations de Lagrange. L'indétermination est ici très grande, et c'est précisément là qu'en veut venir Poincaré, dont la conclusion est que, *s'il y a une explication mécanique, il y en a une infinité.*

Il faut avouer, dirons-nous, que cette indétermination est même trop grande, car on perd complètement de vue les corps en présence. Ainsi, par exemple, suivant les formes qu'auront l'ensemble des masses partiellement indéterminées $m_i$, *il pourra y avoir ou non des chocs.* Il y a quelque chose de singulier à avoir des explications où des circonstances analytiques aussi différentes peuvent se présenter. On peut aussi se demander *ce que devient la répartition des forces réelles dans les systèmes, en partie arbitraires, auxquels on est conduit.* Les vues générales de Poincaré esquissées ci-dessus portent certes la marque de son puissant esprit, mais elles prêtent à bien des difficultés et font par trop abstraction des réalités; elles sont d'un philosophe et non d'un physicien. Il semble que la notion d'explication mécanique ne prenne un sens précis, pouvant d'ailleurs varier de l'une à l'autre, que pour des catégories bien précisées de phénomènes, et peut-être est-il vain de chercher une définition générale. Il n'est pas nécessaire, pour avoir une explication que l'on dira mécanique, d'apercevoir les équations différentielles de mouvements moléculaires, quand rien ne vient en régler l'arbitraire. Ce n'est pas à dire que les explications moléculaires ne soient pas parfois fécondes. Trop de travaux ont montré le contraire dans ces dernières années, mais ce n'est pas par une voie aussi arbitraire et aussi indéterminée que celle indiquée par Poincaré, que peuvent être introduits atomes et molécules.

## SUR DES INTÉGRALES DÉFINIES SE RATTACHANT AU LOGARITHME INTÉGRAL;

PAR M. PAUL APPELL.

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels et positifs, $x$ une variable réelle. Posons

$$\varphi(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x+a}\,dx = e^a \int_{e^{-a}}^0 \frac{dx}{\log x},$$

$$\psi(a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x+a} \log(x+b)\,dx,$$

où les logarithmes sont népériens. On a évidemment

$$\frac{\partial\psi(a, b)}{\partial b} = \frac{\varphi(a) - \varphi(b)}{b-a}.$$

En changeant, dans $\varphi(a)$, $x$ en $x^2$, et dans $\varphi(b)$, $x$ en $y^2$, on a

$$\varphi(a)\varphi(b) = 4\int\int \frac{e^{-(x^2+y^2)}\,xy\,dx\,dy}{(x^2+a)(y^2+b)},$$

l'intégrale double étant étendue à l'angle $xOy$ des coordonnées positives. En calculant la même intégrale en coordonnées polaires, on obtient la formule

$$(1) \qquad \psi(a+b, a) + \psi(a+b, b) = \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(a+b)\log ab$$

qui donne, comme cas particuliers dignes d'attention,

$$(2) \qquad 2\psi(2a, a) = \varphi^2(a) + 2\varphi(2a)\log a,$$

$$(3) \qquad \psi\left(a+\frac{1}{a}, a\right) + \psi\left(a+\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right) = \varphi(a)\varphi\left(\frac{1}{a}\right).$$

Une méthode analogue donne la formule

$$(4) \qquad \varphi(a)\Gamma p = \int_0^\infty e^{-s}\,ds \int_0^s \frac{t^{p-1}}{a+s-t}\,dt,$$

où la seconde intégrale peut être calculée par les méthodes élémentaires quand $p$ est commensurable. On a, par exemple, après un changement de variable aisé à rétablir,

$$(5)\quad \varphi(a)\Gamma\frac{1}{2} = 4e^a\int_{\sqrt{a}}^{\infty} e^{-u^2}\log\left(u+\sqrt{u^2-a}\right)du - 2e^a\log a\int_{\sqrt{a}}^{\infty} e^{-u^2}\,du,$$

et, en particulier,

$$(6)\qquad \varphi(1)\Gamma\frac{1}{2} = 4e\int_{1}^{\infty} e^{-u^2}\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)du.$$

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Coffin (F.-G.). — *Calcul vectoriel*, avec Applications aux Mathématiques et à la Physique. In-8, 212 p. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914. 7 fr. 50.

Contenson (Louis de). — *Les fondements mathématiques*, dans l'hypothèse de la Philosophie critique. In-8, 93 p. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914. 3 fr. 25.

Cotton (Emile). — *Cours de Mécanique générale*. I. Vecteurs. Géométrie des masses. Principes. Cinématique. Statique. In-8, 166 p. Grenoble, Jules Rey; Paris, Gauthier-Villars et Cie; 1914. 5 fr.

Forsyth (A.-R.). — *A Treatise on differential Equations*. Fourth edition. In-8. London, Macmillan and Co, 1914. 14 s.

Moulton (F.-R.). — *An Introduction to celestial Mechanics*. Second revised edition. In-8. London, Macmillan and Co, 1914. 15 s.

Sommerville (D.-M.-Y.). — *The Elements of non-euclidean Geometry*. In-8, 274 p. London, G. Bell and Sons, 1914.

Trignard (A.). — *Table auxiliaire d'Intérêts composés*. Avec une Préface de *A. Barriol*. In-8 (28-19), VIII-24 p. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914. 2 fr.

1re Partie

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HALSTED (G.-B.). — Géométrie rationnelle. Traité élémentaire de la science de l'espace. Traduction française de Paul Barbarin, avec une Préface de C.-A. Laisant, 1 vol. in-8, IV-296 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

Point n'est besoin de rappeler aux lecteurs du *Bulletin* ce que sont les recherches de M. Hilbert sur les principes de la Géométrie. Tous ont le souvenir de l'admirable analyse qui en a été faite ici même [1], de la main de Poincaré; tous, par conséquent, connaissent ces recherches, complément logique mathématique de celles de Riemann, de Lobatschewsky, de Bolyai, et en dernière analyse des *Éléments* d'Euclide.

M. Hilbert a publié cette œuvre mémorable pour l'usage de ses confrères en Science. L'idée de M. Halsted est autre : ce sont ces mêmes principes qu'il n'hésite pas à offrir aux débutants de nos lycées pour leur aplanir l'accès souvent ardu des premières notions de la Géométrie.

Dans une lettre que cite M. Halsted, M. Hilbert trouve la chose toute naturelle. La tentative est cependant audacieuse. Elle surprendra sans doute nombre de lecteurs, car elle va à l'encontre de toutes les tendances actuelles de l'enseignement. Depuis une ou deux dizaines d'années, nous avons tous évolué dans une direction toute contraire à celle où M. Halsted nous invite à nous engager. Est-ce parce que, sur les livres du vieux Lhomond où nous avons épelé la grammaire, notre génération a encore pu lire cette épigraphe : « La Métaphysique ne convient pas aux enfants »? Ou n'est-ce pas plutôt la pratique elle-même de l'enseignement, la constatation des échecs pédagogiques auxquels s'exposait comme à plaisir la méthode classique d'Euclide, des découragements et des dégoûts innombrables dont elle est responsable? Serait-ce encore la grande voix de Poincaré, rappelant ces dégoûts et ces découragements et en dénonçant les causes? En tout cas, nombre d'entre nous sont convaincus que les besoins logiques des mathématiciens de profession ne sont pas ceux des débutants. On tend à penser que le sentiment si

(1) Tome XXVI, 1902, p. 249.

indispensable de la rigueur mathématique est lui-même le résultat de toute une éducation de l'esprit, et que les débuts de l'enseignement géométrique doivent viser à le faire naître avant que de le satisfaire; qu'à plus forte raison le besoin de réduire les axiomes au minimum ne saurait apparaître sans une longue préparation, avant laquelle toutes les complications qu'il engendre ne peuvent offrir que des inconvénients. Surtout, on prend soin, à l'heure actuelle, de faire sentir que le souci de la rigueur ne doit pas empêcher le développement de l'intuition, et l'on a le sentiment très net de la faute que l'on commettrait en tuant celle-ci pour mieux assurer celle-là.

Sont-ce là de vaines préoccupations et des précautions sans objet? Mon Dieu! tout est possible : qui sait si les générations d'écoliers que la méthode classique a rebutées (pour la plupart, définitivement) n'auraient pas été illuminées d'une lumière soudaine si, avec M. Halsted, on leur avait mis sous les yeux, sans la moindre préparation, la phrase classique de Hilbert :

« Nous imaginons trois différentes sortes d'objets. Nous appelons *points* les objets de la première sorte...; les objets de la deuxième sorte sont nommés *droites*...; les objets de la troisième sorte sont appelés *plans*... »?

A vrai dire, s'il ne s'agissait que de cette première phrase, je n'y verrais que demi-mal. Je pense que, après l'avoir récitée, les élèves... continueraient à concevoir les points, les droites et les plans à la manière ordinaire.

Il arrive d'ailleurs à l'auteur d'en faire autant, et cela ne laisse pas que de me troubler un peu. Nous avons dit qu'en qualifiant, dès le début, les points, les droites et les plans de simples « objets », il n'éprouve pas le besoin de rappeler qu'il change le sens habituel des mots. Mais voici venir le Chapitre consacré aux problèmes de construction. Il faut bien, cette fois, parler de règle et de crayon. Je me serais attendu à voir spécifier si la feuille de papier sur laquelle on va opérer est un objet de la première, de la deuxième ou de la troisième sorte. Point du tout; il n'est soufflé mot de cela. Serait-ce que l'on doit trouver naturel d'employer, avec le même sens que les menuisiers, au Chapitre V de l'Ouvrage, un mot qui, dans les Chapitres I-IV, n'a jamais signifié que « objet de la troisième sorte »? Ce serait la plus grave des fautes de logique.

M. Halsted fait, il est vrai, précéder ce Chapitre de quelques explications générales; mais celles-ci mêmes m'ont plutôt troublé que rassuré.

Doit-on, par exemple, admettre avec l'auteur [1] que les axiomes de la première série ou axiomes d'association « autorisent la désignation graphique des deux points donnés et l'opération graphique de joindre ces points désignés par une droite, en garantissant que cette opération peut toujours s'effectuer » ?

J'en doute. Les axiomes de Hilbert ne garantissent rien du tout, au moment dont nous parlons : ce sont eux qui ont besoin d'être prouvés. C'est la vérification *directe* de ces axiomes (question d'ordre expérimental et physique) qui est de toute nécessité pour que, entre une feuille de papier, une règle, une carte de visite, fût-elle sans marque, et les « objets » considérés dans les Chapitres précédents, il puisse être question d'établir un rapport quelconque.

La *Géométrie rationnelle* suggérerait plusieurs autres observations analogues à tout logicien tant soit peu exigeant; et où se montrer exigeant en matière de logique, sinon dans une Géométrie rationnelle, qui a pour base et pour raison d'être la rigueur hilbertienne?

Ce ne serait pas trop, surtout, d'une logique impeccable pour nous amener à suivre le chemin tortueux des nouvelles déductions, nous qui, avec Poincaré, croyons que l'élève a le droit de « savoir, non seulement si tous les syllogismes d'une démonstration sont corrects, mais pourquoi ils s'enchaînent dans tel ordre plutôt que dans tel autre ».

M. Hilbert, s'adressant à un public déjà renseigné, ne cherchait pas à se conformer à l'ordre naturel des idées. En découpant ses axiomes fondamentaux, il s'est attaché à ce que son puzzle fût complet, sans s'occuper de ce que ses découpures pouvaient avoir de baroque. Il aurait évidemment pu atteindre ce même résultat de toute sorte d'autres manières. En est-il une qui lui aurait donné des déductions moins artificielles? Je le crois; à strictement parler, il est vrai, je n'en sais rien, et ne songe pas à le rechercher, puisque la question me laisse, personnellement, fort indifférent; mais elle me

---

[1] Page 55 de la traduction.

paraît fondamentale pour ceux qui, comme M. Halsted, croient à l'introduction des méthodes de Hilbert dans l'enseignement secondaire.

En tout cas, on jugera du chemin qui resterait à parcourir dans ce sens si nous rappelons que, dans l'Ouvrage qui nous occupe, la définition de la somme des angles (j'entends celle qui compte pour de bon; car un premier essai avorté, si j'ose m'exprimer ainsi, en avait été fait dès le Chapitre IV, n° 78) et le théorème sur la somme des angles d'un polygone arrivent (Chap. X, n° 297) juste avant la puissance d'un point par rapport à un cercle, à deux pages du théorème de Ptolémée sur le quadrilatère inscrit.

Ceci concerne surtout la Géométrie plane : il y a moins de bouleversement, hâtons-nous de le dire, et les innovations, plus rares, sont souvent heureuses en Géométrie de l'espace.

Mes inquiétudes me reprennent lorsque j'aborde la Géométrie sphérique ou, plutôt, les Géométries sphériques, car il y en a deux, et qui ne parlent pas la même langue l'une que l'autre. Une partie des propriétés de la sphère est établie à la manière habituelle, je veux dire comme conséquence de la définition et des propriétés antérieurement démontrées des figures de l'espace. Pour l'autre, une nouvelle liste d'axiomes fondamentaux est formée et prise comme seul point de départ, tout ce qui précède étant considéré comme non avenu.

Que sont ces nouveaux axiomes? Sont-ils démontrables et conséquences des premiers? Ne faudrait-il pas mettre l'élève à même de répondre à cette question? A prendre le texte au pied de la lettre, il n'aurait qu'une seule réponse à donner, et elle serait négative : de sorte que, dans cet ingénieux édifice, intéressant et instructif pour d'autres que lui, il ne retrouverait pas la logique même au nom de laquelle tout cet édifice est bâti.

Quoique cette sphérique termine, ou à peu près, la Géométrie de l'espace, les axiomes réservent encore des surprises, avec les Appendices.

Ce n'est point du premier d'entre eux que je parle. Il complète le commencement de l'Ouvrage en démontrant que, « entre deux points quelconques d'une droite, il y en a une infinité d'autres », et autres vérités premières de même ordre.

Mais avec l'Appendice II, voici bien une autre affaire. J'avais

vu, à la liste d'axiomes de Hilbert, un avantage essentiel, celui d'être définitive : une fois les 21 axiomes énoncés, ils doivent suffire à constituer toute la Géométrie. Or voici que, après avoir tout fait jusque-là pour m'entretenir dans cette illusion, M. Halsted me dissimulait, dans un tout petit coin, un axiome supplémentaire [1], et déclare ne pouvoir utiliser le compas ni, par conséquent, effectuer les constructions classiques de triangles, sans lui.

Me faudra-t-il des axiomes nouveaux pour parler de l'ellipse, d'autres pour l'hyperbole, d'autres pour la parabole; et ainsi de suite pour chaque pas en avant que je voudrais faire? Et qui me fournira, lorsque l'aide de M. Hilbert ou de M. Halsted aura cessé de s'exercer, ces axiomes sans cesse indispensables et sans cesse renouvelés?

Le pis est que mon premier mouvement était le bon et que l' « axiome VI » de M. Halsted, comme tout le reste de la Géométrie, résulte des axiomes de Hilbert. Il est vrai qu'il y faut l'axiome d'Archimède, que M. Halsted n'aime point, et un autre (le Vollständigkeits-Axiom) qu'il a bien raison de ne pas essayer de faire comprendre à des enfants, mais qu'on pourrait sans doute remplacer par quelque autre axiome de continuité d'allure moins mystique. En tout cas, la logique (celle même de Hilbert) ne consiste-t-elle pas précisément à utiliser des prémisses établies une fois pour toutes, plutôt que de songer à en demander de nouvelles chaque fois qu'on veut démontrer quoi que ce soit?

Mais je m'aperçois que j'ai passé mon temps à adresser des reproches à M. Halsted. C'est que la tâche qu'il s'est imposée est des plus difficiles. Il serait singulièrement injuste d'oublier que les exigences mêmes de cette tâche appellent et que son talent universellement reconnu sait fournir, à tout instant, une foule de démonstrations et de constructions ingénieuses, dont tous les professeurs (même sans songer une minute à entrer dans la même voie que lui) feront bien de s'inspirer pour leurs problèmes et même pour leurs cours. En particulier, la mesure des volumes des

---

[1] En réalité, cet axiome supplémentaire n'est point le premier de son espèce. Il y en a un d'énoncé (sans être qualifié tel) pour définir la longueur et l'aire du cercle, et, chose plus singulière, un autre analogue est employé, sans être énoncé, lorsqu'il s'agit des aires des surfaces courbes.

polyèdres (je ne parle pas de celle des volumes courbes, où l'axiome de Cavalieri est employé d'une manière très suggestive, elle aussi, mais sur laquelle il y aurait encore à dire) est rendue extrêmement intéressante grâce à la remarquable formule sur laquelle l'auteur la fait reposer. La lecture de ce Chapitre est d'autant plus agréable que cette fois, pour la goûter, nous ne sommes point obligés de faire violence à la marche naturelle du cerveau humain.

Les détails (il n'en est point de négligeables en matière d'enseignement) intéresseront forcément, dans un Livre aussi profondément différent de ceux auxquels nous sommes habitués. Ainsi, parmi les dénominations (en très grand nombre, comme dans tous les Ouvrages anglo-saxons) introduites par l'auteur, il en est, comme celle d'*arc mineur* dans l'étude du cercle, qui constituent d'heureuses et nécessaires innovations.

J. Hadamard.

---

DICKSON (Leonard E.). — On Invariants and the Theory of Numbers.
OSGOOD (William F.). — Topics in the Theory of Functions of several complex variables. *The Madison Colloquium.* (American Mathematical Society. Colloquium Lectures, vol. IV.) 1 vol. gr. in-8, v-230 pages. New York, 501 West 116th street, 1914.

Ce Volume contient les Conférences qui ont eu lieu en septembre 1913 à Madison sous les auspices de l'*American Mathematical Society*. On sait quelle place importante cette Société a prise depuis vingt ans dans les études mathématiques par la publication de ses *Transactions* et par l'organisation, à des intervalles de 2 à 4 ans, de Conférences faites par des membres de la Société sur les sujets où ils sont le plus compétents. La préface du Volume actuel contient la liste de ces *Colloquia* et des publications qui en sont issues, depuis l'*Evanston Colloquium* de 1893 qui inaugura brillamment cette série et où furent donnés les Conférences de M. Klein [1]. Un coup d'œil jeté sur cette liste montre immédiatement le grand intérêt des sujets traités depuis lors dans les réunions de Buffalo en 1896,

---

[1] Klein, *Conférences sur les Mathématiques*, trad. française par Laugel; Hermann, éd. 1898.

Cambridge en 1898, Ithaca en 1901, Boston en 1903, New Haven en 1906, Princeton en 1909. C'est à M. Dickson et à M. Osgood que sont dues les deux séries de Conférences qui ont été données en dernier lieu à Madison et que nous allons analyser successivement.

## I.

Les Conférences de M. Dickson sont consacrées à la théorie des formes modulaires, c'est-à-dire des formes dont les coefficients sont des nombres entiers définis seulement à un multiple près d'un nombre premier $p$, deux formes dont les coefficients sont congrus (mod $p$) étant considérées comme identiques. M. Dickson avait déjà publié de nombreux articles sur ce sujet : il expose ici, avec de nouveaux développements, ses travaux antérieurs en même temps que ceux de quelques autres mathématiciens.

La notion d'invariant qui joue un rôle capital dans la classification et la théorie des formes algébriques, ainsi qu'en géométrie projective, n'est pas moins importante dans la théorie des formes modulaires. M. Dickson définit de la façon suivante les invariants modulaires :

Soient S un système de formes modulaires à coefficients entiers arbitraires, $p$ le module, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les variables ; soit, d'autre part, G un groupe de transformations linéaires modulaires en $x_1$, $x_2, \ldots, x_m$ à coefficients entiers et de déterminant congru à 1 (mod $p$). Les systèmes particuliers S′, S″, ... déduits de S, en donnant des valeurs particulières aux coefficients, peuvent être séparés en classes de manière que deux systèmes appartiennent à la même classe dans le seul cas où ils sont transformables l'un dans l'autre par des transformations de G. Une fonction $\Phi$ des coefficients des formes du système S sera dite *invariant modulaire* pour le groupe G si tous les systèmes d'une même classe donnent pour la fonction $\Phi$ des valeurs congrues (mod $p$) et si réciproquement deux valeurs de $\Phi$ correspondant aux systèmes S′, S″, ... sont congrues dans le seul cas où S′, S″, ... appartiennent à la même classe.

On passe d'une forme algébrique générale à la forme modulaire correspondante en donnant aux coefficients de la forme algébrique des valeurs entières définies à un multiple de $p$ près. Tout inva-

riant de la forme algébrique rationnel et entier donnera donc naissance à des invariants modulaires de la forme modulaire; mais il y a en outre de nombreux invariants particuliers à la théorie des nombres. La théorie des formes algébriques intervient ici par les définitions et les notions fondamentales, telles que la séparation en classes, les notions d'invariant, de covariant. Mais l'arithmétique apporte des simplifications résultant de la notion de congruence : c'est ainsi que le théorème de Fermat permet de remplacer partout $a^p$ par $a$, si $p$ est le module premier considéré.

Les parties de la théorie des nombres que M. Dickson suppose acquises du lecteur, si elles sont fondamentales, sont d'ailleurs très élémentaires : ce sont à peu près celles que Tannery a exposées d'une façon si lumineuse en une cinquantaine de pages à la fin de ses *Leçons d'Arithmétique*.

Indiquons maintenant le plan de l'Ouvrage.

Le premier Chapitre est consacré aux notions générales, classes de formes, invariants, notions développées surtout pour le cas des formes quadratiques.

Le Chapitre II contient l'étude des semi-invariants d'une forme binaire, algébrique ou modulaire, c'est-à-dire des invariants de cette forme pour les substitutions linéaires

$$x = x' + ty', \qquad y = y'.$$

Dans le cas général d'une forme modulaire binaire d'ordre $n$, l'auteur forme explicitement un système fondamental de semi-invariants modulaires et il indique comment on peut utiliser ce résultat pour obtenir ensuite les invariants modulaires.

Le Chapitre III est consacré aux groupes de transformations linéaires modulaires à $m$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ : on y étudie les invariants du groupe, c'est-à-dire les fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ invariantes par les transformations du groupe.

Les deux derniers Chapitres sont consacrés à des questions de géométrie modulaire. L'auteur étudie dans le Chapitre IV les formes quadratiques modulaires (mod 2) à $m$ variables. Un *point* est un ensemble de $m$ nombres $x_1, x_2, \ldots, x_m$, non tous nuls (mod 2), pris dans le champ F formé des racines de toutes les congruences de module 2 à coefficients entiers (ces racines sont ou bien des nombres réels ou bien des imaginaires de Galois) :

le point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est considéré comme identique au point $(\rho x_1, \rho x_2, \ldots, \rho x_m)$, où $\rho$ est un élément non nul pris dans F. En égalant la forme à zéro, on obtient une congruence et l'ensemble des points vérifiant cette congruence s'appellera une quadrique ou, si $m = 3$, une conique. Le Chapitre V est consacré de même aux cubiques ayant un point réel d'inflexion, envisagées en géométrie modulaire.

Le langage géométrique étant ainsi fixé, l'auteur se sert des méthodes et du langage de la géométrie projective et il établit ainsi un grand nombre de résultats relatifs aux coniques et aux cubiques. Il est certes intéressant de voir comment les méthodes de la géométrie projective facilitent l'exposé de recherches purement arithmétiques. Mais l'intérêt de la géométrie modulaire paraîtrait bien plus grand si les résultats ainsi établis jetaient un jour nouveau sur des problèmes de la théorie des nombres, posés indépendamment de la géométrie modulaire elle-même. C'est ce qui n'apparaît pas pour l'instant; il est vrai que bien des théories mathématiques d'un intérêt général ont été dans le même cas et l'on peut d'autant moins critiquer M. Dickson sur ce point qu'il s'agit ici d'une théorie de création récente, due en grande partie à M. Dickson lui-même, et qui portera peut-être des fruits plus tard.

## II.

Les Conférences de M. Osgood constituent un très beau rapport d'ensemble sur l'état actuel de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, tel qu'on pouvait l'attendre de l'auteur du *Lehrbuch der Funktionentheorie* et de l'article sur les fonctions analytiques de l'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*. M. Osgood, tout en nous rappelant les résultats classiques fondamentaux, insiste surtout, à partir du second Chapitre du moins, sur les progrès de la théorie depuis une dizaine d'années.

Une première Conférence nous donne une vue générale des résultats classiques et des fonctions particulières les plus intéressantes qui se sont présentées aux géomètres avant même qu'on pût songer à édifier une théorie générale embrassant les fonctions analytiques de plusieurs variables dans toute leur généralité. Nous

rencontrons ainsi le théorème d'inversion de Jacobi, les fonctions abéliennes, les séries thêta à plusieurs arguments, les fonctions périodiques de plusieurs variables. Viennent ensuite quelques fonctions qui, d'introduction plus récente, se rattachent aux précédentes, fonctions hypermodulaires, fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes. Le Chapitre se termine par un paragraphe sur les fonctions algébriques de plusieurs variables et par quelques mots sur le rôle de l'*Analysis situs* dans l'espace à $n$ dimensions.

Le Chapitre II est consacré à quelques théorèmes généraux, concernant diverses formes des conditions pour qu'une fonction soit rationnelle ou algébrique, la notion de rayons de convergence associés, les travaux récents de M. Hartogs sur des notions voisines de cette dernière, la représentation des fonctions méromorphes par des quotients de fonctions entières, l'extension de la notion de facteurs primaires aux fonctions entières de plusieurs variables.

Parmi les idées mises en avant par M. Osgood dans ce Chapitre, signalons celle qui concerne les diverses voies dans lesquelles on peut étendre la notion de point analytique par l'introduction de points à l'infini. On représente d'habitude les $n$ variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ chacune sur une sphère de Neumann : un point est un point à l'infini si l'une au moins des coordonnées est représentée par le point image de l'infini sur la sphère de Neumann correspondant à cette coordonnée. L'espace ainsi étendu s'appellera *espace de l'Analyse :* on passe d'un point à l'infini de cet espace à un point à distance finie par une transformation de la forme

$$(1) \qquad z'_i = \frac{\alpha_i z_i + \beta_i}{\lambda_i z_i + \delta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et le mode d'existence d'une fonction à l'infini se ramène ainsi au mode d'existence en un point à distance finie. Mais il y a d'autres modes de généralisation de l'espace qui présentent aussi un intérêt. Pour l'*espace projectif*, par exemple, la transformation précédente est remplacée par une transformation de la forme

$$(2) \qquad z'_i = \frac{\alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)} z_1 + \alpha_2^{(i)} z_2 + \ldots + \alpha_n^{(i)} z_n}{\alpha + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il y a aussi des modes d'extension intermédiaires entre les deux

précédents, les variables étant divisées en deux groupes, soumis, le premier à une transformation de la forme (1), le second à une transformation de la forme (2). L'intérêt qu'il y a à envisager ces divers espaces, au lieu de se borner à l'espace de l'Analyse, apparaîtra mieux si l'on remarque, par exemple, que le théorème de Weierstrass, d'après lequel une fonction de $n$ variables complexes, méromorphe dans tout l'espace de l'Analyse, est une fonction rationnelle, subsiste, ainsi que l'a montré M. Osgood lui-même dans un Mémoire récent, si l'espace de l'Analyse est remplacé par l'espace projectif.

Le Chapitre III est consacré aux singularités et au prolongement analytique des fonctions analytiques de plusieurs variables.

Les points singuliers *non essentiels* sont des points au voisinage desquels la fonction est de la forme

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{H(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{G(z_1, z_2, \ldots, z_n)},$$

G s'annulant au point considéré, H et G étant analytiques en ce point et sans facteurs primaires communs. On distingue parmi ces points les pôles, points pour lesquels G est nul sans que H le soit, et les points *non essentiels du second genre* pour lesquels H et G sont nuls simultanément.

Il y a lieu encore d'envisager ce que M. Osgood appelle une *removable singularity*, point singulier qu'on peut faire disparaître en changeant la valeur de la fonction en un pareil point et en lui donnant une valeur convenablement choisie, telle que la fonction modifiée devienne régulière au point considéré.

Tout autre point singulier est un point singulier *essentiel*.

M. Osgood s'attache surtout à nous montrer les différences, assez profondes, qui existent au point de vue de la distribution des singularités entre les fonctions d'une seule variable et celles de plusieurs variables.

Tout d'abord, si l'on excepte le cas banal d'une *removable singularity*, une fonction analytique de plusieurs variables ne peut pas avoir de singularité isolée. Il résulte même d'un important Mémoire assez récent de M. E.-E. Levi [1] que le théorème sub-

---

[1] *Annali di Matematica*, 1910.

siste si l'on ne tient compte que des singularités essentielles : le cas d'un point singulier essentiel, limite de pôles, et isolé des autres points singuliers essentiels possibles, qui se présentait pour les fonctions d'une seule variable, est ici impossible.

D'une façon générale, les singularités d'une fonction analytique de plusieurs variables sont assujetties à des restrictions beaucoup plus grandes que les singularités des fonctions analytiques d'une seule variable. Par exemple, M. Osgood signale le théorème suivant dû à M. Hartogs [1] :

« Si, dans le voisinage du point $(0, 0)$, la fonction $f(x, y)$ admet comme uniques singularités (non *removables*) les points $[x, \varphi(x)]$, où $\varphi(x)$ est une fonction uniforme continue de la variable complexe $x$ définie dans le voisinage de $x = 0$, *la fonction* $\varphi(x)$ *est nécessairement analytique.* »

Ceci restreint beaucoup l'ensemble des points singuliers considéré dans l'espace à quatre dimensions $(x, y)$, puisque l'analyticité de $\varphi(x)$ se traduit par des équations aux dérivées partielles vérifiées par la partie réelle et par la partie imaginaire de $\varphi(x)$. On sait au contraire que, pour les fonctions d'une seule variable complexe, l'ensemble des points singuliers comporte le même degré de généralité que la frontière d'un continu quelconque à deux dimensions.

L'étude du prolongement analytique montre, elle aussi, que le domaine de définition d'une fonction analytique de plusieurs variables présente moins d'arbitraire que celui des fonctions d'une seule variable. Ainsi une fonction $f(x, y)$ ne peut pas présenter, dans l'espace à quatre dimensions $(x, y)$, une région lacunaire finie, tout autour de laquelle la fonction soit analytique : par exemple, il n'existe pas de fonction analytique dans la couronne limitée par deux hypersphères concentriques de rayons 1 et $1 + \delta$, et admettant la première hypersphère comme frontière naturelle.

La conclusion que M. Osgood dégage de tout ce Chapitre est celle-ci : Les fonctions analytiques de plusieurs variables sont beaucoup moins capables de s'adapter à une région de définition assignée à l'avance que les fonctions d'une seule variable; cela se

---

[1] *Acta mathematica*, t. XXXII, 1908.

conçoit d'ailleurs *a priori* par le seul fait que la partie réelle de la fonction doit vérifier ici un système de plusieurs équations aux dérivées partielles au lieu de la seule équation de Laplace relative aux fonctions analytiques d'une seule variable.

Le Chapitre IV consacré aux fonctions implicites débute par le théorème classique de Weierstrass, qui permet de généraliser la décomposition en facteurs des fonctions d'une seule variable (*voir*, par exemple, Goursat, *Analyse*, t. II, § 356). Ce théorème s'applique à une fonction $F(u; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ analytique et nulle à l'origine, telle en outre que $F(u; 0, 0, \ldots, 0)$ ne soit pas identiquement nul. M. Osgood s'est proposé de généraliser le théorème de Weierstrass en supprimant cette dernière hypothèse. On obtient alors la proposition suivante, évidente pour un polynome et démontrée par M. Osgood seulement lorsque $n = 1$ [1] :

Si la fonction $F(u; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est analytique et nulle à l'origine, il existe un certain domaine $|u| < h$, $|x_i| < h'$ dans lequel on a

$$F(u; x_1, x_2, \ldots, x_n) = (A_0 u^m + A_1 u^{m-1} + \ldots + A_m)\Omega(u; x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

$A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ analytiques dans la région $|x_i| < h'$, toutes nulles à l'origine sauf $A_0$, qui peut être nulle ou non; $\Omega$ est une fonction analytique non nulle dans le domaine considéré; $m$ est un certain nombre entier.

M. Osgood étudie ensuite les fonctions algébroïdes de $n$ variables; il indique dans quelle voie il y a lieu de généraliser la notion de surface de Riemann; si $n$ est supérieur à 1, il y a lieu d'introduire des *multiplicités riemanniennes* à $2n$ dimensions composées de multiplicités superposées, qu'on peut encore appeler des *feuillets*, ces feuillets étant liés les uns aux autres par des multiplicités de passage à $2n - 1$ dimensions, analogues aux lignes de passage des surfaces de Riemann. Le Chapitre se termine par l'étude des systèmes d'équations analytiques et de l'inversion de ces systèmes.

Le Chapitre V et dernier, relatif aux fonctions algébriques d'une variable et à leurs intégrales, paraît tout d'abord s'écarter du sujet

---

[1] L'exactitude de cet énoncé dans le cas général paraît probable à M. Osgood et il en propose la démonstration comme un sujet d'étude digne d'intérêt.

choisi par M. Osgood. Mais l'emploi des variables homogènes, adopté par M. Klein après Aronhold et Clebsch, nous conduit tout naturellement à des fonctions de plusieurs variables, en particulier à cette fonction $\Omega(x_1, x_2, y_1, y_2)$ des variables réelles $x_1, x_2, y_1, y_2$ obtenues en posant

$$x = x_1 + ix_2, \qquad y = y_1 - iy_2,$$

fonction que M. Klein appelle *Primfunktion* et qui permet de généraliser pour la courbe algébrique considérée la fonction $\theta$ elliptique. Cette fonction dépend, en réalité, de deux variables indépendantes, car $(x, y)$ est un point de la courbe algébrique considérée. M. Osgood se sert des théorèmes d'uniformisation établis en 1912 d'une façon rigoureuse [1] pour exprimer cette *fonction première* à l'aide de deux paramètres indépendants $t$, $\theta$. Il est ainsi conduit à une fonction $\Omega(t, \theta)$ des deux variables $t$, $\theta$, analytique dans un certain domaine. M. Osgood utilise alors habilement les travaux récents sur les fonctions analytiques de plusieurs variables étudiés aux Chapitres II et III de ces Conférences pour rendre à la fois plus rigoureuse et plus simple la théorie développée par M. Klein. Il montre ainsi comment cette théorie générale des fonctions analytiques peut être appelée à rénover d'anciennes recherches concernant des fonctions particulières. Et ceci justifierait, si cela était nécessaire, l'intérêt qu'on y a attaché dans ces dernières années, intérêt qui nous a valu cette belle série de Conférences de M. Osgood.

S. Lattès.

---

BOULIGAND (Georges). — Sur les fonctions de Green et de Neumann du cylindre. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences mathématiques,* soutenue le 13 juin 1914 sous la présidence de M. Émile Picard. 1 vol., 77 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914.

On sait que l'équation

$$(1) \qquad \Delta u = \lambda u \qquad (\lambda \text{ étant une constante}),$$

dans le plan et dans l'espace a fait l'objet de nombreuses recherches,

---

[1] *Voir* la deuxième édition du Tome I du *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Chap. XIV, 1912.

et que, en particulier pour un volume fini régulier, les problèmes de Dirichlet et de Neumann ont été étudiés d'une manière très complète. Les diverses questions que l'on peut se proposer, sur les équations aux dérivées partielles étudiées au point de vue de la Physique mathématique, prennent un caractère tout différent quand le volume est infini, ou, ce qui revient au même souvent, quand le volume est fini, mais est terminé par une surface ayant des singularités. Dans son travail, M. Bouligand étudie spécialement pour l'équation ci-dessus le cas où le volume est un cylindre indéfini.

L'Auteur commence par envisager les fonctions de Green et de Neumann de l'équation (1) pour un cylindre limité de hauteur H. Il est facile de trouver comment se prolongent analytiquement dans le cylindre indéfini les fonctions précédentes du cylindre limité. Ces fonctions prolongées ont une période 2H parallèle aux génératrices du cylindre.

Il est nécessaire maintenant de rappeler que, dans un espace fini et dans une aire finie, les fonctions de Green et de Neumann relatives à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = \Lambda u \tag{1}$$

pour l'espace et à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \lambda u \tag{2}$$

pour le plan, sont respectivement des fonctions méromorphes de $\Lambda$ et de $\lambda$; les pôles en nombre infini sont simples et correspondent à des valeurs réelles négatives (zéro étant de plus un pôle pour la fonction de Neumann). Désignons par $-\alpha_1^2$ la plus grande valeur de $\lambda$ correspondant à un pôle de la fonction de Green de l'équation (2) pour un contour qui va être la section droite du cylindre.

Ceci posé, considérons le cylindre indéfini parallèle à l'axe des $\zeta$ à la fonction de Green. M. Bouligand impose, outre les conditions classiques, la condition de s'annuler *régulièrement* à l'infini. Il établit alors que, si

$$A + \alpha_1^2 > 0,$$

il y a une fonction de Green et il est bien remarquable que cette

fonction de Green du cylindre indéfini puisse s'exprimer à l'aide de la fonction de Green de la section droite. Au contraire, si

$$A + \alpha_1^2 < 0,$$

il n'y a pas de fonction de Green. Quant à la fonction de Neumann, elle n'existe que si A est positif.

M. Bouligand donne ensuite les développements des fonctions de Green et de Neumann en fonctions fondamentales, et il tire de là le résultat très intéressant que ces fonctions ne peuvent être méromorphes en A; dans des conditions différentes, M. Picard avait antérieurement donné un exemple de cette circonstance singulière en désaccord avec le cas classique de l'équation de Fredholm.

A la suite de M. Paul Lévy, M. Bouligand indique ensuite différentes équations fonctionnelles curieuses entre la fonction de Green du cylindre et celle de sa section droite. Il aborde enfin la discussion du problème de Dirichlet pour l'équation (1); le fait que le domaine est infini change ici encore la nature des solutions. Si

$$A + \alpha_1^2 > 0,$$

le problème de Dirichlet, limité à la recherche des solutions bornées et régulières, a une solution et une seule, mais les choses se passent autrement dans le cas où

$$A + \alpha_1^2 < 0.$$

Il faut alors faire des hypothèses spéciales, d'ailleurs très naturelles, sur la façon dont les données à la surface se comportent à l'infini. Même alors, le problème est en général impossible et M. Bouligand donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse le résoudre; il introduit dans son Analyse des fonctions de Green généralisées.

Nous en avons dit assez pour montrer l'intérêt et l'importance des résultats obtenus par M. Bouligand. Ce Mémoire, qui témoigne d'une connaissance approfondie des travaux récents sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique, apporte une remarquable contribution à l'étude, peu abordée jusqu'ici, des problèmes de Dirichlet et de Neumann pour le cas d'un espace

infini, ou (ce qui reviendrait au même dans le cas actuel après une transformation préalable) pour le cas d'un volume fini, mais où les coefficients de l'équation et où la surface limite présenteraient des singularités. Il est juste de rappeler que, dans le cas de l'équation de Laplace et pour un volume fini, M. Lebesgue avait donné un exemple extrêmement curieux où le problème classique de Dirichlet n'avait pas de solution.

M. Bouligand a fait preuve, dans son travail, d'un esprit curieux et inventif; on peut beaucoup attendre pour l'avenir de ce jeune géomètre.

*La R.*

---

VALIRON (GEORGES). — SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE NUL ET D'ORDRE FINI ET EN PARTICULIER LES FONCTIONS A CORRESPONDANCE RÉGULIÈRE. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences mathématiques*, soutenue le 20 juin 1914 sous la présidence de M. EMILE PICARD. 1 vol., v-142 pages. Toulouse, Édouard Privat, 1913.

La théorie des fonctions entières a été très étudiée dans ces vingt dernières années; le but principal de ces études a été de préciser les analogies et les différences avec les polynomes, en ce qui concerne en particulier les relations entre le mode de croissance de la fonction et la densité asymptotique de ses zéros. Les résultats obtenus par M. Hadamard et par M. Borel, à l'occasion de l'étude approfondie du théorème célèbre de M. Picard, ont été précisés successivement par MM. Jensen, Lindelöf, Boutroux, Wiman, Blumenthal, Denjoy, Littlewood. Après ces travaux, un grand nombre de points se trouvaient élucidés et il semblait bien que les questions restant à résoudre devaient être exceptionnellement difficiles. On doit donc admirer le courage avec lequel M. Valiron n'a pas craint de s'attaquer à un tel sujet et la pénétration dont il a dû faire preuve pour apporter non seulement de nombreux et intéressants compléments sur des points de détail, mais encore quelques idées véritablement neuves.

C'est surtout à l'étude des fonctions entières d'ordre nul que s'est attaché M. Valiron; il a aussi appliqué les méthodes qu'il a

créées à l'étude de certains problèmes concernant les fonctions d'ordre fini.

Le résultat le plus caractéristique par son élégance et par sa simplicité paraît être le suivant : pour les fonctions entières d'ordre nul à croissance suffisamment lente (d'une manière précise croissant au plus aussi vite que $e^{h(\log r)^2}$, $h$ constante), on peut associer deux à deux les zéros des deux fonctions $f(z)$ et $f(z)+a$ de telle manière que le rapport des zéros associés tende vers l'unité lorsque leur module augmente.

Le même résultat s'applique aux fonctions $f(z)+\varphi(z)$ et $f(z)+\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$, $\varphi$ étant une fonction entière à croissance suffisamment lente (ou un polynome). Ces résultats ne subsistent pas, comme M. Valiron le montre par un exemple, pour toutes les fonctions entières d'ordre nul. Une catégorie importante de fonctions se trouve ainsi délimitée, dont les zéros possèdent une sorte de continuité asymptotique analogue à la continuité des zéros des polynomes, les fonctions d'ordre inférieur jouant asymptotiquement le même rôle qu'un polynome à coefficients infiniment petits par rapport à un polynome donné. Une application intéressante de cette théorie est faite à la jonction connue $\Sigma q^{n^2} z^n$.

Les résultats relatifs à la *régularité* de la correspondance entre les trois fonctions fondamentales qui interviennent dans la théorie (module maximum de la fonction, terme maximum de la série, module du $n^{\text{ième}}$ zéro) ne sont pas moins importants, mais sont difficiles à résumer brièvement.

C'est l'introduction systématique de l'expression du terme de module maximum en fonction de son rang qui a permis à M. Valiron de simplifier à la fois les recherches et les résultats; dans son premier paragraphe, il obtient ainsi d'une manière très simple un résultat équivalent à un théorème obtenu par M. Hadamard à l'aide de longs calculs. Dans le même ordre d'idées, M. Valiron propose une intéressante classification des fonctions d'ordre nul et obtient pour les correspondances entre les trois fonctions des résultats, qui, dans des cas relativement étendus, sont particulièrement simples. Abordant ensuite le cas général des fonctions d'ordre nul, il obtient, par la comparaison d'une fonction quelconque avec les fonctions régulières précédemment étudiées,

des résultats qui ne sont pas sans analogie avec ceux que M. Blumenthal a déduits de sa théorie des fonctions types, mais qui sont présentés sous une forme à la fois plus simple et plus précise.

Pour les fonctions d'ordre fini, les méthodes employées sont les mêmes; le résultat le plus saillant est la démonstration rigoureuse d'un théorème général énoncé sans démonstration, comme vraisemblable, par M. Littlewood.

Il resterait encore à signaler diverses remarques particulières dont certaines sont fort intéressantes, l'étude des fonctions orientées, dont la considération sous la forme générale que leur donne M. Valiron est neuve; il s'agit des fonctions pour lesquelles les arguments des zéros tendent vers une limite; de ce nombre est la fonction célèbre de Riemann, à laquelle sont appliqués les résultats obtenus. A signaler aussi une très intéressante étude critique de la théorie des langues infinies due à M. Boutroux.

Comme on le voit par cette analyse, le travail de M. Valiron est extrêmement riche en aperçus ingénieux et en résultats originaux. Si les énoncés définitifs et simples n'y sont pas très nombreux, cela tient à la nature du sujet, dans lequel les plus beaux résultats sont connus depuis longtemps; mais, malgré cette très grande difficulté inhérente au sujet, M. Valiron a su dégager deux ou trois théorèmes qui lui appartiennent en propre et qui, par leur élégance et leur simplicité, méritent de devenir classiques.

*La R.*

---

VÉRONNET (Alex.). — Les Hypothèses cosmogoniques modernes. 1 vol., III-171 pages. A. Hermann et Fils, 1914.

L'étude des hypothèses cosmogoniques est un sujet si attrayant qu'à côté du Livre de H. Poincaré, d'allure hautement mathématique, il y avait place pour un Ouvrage donnant, en langage ordinaire et sans formules, une étude d'ensemble des différentes idées modernes sur l'origine du monde. C'est cet Ouvrage que nous offre M. Véronnet. L'Auteur s'attache surtout à mettre en relief l'hypothèse de Kant, à laquelle il donne de beaucoup sa préférence, au détriment de celle de Laplace dont il fait le procès.

D'après Kant, le chaos initial dont est sorti le système solaire, serait parti du repos, d'où, comme le remarque H. Poincaré, contradiction formelle avec un principe fondamental de la Mécanique : le principe des aires exige, en effet, que le *moment de rotation* d'un système en mouvement reste toujours constant : il est donc impossible que le système solaire, dont le moment de rotation n'est pas nul, soit sorti d'un système initialement en repos.

Cette objection capitale, qui semble dès le début mettre en complet échec la théorie de Kant, M. Véronnet en fait au contraire, fort ingénieusement, un argument en sa faveur : il fait observer que l'*ensemble* des systèmes stellaires a pu naître d'une nébuleuse initialement en repos; dans ce cas, chaque système stellaire pris individuellement peut avoir un moment de rotation non nul, mais la somme de tous ces moments est nulle pour l'ensemble. Que ce fût là la pensée même de Kant, c'est ce qui ne ressort pas avec évidence du texte du philosophe allemand. Quoi qu'il en soit, l'interprétation de M. Véronnet répond victorieusement à l'objection précédente qui paraissait, à première vue, sans réplique.

Le Chapitre consacré à l'hypothèse de Laplace ressemble à un réquisitoire contre l'Auteur de l'*Exposition du Système du Monde*. M. Véronnet lui fait toute une série d'objections, la plupart très justes, il faut le reconnaître, mais d'une extrême sévérité. Notamment, il semble bien difficile de se représenter la nébuleuse solaire initiale avec sa très forte condensation centrale, Soleil déjà presque tout formé, tournant *tout d'une pièce et chaude;* mais c'est surtout contre les fameux anneaux de Laplace que s'élève l'Auteur : il paraît bien impossible que de tels anneaux puissent subsister, à moins qu'ils ne soient formés de particules séparées se mouvant toutes suivant les lois de Képler; mais alors les anneaux seraient entièrement stables, comme ceux de Saturne, et c'est alors leur transformation en planètes qui deviendrait difficile à comprendre.

Assurément, ces objections sont très troublantes. Poincaré les avait faites aussi, moins sévèrement. Il semble donc préférable de revenir, avec H. Faye, à la manière de voir de Kant qui faisait naître les planètes à *l'intérieur* même de la nébuleuse et non dans des anneaux extérieurs.

Une autre théorie, se rattachant directement à celle de Kant, a été imaginée par M. du Ligondès : pour lui, le lambeau chaotique initial dont est né le système solaire ressemble à celui de Kant, mais *ses particules se meuvent dans tous les sens*, leurs vitesses étant distribuées *au hasard*. Ainsi M. du Ligondès n'est pas du tout en désaccord avec le principe des aires, comme l'est Kant, à moins d'interpréter sa théorie comme on l'a fait un peu plus haut. Mais M. Véronnet préfère, avec Kant, partir du repos : cela lui semble plus philosophique que d'admettre des mouvements initiaux, car « tout mouvement a besoin d'une cause qui l'explique ». Cet argument, je crois, ne convaincra pas tout le monde, et rien n'empêche de dire que c'est plutôt le repos que le mouvement qui demanderait à être expliqué, le repos n'étant, comme dit M. du Ligondès, qu'un cas particulier du mouvement.

Dans l'hypothèse de M. E. Belot, d'où, malgré son étrangeté, cet Auteur a su tirer des formules d'une étonnante précision, un tube-tourbillon serait venu choquer une nébuleuse amorphe avec une vitesse de $75000^{km}$ par seconde. Pour la raison qui vient d'être dite, une vitesse initiale, surtout aussi grande, semble inadmissible à M. Véronnet.

Au sujet de l'origine de la Lune, Sir G.-H. Darwin et M. T.-J.-J. See ont donné deux explications diamétralement opposées. Pour M. See, la Lune est un astre d'origine cosmique qui a été, à un certain moment, *capté* par la Terre, qui présentait à cette époque une atmosphère très étendue. Pour Darwin, au contraire, la Lune est un morceau de la Terre qui s'en est détaché à l'époque où celle-ci était encore liquide, le mécanisme du *frottement des marées* suffisant ensuite à expliquer l'éloignement progressif de notre satellite et le fait qu'il tourne toujours vers nous le même hémisphère. Assurément, l'origine de la Lune ne peut pas être à la fois celle que veut Darwin et celle que veut M. See. Mais, en matière de Cosmogonie comme en toute autre, il ne faut pas exiger d'une théorie qu'elle soit vraie, mais seulement qu'elle soit vraisemblable. Il y a donc lieu de retenir à la fois les deux belles théories : celle de la capture de M. See, et celle du frottement des marées de Darwin.

M. Véronnet consacre un dernier et important Chapitre à l'évolution du Soleil et de la Terre. L'origine de la chaleur solaire est la concentration et la contraction de ses éléments : c'est encore cette contraction qui entretient la chaleur de l'astre et l'empêche de se refroidir presque instantanément. L'Auteur, transformant les formules en nombres, conclut que le Soleil, définitivement constitué, ne doit pas remonter dans le temps à plus de 2 millions d'années environ.

Mais on sait que les géologues, se basant sur l'épaisseur des dépôts qui se forment actuellement, demandent, pour expliquer la formation des sédiments terrestres, plusieurs centaines de millions d'années. Faye avait déjà imaginé, pour trancher la difficulté, de faire naître la Terre avant le Soleil; mais alors les animaux qui vivaient aux époques les plus reculées auraient vécu sans Soleil, chose difficile à admettre. Très judicieusement, M. Véronnet retourne, avec M. Wolf, l'argument des géologues contre l'école des causes actuelles : les phénomènes actuels étant insuffisants, on doit conclure qu'ils se manifestaient aux temps géologiques avec une intensité incomparablement plus grande. A ces époques, en effet, les vallées des fleuves atteignaient plusieurs kilomètres de largeur : pour comprendre combien devait être formidable l'érosion due à ces eaux impétueuses, il suffit de considérer la quantité de dépôts boueux que charrient nos fleuves en temps d'inondation, et de la comparer avec leur limpidité habituelle. Il semble donc qu'on puisse réduire, sans contradiction géologique, l'âge de la Terre à 2 millions d'années, comme on l'a fait pour le Soleil.

Je veux signaler encore l'intéressante explication que donne M. Véronnet des périodes glaciaires. En vertu de l'excentricité de l'orbite terrestre, les saisons ne sont pas exactement égales : actuellement l'été est de 8 jours plus long que l'hiver pour l'hémisphère nord, et de 8 jours plus court pour l'hémisphère sud. Il en résulte que notre hémisphère est, en moyenne, plus chaud que l'hémisphère sud. Dans 13000 ans ce sera l'inverse à cause de la précession des équinoxes : notre hémisphère sera moins chaud que l'hémisphère sud; or c'est dans ce dernier que sont situés tous les grands océans : d'où évaporation plus intense de l'eau des mers, qui viendra se condenser en pluies abondantes sur nos

continents refroidis. Or les géologues admettent en général qu'il suffit d'un abaissement de quelques degrés et d'un régime très humide pour expliquer tous les phénomènes caractéristiques d'une période glaciaire. Les époques glaciaires reviendraient ainsi périodiquement tous les 26000 ans. L'Auteur réfute une objection qui se présente d'elle-même : il est bien vrai qu'actuellement notre été est plus long que notre hiver, mais le Soleil étant plus loin de nous en été qu'en hiver, il y a exactement compensation, et la quantité de chaleur reçue est la même pour les deux hémisphères : seulement elle n'est pas utilisée de la même façon, avec le même « rendement ». Pour l'hémisphère sud, l'écart extrême des températures est plus grand, l'été est plus chaud et l'hiver est plus froid que chez nous, la perte est plus grande et la température moyenne plus basse.

M. Véronnet termine par quelques considérations sur l'évolution des étoiles et des nébuleuses, en exposant à ce sujet les idées de M. Arrhenius qui compare l'Univers à une vaste machine thermique où les soleils joueraient le rôle de sources chaudes et les nébuleuses celui de sources froides. M. Arrhenius donne d'excellentes raisons pour que le « rendement » de cette machine thermique soit très élevé, mais, quoi qu'on fasse, il semble bien difficile, comme l'avait déjà conclu H. Poincaré, d'échapper complètement au principe de dégradation de l'énergie et à la « mort calorifique ».

Comme conclusion générale à son étude, M. Véronnet choisit dans les théories des divers auteurs les idées à conserver et les groupe en un tout assez cohérent, en prenant comme point de départ la nébuleuse primitive de Kant, dont les idées ont nettement sa préférence.

Même si elles ne partagent pas l'opinion intransigeante de l'Auteur relativement à l'hypothèse de Laplace, les personnes qui s'intéressent aux choses de la Cosmogonie étudieront avec plaisir et fruit cet Ouvrage fort intéressant et d'une lecture agréable.

H. Vergne.

SERRET (J.-A.). — Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung Nach Axel Harnacks Ueber setzung. Vierte und fünfte Auflage bearbeitet von Georg Scheffers. Dritter Band : *Differentialgleichungen und variationsrechnung*. Mit 64. Figuren im Text. 1 vol. in-8, XIV-735 pages. Leipzig und Berlin, B.-G. Teubner, 1914.

Cet Ouvrage, qui honore la Maison Gauthier-Villars, à Paris, a été l'objet d'Analyses dans ce *Bulletin*. Les Volumes publiés en français sont signalés en 1879 (p. 248), en 1894 (p. 241) et en 1900 (p. 195). Les traductions allemandes du Livre sont signalées en 1897 (p. 181), en 1899 (p. 330), en 1906 (p. 50), en 1908 (p. 84) et en 1911 (p. 196).

L'Ouvrage étant bien connu par ces diverses Analyses, il suffit à présent d'indiquer le Volume allemand qui contient la théorie des équations différentielles et le calcul des variations et que vient d'éditer la Maison B.-G. Teubner, à Leipzig.

Er. L.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXXVIII.

53176 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie quai des Grands-Augustins, 55.

# TABLES

DES

# MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXVIII; 1914. — PREMIÈRE PARTIE.

---

## TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

---

### COMPTES RENDUS ET ANALYSES.


Pages.

ADHÉMARD (R. D'). — Leçons sur les principes de l'Analyse. Avec une Préface de M. Serge Bernstein (Tome II) ..... 261-263

ANNUAIRE POUR L'AN 1914, publié par le Bureau des Longitudes ..... 92-9

APPELL (P.). — Éléments d'Analyse mathématique ..... 21-23

AUERBACH (F.). — Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, I, 1913. 27-31

BAER (W.-S.). — Beitrage zum Waringschen Problem ..... 219-220

BOLYAI (Wund J.). — Geometrische Untersuchungen mit Untertützung der ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von Paul Stäckel ..... 257-261

BOREL (E.). — Introduction géométrique à quelques théories physiques. 289-299

BOULIGAND (G.). — Sur les fonctions de Green et de Neumann du cylindre (Thèse) ..... 342-345

BRATU (G.). — Figures d'équilibre d'un fil dont les éléments se repoussent mutuellement (Thèse) ..... 240-244

BURALI-FORTI (C.) et MARCOLONGO (R.). — Analyse vectorielle générale (Vol. II) ..... 245-248

BÜTZBERGER (F.). — Ueber bizentrische Polygone Steinersche Kreis- und Kungelreihen und die Erundung der Inversion ..... 214-215

CAHEN (E.). — Théorie des nombres ..... 144-151

CHAPELON (J.). — Sur les relations entre les nombres des classes de formes quadratiques binaires de déterminant négatif ..... 301-302

CHÂTELET (A.). — Leçons sur la théorie des nombres ..... 174-178

Pages.
CULLIS (C.-E.). — Matrices and Determinoïds..... 46-59
DARBOUX (G.). — Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal: Première Partie (2e édition)..... 33-36
DELASSUS (E.). — Leçons sur la dynamique des systèmes matériels... 212-214
DENIZOT (A.). — Das Foucaultsche Pendel und die Theorie der relativen Bewegung..... 281-283
DICKSON (L.-E.). — On Invariants and the Theorie of Numbers..... 334-342
DIENES (P.). — Leçons sur les singularités des fonctions analytiques. 129-140
DINGELDEY (F.). — Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential und Integral rechnung: Zweiter Teil..... 45-46
DOLBNIA (J.). — Œuvres mathématiques..... 97-100
DUHEM (P.). — Le Système du Monde: Histoire des doctrines cosmogoniques de Platon à Copernic (Tome I)..... 193-199
ENGELHARDT (P.). — Untersuchungen über die im Schlusswort des Lie'schen Werkes, *Geometrie der Berührungstransformationen* angedeuteten Probleme..... 36-38
FESSENKOFF (B.). La lumière zodiacale (Thèse)..... 312-316
FITZ PATRICK (J.). — Exercices d'arithmétique: énoncés et solutions.. 91-92
GANS (R.). — Einführung in die Vectoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik (Auflage 3)..... 249-250
GARAVITO (J.). — Aberraciòn y refracciòn..... 302-304
GOT (Th.). — Questions diverses concernant certaines formes quadratiques ternaires indéfinies et les groupes fuchsiens arithmétiques qui s'y rattachent (Thèse)..... 151-153
GRAVÉ (D.). — Cours élémentaire de Théorie des nombres..... 216-219
GUIOT (J.). — Le calcul vectoriel et ses applications à la Géométrie réglée..... 185-286
GULDBERG (A.). — *Voir* WALLENBERG (G.).
HAAG (J.). — Cours complet de Mathématiques spéciales (Tome I). — Exercices du Cours de Mathématiques spéciales (Tome I)..... 114-117
HALSTED (G.-B.). — Géométrie rationnelle. Traité élémentaire de la science de l'espace..... 329-334
HAUSZLEITER (H.). — Zur Theorie der Pfaffschen Systeme..... 172-173
HEATH (Sir T.-L.). — Archimedes' Werke (traduction allemande)..... 300-301
HENSEL (K.). — Zahlentheorie..... 77-85
HILBERT (D.). — Théorie des corps de nombres algébriques..... 41-43
HOBSON (E.-V.). — Squaring the Circle..... 153-154
HOBSON (E.-V.). — John Napier and the invention of Logarithms, 1614. 318-319
INSTITUT DE FRANCE. ACADÉMIE DES SCIENCES. — Procès-verbaux des séances de l'Académie tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois d'août 1835:
Tome I..... 65-75
Tome II..... 225-236
KAISER (A.). — Weiteres zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter ordnung..... 25-26
KNOBLAUCH (J.). — Grundlagen der Differentialgeometrie..... 204-208
KNOPP (K.). — Funktionentheorie (2 vol.)..... 215
LECAT (M.). — Bibliographie du Calcul des variations..... 135
LECORNU (L.). — Cours de Mécanique professé à l'École Polytechnique. 272-279

Pages.
LORIA (G.). — Le scienze esatte nell'antica Grecia ..... 101-106
MANSION (P.). — Abriss der Theorie der Hyperbelfunktionen nebst einer rein analytischen Theorie der Kriesfunktionen ..... 43-44
MARCOLONGO (R.). — *Voir* BURALI-FORTI.
MEYER (W.-F.). — Differential- und Integralrechnung (Band. I, Auflage 2) ..... 236-239
MITZSCHERLING (A.). — Das problem der Kreisteilung ..... 86-91
MOORS (B.-P.). — Étude sur les formules (spécialement de Gauss) servant à calculer des valeurs approximatives d'une intégrale définie. 44-45
NETTO (E.). — Elementare Algebra (Auflage 2) ..... 250
OSGOOD (W.). — Topies in Theorie of Functions of several complex variables ..... 334-342
PASCH (M.). — Lecciones de Geometria moderna ..... 119-111
PASCH (M.). — I. Grundlagen der Analysis. — II. Veränderliche und Funktion ..... 266-270
PETREN (Louise). — Extension de la méthode de Laplace à certaines équations ..... 85-86
PETROVITCH (S.). — Cours de Mécanique rationnelle (Tome III) ..... 316-318
PEZZO (P. DEL). — Principi di Geometria proiettiva ..... 140-144
PICARD (E.). — Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft ..... 38-41
POINCARÉ (H.). — Analyse de ses travaux scientifiques ..... 319
RIESZ (F.). — Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues ..... 305-312
ROTHE (R.). — *Voir* AUERBACH (F.).
ROUYER (L.). — Sur la déformation des quadriques et les surfaces conjuguées par rapport à un complexe du second degré (Thèse) ..... 239-240
RUNGE (C.). — Graphical Methods ..... 111-115
SALOMON (C.). — Étoiles magiques à 8, 16 et 20 branches et Rosaces hypermagiqnes ..... 304
SECO DE LA GARZA (R.). — Les Nomogrammes de l'ingénieur ..... 60-64
SERRET (J.-A.). — Lehrbuch der Differential und Integralrechnung ..... 352
SILBERSTEIN (M.). — Vectorial Mechanics ..... 284-286
STÄCKEL (P.). — Leonardi Euleri Mechanica sive motus scientia analytice exposita ..... 5-21
STAUDE (O.). — Analytische Geometrie der Kubischen Kegelschnitte ..... 209-211
TANNERY (P.). — Mémoires scientifiques (Tomes I et II) ..... 200-204
VALCOVICI (V.). — Ueber diskontinuierliche Flussigkeitsbewegungen mit zwei freien Strahlen (Thèse) ..... 244-245
VALIRON (G.). — Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini, et en particulier les fonctions à correspondance régulière ..... 345-347
VERNERI (J.). — De Triangulis sphæricis libri quatuor ..... 76-77
VÉRONNET (A.). — Les hypothèses cosmogoniques modernes ..... 347-351
VIVANTI (G.). — Lezioni di Analysi infinitesimale ..... 107-109
VIVANTI (G.). — Esercizi di Analysi infinitesimale ..... 109-110
VOLTERRA (V.). — Leçons sur les fonctions de lignes professées à la Sorbonne en 1912 ..... 161-172
VOLTERRA (V.). — Drei Vorlerungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik. Deutsch von Ernst Lama ..... 270-272
WALLENBERG (G.) und GULDBERG (A.). — Theorie der linearen Diffe-

Pages.
renzengleichung zweiter ordnung ..... 23-24
WILSON (E.). — Advanced Calculus..... 263-265
WINKELMANN (M.). — Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik ..... 279-281
ZEUTHEN (H.-G.). — Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter.. 199-200
ZORETTI (L.). — Leçons de Mathématiques générales ..... 178-185
Bulletin bibliographique. — 32, 64, 127-128, 160, 191-192, 255-256, 286, 288..... 328

## MÉLANGES.

APPELL (P.). — Sur un nouveau mode de développement d'un nombre en fraction continue..... 118-120
APPELL (P.). — Sur des intégrales définies se rattachant au logarithme intégral ..... 327-328
DARMOIS (G.). — Sur les courbes à torsion constante..... 154-157
DOUBLET (E.). — L'abbé Bossut. A l'occasion du centenaire de sa mort, 95-96, 121-125, 158-160, 186-190..... 220-224
GARNIER (R.). — Sur la formation de l'équation différentielle de la fonction $p(x)$..... 251-255
NAPIER (J.). — Célébration du troisième centenaire de J. Napier, à Edimbourg, en juillet 1914 ..... 125-126
PICARD (E.). — Quelques réflexions sur certains résultats de Henri Poincaré concernant la Mécanique analytique..... 320-326
WEIERSTRASS. — Médaille Weierstrass (1916)..... 31-32

# TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

## D'ANALYSES.


Baillehache (R. de). 31.
Bilimovitch (A.). 318.
Bioche (Ch.). 215.
Blondel (A.). 281.
Bottasso (Matteo). 248.
Boulanger (A.). 26, 44, 46, 75, 92, 236.
Bouligand (G.). 185.
Cahen (E.). 43, 85, 178, 215.
Cartan (E.). 151.
Châtelet (A.). 219, 239.
Cotty (Gaston). 279.
Darmois (G.). 41, 200.
Deltheil (R.). 111.
Denjoy (Arnaud). 140.
Doublet (E.). 21.
Duhem (P.). 77, 204, 301.
Dulac (Henri). 100.
Fehr (H.). 110.
Gallucci (G.). 144.
Giraud (Georges). 261.
Got (Th.). 211, 270.
Goupil (A.). 113.
Guichard (C.). 36.
Hadamard (J.). 334.
Hennequin (A.). 117.
Janet (Maurice). 245.
La R. 153, 220, 240, 244, 302, 316, 345, 347.
Lattès (S.). 38, 109, 342.
Lebon (Er.). 23, 93, 113, 272, 319, 352.
Le Vavasseur (R.). 59, 208.
Lévy (Paul). 172.
Loria (Gino). 91, 199.
Mascart (Jean). 283.
Montel (Paul). 265.
Nörlund (N.-E.). 24.
Ouivet (Ed.). 154.
Pérès (Joseph). 106, 312.
Tripier (H.). 64.
Vergne (H.). 45, 86, 214, 263, 299, 304, 351.
Véronnet (Alex.). 186, 250, 286.
Vessiot (E.). 173.


FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXXVIII.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,

55508 Quai des Grands-Augustins, 55.

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.

# COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président.*

E. PICARD.

P. APPELL.

E. BOREL.

N.....

A. GUILLET, *secrétaire.*

## AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Ernest Lebon*, Secrétaire de la Rédaction, rue des Écoles, 4 *bis*, Paris, 5e.

53476 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

3

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. APPELL, E. CARTAN, J. DRACH, P. DUHEM, C. GUICHARD, J. HADAMARD,
G. KŒNIGS, ER. LEBON, S. RINDI, H. G. ZEUTHEN, ETC.,

**Sous la direction de la Commission des Hautes Études.**

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY
ET DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY.

*DEUXIÈME SÉRIE.*

**TOME XXXVIII. — ANNÉE 1914.**

(XLIX^e VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1914

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.


## SECONDE PARTIE.

### REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

#### PRACE MATEMATYCZNO-FIZYCZNE.

Tome XXII; 1911 [1].

*Lichtenstein* (*L.*). — Sur une condition d'intégrabilité des binomes différentiels et sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions analytiques [en polonais (1-17)].

Soient :

$$\delta_x F(xy) = F(x+h, y) - F(xy),$$
$$\delta_y F(xy) = F(x, y+h) - F(xy).$$

L'auteur démontre, en s'appuyant sur une proposition connue de M. Osgood le théorème suivant :

*Soit* $T_0$ *un domaine simplement connexe, limité par un contour* $S_0$ *à courbure continue; soient* $p(xy)$, $q(xy)$ *deux fonctions continues réelles ou complexes des variables réelles* $x$ *et* $y$.

*Si, en tout point de* $T_0$,

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} [\delta_x q(xy) - \delta_y p(xy)] = 0$$

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVII$_2$, p. 27-49.

*et si le module du binome*

$$\frac{1}{h}[\delta_x q(xy) - \delta_y p(xy)] \qquad (h \leqq h_0)$$

*est plus petit qu'une grandeur finie, d'ailleurs arbitraire, l'intégrale*

$$\int_C p(xy)\,dx + q(xy)\,dy,$$

*étendue à une courbe fermée* C *à l'intérieur de* $T_0$ *dont la courbure varie continuement, est égale à zéro.*

*On voit donc que l'existence des dérivées* $\frac{\partial p(xy)}{\partial y}$, $\frac{\partial q(xy)}{\partial x}$ *n'est pas une condition nécessaire pour que le binome* $p(xy)\,dx + q(xy)\,dy$ *soit une différentielle totale*. Le théorème est plus général que celui de M. Montel [Montel, *Sur les suites infinies de fonctions* (*Ann. de l'École Normale*, 1907)]. On déduit encore de là (¹) le théorème suivant :

Théorème. — *Soit* $f(z) = u(xy) + iv(xy)$ *une fonction bornée des variables* $x, y$, *qui est intégrable au sens de Riemann soit comme fonction de* $x$, *soit comme fonction de* $y$ *à l'intérieur d'un champ simplement connexe* $T_0$.

*Si, en chaque point de* $T_0$, *ont lieu les relations :*

$$f(z) = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{xy}^{x+h,y} f(z)\,dx = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{xy}^{x,y+h} f(z)\,dy,$$

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h}[i\delta_x f(z) - \delta_y f(z)] = 0 \qquad (h > 0),$$

*et si le module de la fonction*

$$\frac{1}{h}[i\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]$$

*est borné pour tout point* $(x, y)$ *à l'intérieur de* $T_0$ *et pour tout* $h$ *positif,* $f(z)$ *est alors une fonction analytique de la variable complexe* $z$.

De même on démontre :

*Soient* $p(x, y)$, $q(x, y)$ *des fonctions bornées de* $x$, $y$ *à l'intérieur de* $T_0$ *intégrables par rapport à* $x$ *et à* $y$ *au sens de Riemann. Si elles satisfont à*

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{(x,y)}^{(x+h,y)} p(x,y)\,dx = p(x,y), \qquad \lim_{h=0} \int_{(x,y)}^{(x,y+h)} q(x,y)\,dy = q(x,y),$$

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h}[\delta_x q(x,y) - \delta_y p(x,y)] = 0$$

*et si le module de*

$$\frac{1}{h}[\delta_x q(x,y) - \delta_y p(x,y)]$$

---

(¹) Comparer une précédente Note de l'auteur (*C. R. Acad. Sc.*, 2 mai 1910).

*est borné pour tout point* $(x, y)$ *à l'intérieur de* $T_0$ *et pour tout* $h > 0$, $p(x, y)$, $q(x, y)$ *sont alors les dérivées partielles d'une fonction* $\Phi(x, y)$ :

$$p(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad q(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Les fonctions $p(x, y)$, $q(x, y)$ ne sont pas nécessairement continues, donc le binome différentiel

$$p\,dx + q\,dy = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy$$

ne peut pas être toujours intégré le long d'une courbe C.

*Sierpinski* (*W.*). — Sur un théorème de la théorie des ensembles et ses applications à l'analyse des fonctions discontinues [en polonais (19-23)].

THÉORÈME. — *Un ensemble* (N) *de points de l'intervalle* $\delta = (a, b)$, *qui n'appartiennent à aucun des ensembles fermés* $F_1, F_2, F_3, \ldots$, *d'une collection dénombrable est fini, dénombrable ou de la puissance du continu* (1).

THÉORÈME. — *Pour toute fonction* $f(x)$ *semi-continue supérieurement* (Baire) *dans l'intervalle* $(a, b)$, *l'ensemble des solutions de l'équation* $f(x) = k$, $k$ *étant fixe, est fini, dénombrable ou de même puissance que le continu.*

De là, le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour toute fonction* $\varphi(x)$ *dans l'intervalle* $(a, b)$, *l'ensemble des points où l'oscillation de la fonction est égale à* $k$, $k$ *étant fixe, est fini, dénombrable ou de la puissance du continu.*

La conclusion s'étend (pour $k = 0$) aux points où la fonction est continue.

*Banachiewicz* (*T.*). — Tables astronomiques pour l'Observatoire de Varsovie [en polonais (25-34)].

*Zérawski* (*K.*). — Notes de Géométrie infinitésimale. Notes V, VI et VII (*voir* 1907) [en allemand (35-58)].

NOTE V. — Formules relatives à la déformation générale des surfaces :

Soient deux surfaces rapportées aux mêmes paramètres $u$, $v$, qui se correspondent point par point

$$(1) \quad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad ds'^2 = E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2.$$

On peut trouver un système orthogonal auquel correspond un autre système

(1) On sait que la question relative à l'existence de puissances intermédiaires entre la première et celle du continu n'est pas encore résolue d'une manière générale.

orthogonal, soit

$$(2) \qquad \varphi(u, v) = \text{const.}, \qquad \bar{\varphi}(u, v) = \text{const.}$$

ce système.

Alors

$$(3) \qquad ds^2 = \frac{d\varphi^2}{\Delta\varphi} + \frac{d\bar{\varphi}^2}{\Delta\bar{\varphi}}, \qquad ds'^2 = \bar{\rho}\frac{d\varphi^2}{\Delta\varphi} + \rho\frac{d\bar{\varphi}^2}{\Delta\bar{\varphi}};$$

$$\Delta f = \frac{E\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + G\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2};$$

on voit que

$$(4) \qquad ds'^2 = \rho\, ds^2 + (\bar{\rho} - \rho)\frac{d\varphi^2}{\Delta\varphi}$$

et

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} E' &= \rho E + (\bar{\rho} - \rho)\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{\Delta\varphi}, \\ F' &= \rho F + (\bar{\rho} - \rho)\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\Delta\varphi}, \\ G' &= \rho G + (\bar{\rho} - \rho)\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}{\Delta\varphi}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules peuvent être interprétées géométriquement : On se donne l'élément de S, donc EFG en fonction de $u, v$; on choisit une famille de courbes $\varphi = \text{const.}$ et l'on se donne pour $\rho$, $\bar{\rho}$ des fonctions déterminées de $u$. $v$. Alors les relations (5) donnent l'élément linéaire d'une surface S′ qui est déduite de S par une déformation : on l'effectue en choisissant un système orthogonal sur S et déformant la surface pour que le rapport $\frac{ds'^2}{ds^2}$ pour les deux familles soit égal à $\bar{\rho}$ et $\rho$.

Soit

$$\nabla(\Phi, \psi) = \frac{E\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + G\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}}{EG - F^2}$$

et

$$\theta(\Phi, \psi) = \frac{D(\Phi, \psi)}{D(n, v)}\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Alors

$$E'G' - F'^2 = \rho\rho(EG - F^2), \qquad \nabla'(\psi, \Phi) = \frac{1}{\rho}\nabla(\Phi, \psi) + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\bar{\rho}}\right)\frac{\theta(\varphi, \Phi)\,\theta(\varphi, \psi)}{\Delta\varphi},$$

$$\theta'(\Phi, \psi) = \frac{1}{\sqrt{\rho\rho}}\theta(\Phi, \psi).$$

A l'aide de ces formules on trouve l'expression de $\cos\Omega'_{\Phi,\psi}$, $\sin\Omega'_{\Phi,\psi}$ exprimés au moyen de $\cos\Omega_{\Phi\psi}$, $\sin\Omega_{\Phi\psi}$, $\rho$ et $\bar{\rho}$.

L'auteur considère une nouvelle déformation de la surface S′ en une surface S″ définie par $\varphi'(uv)$ $\bar{\varphi}'(uv)$, $\rho'(uv)$ et $\bar{\rho}'(uv)$. Il calcule les éléments de la

déformation résultante, c'est-à-dire le système orthogonal $\psi(u, v)\ \overline{\psi}'(u, v)$ et les fonctions $\sigma$ et $\overline{\sigma}$.

Il résout les deux problèmes :

1. Dans quelles conditions la déformation résultante constitue-t-elle une transformation conforme ?

2. Quelles sont les conditions pour que les deux déformations soient permutables ?

Note VI. — Sur le calcul de certaines grandeurs géométriques pour des familles de courbes définies sur une surface par une équation différentielle quadratique de premier ordre.

L'auteur effectue quelques calculs élémentaires de la théorie des surfaces en se servant de certains invariants.

Note VII. — Sur certaines familles de représentations conformes des surfaces :

L'auteur étudie de tels systèmes d'invariants de courbure (Biegungs-invarianten) qui ne sont pas altérés même par des familles de transformations conformes.

*Sierpinski* (*W.*). — Démonstration élémentaire du théorème de Weierstrass et de la formule d'interpolation de Borel. L'auteur suit une voie arithmétique. [en polonais (59-68)].

La fonction $|x|$ est représentée comme limite d'une suite uniformément convergente de fonctions rationnelles.

Théorème. — *Pour* $-1 \leqq x \leqq 1$ *et pour toute valeur de l'entier* $n$, *on a*

$$0 \leqq |x| - x\frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1} < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

*Corollaire.* — Pour $n$ et $x$ entiers, $-s \leqq x \leqq s$, on a

$$0 \leqq |x| - x\frac{(s+x)^n - s^n}{(s+x)^n + s^n} < \frac{2s}{\sqrt{n}}.$$

Donc, dans tout intervalle fini $(a, b)$, on a uniformément

$$(1) \qquad |x| = \lim_{n=\infty} x\frac{(s+x)^n - s^n}{(s+x)^n + s^n} \qquad \text{pour} \qquad s \geqq |a|, \qquad s \geqq |b|$$

ou bien aussi

$$(2) \qquad |x| = \lim_{k=\infty} x\frac{(k+x)^{k^3} - k^{k^3}}{(k+x)^{k^3} + k^{k^3}}$$

dans tout intervalle fini.

D'autre part, toute fraction rationnelle, dont le dénominateur ne s'annule ni à l'intérieur, ni aux limites d'un intervalle fini $(a, b)$, est développable dans cet intervalle en une série de polynomes uniformément convergente.

Car, soit

$$\psi(x) \geqq \delta, \qquad \psi(x) \leqq 2d + \delta.$$

Alors

$$\frac{\mathfrak{F}(x)}{\psi(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{F}(x)}{d+\delta}\left(\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right)^k.$$

En appliquant ceci au second membre de (1), c'est-à-dire en prenant

$$\mathfrak{F}(x) = x[(s+x)^n - s^n], \qquad \psi(x) = (s+x)^n + s^n$$

et

$$(a, b) = (-s, +s),$$

on obtient un polynome (dépendant des entiers $s$, $m$, $n$)

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{x[(s+x)^n - s^n]}{(2^{n-1}+1)s^n} \left(\frac{2^{n-1}s^n - (s+x)^n}{(2^{n-1}+1)s^n}\right)^k = \mathrm{W}(x),$$

tel que pour $m$, $n$ suffisamment grands, on ait [dans $(-s_1, +s)$],

$$\big|\,|x| - \mathrm{W}(x)\,\big| < \varepsilon.$$

Soit maintenant

$$\varphi(x) = \left|\frac{x+1}{2}\right| + \left|\frac{x-1}{2}\right| - |x|,$$

fonction qui est égale à zéro pour $|x| \geqq 1$, à $1+x$ pour $-1 \leqq x < 0$, à $1-x$ pour $0 \leqq x \leqq 1$.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle

$$-1 \leqq x \leqq 1,$$

et posons

$$f_q(x) = \sum_{p=-q}^{q} f\left(\frac{p}{q}\right) \varphi(qx - p);$$

l'auteur démontre que $f_q(x)$ tend uniformément vers $f(x)$.

Prenons

$$s = 2q, \qquad n = 16s^2q^2, \qquad m = 2^n(2^n - 1)sq^2$$

et posons

$$\mathrm{P}_{p,q}(x) = \mathrm{W}\left(\frac{qx - p + 1}{2}\right) + \mathrm{W}\left(\frac{qx - p - 1}{2}\right) - \mathrm{W}(qx - p),$$

soit encore

$$\Pi_q = \sum_{p=-q}^{q} f\left(\frac{p}{q}\right) \mathrm{P}_{pq}(x).$$

Pour $q$ suffisamment grand, on a

$$|f(x) - \Pi_q(x)| < 2\varepsilon.$$

La fonction $f(x)$ est donc développée en série de polynomes uniformément convergente

$$f(x) = \Pi_1(x) + [\Pi_2(x) - \Pi_1(x)] + \ldots$$

dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$.

En outre, dans la formule d'interpolation de M. Borel, les polynomes $\mathrm{P}_{pq}(x)$ sont effectivement calculés.

L'auteur remarque que la méthode s'applique à un nombre quelconque de

variables et il indique les calculs pour le cas de deux variables, et obtient le développement d'une fonction continue de $x$, $y$ en une série uniformément convergente de polynomes.

*Miller* (*G.-A.*). — Extension du groupe au moyen des opérateurs d'ordre 2 et 4 [en anglais (69-71)].

Pour qu'un groupe H de l'ordre 4 puisse être étendu par $h$ opérateurs d'ordre 4 qui ont un carré commun de façon à obtenir un groupe de l'ordre $2h$, il faut et il suffit que H soit un groupe abélien d'ordre pair.

Pour qu'un groupe H de l'ordre $h$ puisse être étendu par $h$ opérateurs d'ordre 4 ayant $\frac{h}{2}$ carrés distincts de façon à obtenir un groupe d'ordre $2h$, il faut et il suffit que H comprenne un sous-groupe d'ordre $\frac{h}{2}$ composé de tous les opérateurs de H d'ordre impair et que le groupe d'isomorphisme de ce sous-groupe abélien comprenne un opérateur d'ordre 4 dont le carré est dans H et qui transforme chaque opérateur d'ordre impair en son inverse.

Pour qu'un groupe H d'ordre $h$ puisse être étendu par $\frac{3h}{4}$ opérateurs d'ordre 2 et par $\frac{h}{4}$ opérateurs d'ordre 4 de façon à obtenir un groupe d'ordre $2h$, il faut et il suffit que le groupe d'isomorphisme cogrédient de H soit un *fourgroup*.

*Axer* (*A.*). — Calculs asymptotiques concernant le nombre de décompositions de nombres en couples de facteurs sans puissance, d'exposants donnés [en polonais (73-102)].

Soit $\chi_\lambda(n)$ le nombre de facteurs de $n$, non divisibles par une puissance d'exposant $\lambda$; $n$ étant entier et $\lambda = 2, 3, \ldots$.

La formule asymptotique

$$(1)\qquad X_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{x} \chi_\lambda(n) = \frac{1}{\zeta(\lambda)} x \log x - \left[\frac{2C-1}{\zeta(\lambda)} - \frac{\lambda\zeta'(\lambda)}{\zeta^2(\lambda)}\right] x + \begin{cases} O(\sqrt{x}\log x) & \text{pour} \quad \lambda = 2 \\ O(\sqrt{x}) & \text{pour} \quad \lambda = 3 \end{cases}$$

a été démontrée autrefois par Mertens pour $\lambda = 2$, et par Gegenbauer pour un $\lambda$ quelconque; cette dernière démonstration est élémentaire, elle consiste dans la substitution de l'expression connue de Dirichlet

$$(2)\qquad y \log y + (2C-1)y + O(\sqrt{y}) = T(y) = \sum_{n=1}^{y} \tau(n) = \sum_{mn \leqq y} 1$$

dans l'identité

$$X_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n)\, T\left(\frac{x}{n^\lambda}\right).$$

Si l'on part [au lieu de (2)] de la formule nouvelle donnée par Voronoï pour $T(y)$, avec le reste $O(\sqrt[3]{y}\log y)$, on obtient dans le calcul de (1) pour $\lambda \geqq 3$ la valeur du reste (Schätzungsfehler) plus exacte

$$\begin{aligned} &O(\sqrt[3]{x}\log^2 x) \quad \text{pour} \quad \lambda = 3, \\ &O(\sqrt[3]{x}\log x) \quad \text{pour} \quad \lambda \geqq 4. \end{aligned}$$

Si l'on fait encore usage de l'évaluation transcendante de la fonction

$$M(x) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n),$$

même de la plus ancienne, celle de de la Vallée-Poussin

$$(3) \qquad M(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

on obtient même, dans le cas $\lambda = 2$, une petite réduction du *reste* de (1), à $O(\sqrt{x})$.

[Dans les travaux cités on ne faisait usage que de la relation banale $\mu(n) = O(1)$].

Si $\chi_{\lambda\nu}(n)$ ($\lambda = 2, 3, \ldots; \nu = 2, 3, \ldots$) désigne le nombre de décompositions de $n$ en couples de facteurs, tel que le premier facteur n'est divisible par aucune $\lambda^{\text{ième}}$ *puissance, le second facteur* $\nu^{\text{ième}}$, *on obtient une formule asymptotique pour la fonction sommatoire* $X_{\lambda\nu}(x) = \sum_{n=1}^{x} \chi_{\lambda\nu}(n)$ *en faisant usage de l'identité*

$$X_{\lambda\nu}(x) = \sum_{n=1}^{\sqrt[\nu]{x}} \mu(n) X_\lambda\left(\frac{x}{n^\nu}\right)$$

et sans faire usage de résultats transcendants :

$$X_{\lambda\nu}(x) = \frac{1}{\zeta(\lambda)\zeta(\nu)} x\log x + \frac{1}{\zeta(\lambda)\zeta(\nu)}\left(2C - 1 - \frac{\lambda\zeta'(\lambda)}{\zeta(\lambda)} - \frac{\nu\zeta'(\nu)}{\zeta(\lambda)}\right)x$$

$$+ \begin{cases} O(\sqrt{x}\log^2 x) & \text{pour} \quad \lambda = 2, \quad \nu = 2, \\ O(\sqrt{x}\log x) & \text{»} \quad \lambda = 2, \quad \nu \geqq 3 \quad \text{et} \quad \lambda \geqq 3, \quad \nu = 2, \\ O(\sqrt[3]{x}\log^3 x) & \text{»} \quad \lambda = 3, \quad \nu = 3, \\ O(\sqrt[3]{x}\log^2 x) & \text{»} \quad \lambda = 3, \quad \nu \geqq 4 \quad \text{et} \quad \lambda \geqq 4, \quad \nu = 3, \\ O(\sqrt[3]{x}\log x) & \text{»} \quad \lambda \geqq 4, \quad \nu \geqq 4. \end{cases}$$

On obtient de meilleures approximations dans les deux premiers cas si l'on fait usage de la relation transcendente (3), savoir :

$$\begin{cases} O(\sqrt{x}\log x) & \text{pour} \quad \lambda = 2, \quad \nu = 3, \\ O(\sqrt{x}) & \text{pour} \quad \lambda = 2, \quad \nu \geqq 3 \quad \text{et} \quad \lambda \geqq 3, \quad \nu = 3. \end{cases}$$

Ces calculs peuvent être effectués pour tout corps algébrique, mais on n'a pas à sa disposition des formules asymptotiques élémentaires aussi exactes que dans le corps rationnel.

Si l'on définit $\chi_\lambda(\mathfrak{n})\,\chi_{\lambda,\nu}(\mathfrak{n})$ pour les idéaux $\mathfrak{n}$ d'un corps algébrique donné $\varkappa$ de degré $k(\geqq 1)$ par analogie avec les fonctions considérées $\chi_\lambda(n)\,\chi_{\lambda,\nu}(n)$, on obtient pour les fonctions sommatoires des formules asymptotiques, en se servant du théorème de Weber

$$(4)\qquad [x]_\varkappa = \alpha x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

et de la formule de Landau

$$(5)\qquad T(x) = \sum_{N\mathfrak{m}\mathfrak{n}\leqq x} 1 = \alpha_x^2 \log x + \alpha(2\beta-\alpha)x + O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right),$$

savoir :

$$(6)\qquad X_\lambda(x) = \sum_{N\mathfrak{n}\leqq x} \chi_\lambda(\mathfrak{n}) = \frac{\alpha^2}{\zeta_\varkappa(\lambda)}\, x \log x$$
$$+\left[\frac{\alpha(2\beta-\alpha)}{\zeta_\varkappa(\lambda)} - \frac{\lambda\alpha^2\zeta'(\lambda)}{\zeta_\varkappa^2(\lambda)}\right] x + O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right),$$

$$(7)\quad X_{\lambda,\nu} = \sum_{N\mathfrak{n}\leqq x} x_{\lambda,\nu}(\mathfrak{n}) = \frac{\alpha^2}{\zeta_\varkappa(\lambda)\,\zeta_\varkappa(\nu)}\, x \log x +$$
$$+\frac{1}{\zeta_\varkappa(\lambda)\,\zeta_\varkappa(\nu)}\left(\alpha(2\beta-\alpha) - \frac{\lambda\alpha^2\zeta'(\lambda)}{\zeta(\lambda)} - \frac{\nu\alpha^2\zeta'(\nu)}{\zeta(\nu)}\right) x + O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right).$$

Pour le cas particulier du corps de la racine quatrième de l'unité, l'approximation $O\left(x^{\frac{3}{4}}\right)$ dans (5), (6), (7) peut être augmentée par la valeur $O\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$. Car la relation

$$(4')\qquad [x]_\varkappa = \alpha x + O(\sqrt{x}) \qquad (\alpha = \pi)$$

a été précisée il y a quelques années par Sierpinski :

$$(8)\qquad [x]_\varkappa = \alpha x + O(\sqrt[3]{x}).$$

Comme la méthode de Sierpinski est applicable à tout corps quadratique de discriminant négatif et conduirait au même résultat (8), la remarque s'appliquera probablement aussi à ces corps.

## *Sierpinski* (*W.*). — Contribution à la théorie des maxima et des minima [en polonais (103-112)].

L'auteur démontre que la fonction

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n},$$

$\varphi(x)$ désignant la différence absolue entre le nombre $x$ et l'entier le plus voisin $(\gtrless x)$, est continue et possède dans chaque intervalle fini une infinité de maxima et de minima stricts. Il observe encore que la fonction continue

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n}$$

possède un ensemble partout dense de minima stricts, mais aucun maximum strict.

*Toeplitz* (*Otto*). — Sur les formes moyennes généralisées linéaires [en allemand (113-119)].

L'auteur considère le type général des moyennes linéaires:

$$\begin{aligned} t_1 &= a_{11} s_1 + \ldots + a_{1n_1} s_{n_1}, \\ t_2 &= a_{21} s_1 + \ldots + a_{2n_2} s_{n_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_p &= a_{p1} s_1 + \ldots + a_{pn_p} s_{n_p}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

A toute suite infinie $s_1 s_2 \ldots s_n \ldots$ correspond moyennant ce tableau une suite $t_1 t_2 \ldots t_n \ldots$. L'ensemble des suites $s$ pour lesquelles $\lim\limits_{n=\infty} t_n$ existe est appelé le *champ de convergence* de la moyenne généralisée.

La question fondamentale pour cette théorie est la suivante :

Quels doivent être les coefficients $a_{pq}$ pour que $\lim\limits_{n=\infty} t_n$ existe toutes les fois que $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ existe et pour que ces deux limites soient égales?

L'auteur démontre que les conditions nécessaires et suffisantes sont les suivantes :

1° $\lim\limits_{p=\infty} \sum\limits_{(q)} a_{pq} = 1.$

2° $\lim\limits_{p=\infty} a_{pq} = 0 \; (q = 1, 2, \ldots).$

3° $\sum\limits_{(q)} |a_{pq}|$ est bornée. La borne supérieure M est indépendante de $p$.

Ce théorème permet de reconnaitre facilement si deux formes moyennes sont équivalentes, c'est-à-dire si leurs champs de convergence sont identiques.

*Steinhaus* (*Hugues*). — Quelques remarques sur la généralisation de la notion de limite [en polonais (121-134)].

A toute suite $s_1, s_2, \ldots$ faisons correspondre la suite $f_1(s_1), f_2(s_1, s_2), \ldots, f_n(s_1, s_2, \ldots, s_n), \ldots$, où les $f_n$ ne dépendent pas de la suite considérée. Nous demanderons que toutes les fois que $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ existe, $\lim\limits_{n=\infty} f_n(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ existe aussi et ait la même valeur. L'auteur appelle ce postulat le *postulat* A.

Nous demanderons en plus que la suite $f_i(s_1, s_2, \ldots, s_i)$ possède une limite même qand la suite $s_i$ n'en a pas. Cela est le *postulat* B. Ceci n'est pas possible.

L'auteur démontre :

I. Si A est rempli il existe toujours une suite $(s)$ divergente pour laquelle la suite $[f(s)]$ est aussi divergente.

II. Si l'on a un ensemble dénombrable de généralisations de la limite

$$\begin{array}{llll} f_{11}(s_1), & f_{12}(s_1, s_2), & \ldots, & f_{1n}(s_1, \ldots, s_n), \\ f_{21}(s_1), & f_{22}(s_1, s_2), & \ldots, & f_{2n}(s_1, \ldots, s_n), \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{n1}(s_1), & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & f_{nn}(s_1, \ldots, s_n), \end{array}$$

on pourra encore trouver une suite $(s)$ pour laquelle toutes ces généralisations échouent. Cette suite peut même n'être composée que de zéros et d'unités.

III. En particulier, il existe une suite de zéros et d'unités pour laquelle toutes les moyennes arithmétiques successives divergent.

Ensuite l'auteur construit une suite $f(s_1), f(s_1, s_2), \ldots, f(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ qui converge toutes les fois que la suite $(s)$ est sommable par une moyenne arithmétique d'ordre quelconque :

$$f_n(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right) \sum_{p=1}^{n} s_p \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)^{p-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Cette généralisation remplit, ainsi que toutes les moyennes arithmétiques, le *postulat* C ainsi conçu : « Si la limite généralisée de $\{a_n\}$ est $a$ et celle de $\{b_n\}$ est $b$, la suite $\{a_n + b_n\}$ a une limite généralisée qui est égale à $a + b$ ».

On peut même modifier cette définition des $f$ de manière que la suite des $f_i$ soit convergente pour une suite $s$ dont toute moyenne arithmétique est divergente.

La méthode de sommation de Poisson est définie par

$$\lim_{x=1} (1 - x) \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^{n+1}.$$

Elle rentre dans un type nouveau de généralisations de la limite.

Écrivons le Tableau double :

$$\begin{array}{lllll} f_{11}(s_1), & f_{12}(s_1, s_2), & \ldots, & f_{1k}(s_1, s_2, \ldots, s_k), & \ldots, \\ f_{21}(s_1), & f_{22}(s_1, s_2), & \ldots, & f_{2k}(s_1, s_2, \ldots, s_k), & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \\ f_{i1}(s_1), & f_{i2}(s_1, s_2), & \ldots, & f_{ik}(s_1, s_2, \ldots, s_k), & \ldots; \end{array}$$

$\lim_{i=\infty} \{ \lim_{k=\infty} f_{ik}(s_1, s_2, \ldots, s_n) \} = s$ va définir une généralisation nouvelle de la limite.

On définira les $f_{ik}$ de manière que le postulat A soit vérifié. Ici on peut faire de manière que le postulat B soit vérifié aussi, ce qui n'était pas possible jusqu'ici.

Mais si les $f_{ik}$ sont des fonctions linéaires, on pourra toujours trouver une suite pour laquelle la limite généralisée n'existe pas. La sommation de Poisson rentre dans ce type.

En dernier lieu, l'auteur démontre l'existence d'une généralisation qui vérifie A, B, C. La démonstration fait usage du fameux théorème de Zermelo.

*Wolfke* (*M.*) — Application de la théorie d'Abbe du réseau diffringent (Thèse de doctorat, Breslau 1910, réimprimée dans les *Annalen der Physik*, 1910) [en polonais (135-171)].

*Gosiewski* (*W.*). — Sur un moyen de corriger, dans le calcul de la moyenne arithmétique, les valeurs suspectes de l'inconnue. Travail communiqué par M. le professeur L. Silberstein au Congrès de la Societa Italiana per il progresso delle Scienze, le 16 décembre 1910 (Voir *Atti della Societa Italiana : Quarta reunione*, Napoli, Dicembre 1910, Roma, 1911) [en français (173-181)].

A. Rajchman et H. Lauer.

---

RENDICONTO delle Sessioni della Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.

Nuova Serie; in-8, Bologna, tip. Gamberini e Parmeggiani [1].

Tome V, 1900-1901.

*Ruffini* (*F. P.*). — [M, 8 *a*]. Sur l'hypocycloïde tricuspidale (13-23).

*Arzelà* (*C.*). — [D 2 *a* α]. Extension d'une règle de convergence donnée par Riemann (25-31).

*Pincherle* (*S.*). — [H 11 *c*]. Sur la transformation de Laplace et sur les séries divergentes (63-78).

La résolution de l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad (D - z)\psi = \alpha,$$

ou inversion de l'opération $E = D - z$, D étant la dérivation, $z$ un nombre et $\psi$ la fonction inconnue, est donnée formellement par

$$(2) \qquad \psi = -\frac{1}{z}\alpha - \frac{1}{z^2}D\alpha - \frac{1}{z^3}D^2\alpha - \ldots;$$

et l'on a ainsi une solution de (1) pour toute fonction α régulière rendant

---

[1] Voir *Bull. des Sciences math.*, t. XXXI$_2$, 1907, p. 164-175.

uniformément convergente l'expression (2). Une telle fonction $\alpha$ doit être une fonction entière, d'une classe spéciale, par exemple

$$\alpha = e^{tx},$$

pour $|t| < |z|$.

Il y a d'autres séries donnant des solutions ; ce sont les séries

$$(3) \qquad K_1 = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-x)^{n+1}} E_1^n,$$

étant

$$E_1 = D - x_1.$$

Une autre classe de solutions est donnée par le développement

$$(4) \qquad K(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{z^{n+1}} D^n \varphi,$$

$\varphi$ étant une fonction régulière quelconque et

$$\alpha_n = e^{xz}\left[1 - \frac{xz}{1!} + \frac{x^2 z^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n z^n}{n!} - e^{-xz}\right].$$

Les développements de la première espèce (2) et (3) se déduisent les uns des autres comme ceux de $\frac{1}{1-x}$ par continuation analytique. Il y aussi un développement

$$(5) \qquad K_x = D^{-1} + zD^{-2} + z^2 D^{-3} + \ldots$$

servant de passage entre les deux premiers et (4). Ce dernier développement (4) a le champ de validité le plus étendu.

La relation que les développements de l'opération inverse de $D - z$ ont avec ceux de $\frac{1}{x-z}$ est encore plus étroite que n'est une simple analogie. On peut les regarder comme transformés les uns des autres par la *transformation de Laplace*, opération par laquelle, étant

$$L(\psi) = \alpha,$$

on a

$$L(x\psi) = D\alpha,$$
$$L(D\psi) = -x\alpha.$$

Comme application, l'auteur fait la détermination d'une opération B satisfaisant à la relation

$$B' - B = D^{-1},$$

B' étant la *dérivée fonctionnelle* de B, c'est-à-dire

$$B' = B(x\varphi) - xB(\varphi).$$

La résolution de cette question amène l'auteur à une observation relative aux séries divergentes. Étant donnée une équation $(a)$ à laquelle doit satisfaire une opération B, et qui soit linéaire par rapport à B et à ses dérivées fonctionnelles,

et dont les termes renferment l'opération D, soit ($b$) la transformée de cette équation au moyen de l'opération $L^{-1}$; l'équation ($b$) est alors satisfaite par $L^{-1}BL = A$. Si l'équation ($a$) a une solution permutable avec D, ($b$) aura une solution permutable avec $M_x$ (multiplication par $x$), qui fera par cela une opération $M_\mu$ de multiplication. Alors (6) donnera une équation différentielle linéaire satisfaite par le multiplicateur $\mu$, dont on pourra avoir un développement en série de puissances. *Même lorsque cette série est divergente*, la transformée de ce développement au moyen de L donne une solution de ($a$), qui existe toujours dans un champ fonctionnel plus ou moins étendu.

Tome VI, 1901-1902.

*Ruffini* (*F. P.*). — [$L_1$ 15]. Sur la radiale de la courbe engendrée par le foyer d'une conique roulant sur une droite (10-22).

*Radiale* c'est le lieu des extrémités des segments équivalents aux rayons de courbure et tirés par un point fixe.

*Righi* (*A.*). — [T 7 $c$]. Encore sur la question du champ magnétique engendré par la convection électrique (47).

Faisant suite au Mémoire inséré dans le *Nuovo Cimento*, 1901.

*Donati* (*L.*). — [T 7 $a$]. Sur les systèmes d'unités électromagnétiques (71-79).

*Righi* (*A.*). — [T 5]. Sur les phénomènes acoustiques des condensateurs (188-231).

Tome VII, 1902-1903.

*Ruffini* (*F. P.*). — [R 1 $c$]. Sur les accélérations de certains points dans le mouvement d'un système rigide ayant un point fixe (11-18).

*Arzelà* (*C.*). — [D 1 $b$]. Sur les séries de fonctions de variables réelles (22-32).

Réponse aux critiques faites par M. Schœnfliess (dans *Jahresbericht der deutschen math. Vereinigung*, 1900) à la Note de l'auteur publiée dans ce *Rendiconto*, 1884, et relative à la continuité d'une série de fonctions.

*Arzelà* (*C.*). — [D 4]. Sur les séries de fonctions analytiques (33-42).

Démonstration d'un théorème d'Osgood (*Annals of Math.*, 2e série, t. III, 1901).

*Enriquez* (*F.*). — [O 6 *g* ref. Q 2]. Sur les surfaces et les variétés à plusieurs dimensions, dont les géodésiques sont représentables par des équations linéaires (52-58).

L'auteur démontre par voie synthétique le théorème de Beltrami : *les surfaces représentables sur le plan, de manière qu'aux géodésiques correspondent des droites, sont à courbure constante*. Puis il l'étend, toujours par des considérations synthétiques, aux variétés à plusieurs dimensions.

*Pincherle* (*S.*). — [H 11]. Sur une nouvelle opération fonctionnelle et sur quelques-unes de ses applications (83-98).

Cette opération $\Lambda$ est définie par la série

$$\Lambda(\varphi) = x\varphi'(x) - \frac{x^2}{2.2!}\varphi''(x) + \frac{x^3}{3.3!}\varphi'''(x) - \ldots,$$

dont le champ fonctionnel est formé par toutes les fonctions $\varphi$ ayant une branche régulière dans le voisinage de $x = 0$. Une autre expression de $\Lambda$ est la suivante :

$$\Lambda(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \log\frac{t}{t-x}\,\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}.$$

Cette opération est appliquée par l'auteur à la classification en ordres que M. Hadamard a faite des fonctions analytiques ayant pour rayon de convergence l'unité. Au moyen de $\Lambda$ on peut distinguer en catégories les fonctions de même ordre.

Dans le groupe à un paramètre, formé par les opérations $D^s$ de dérivation, l'*opération infinitésimale*

$$\lim_{s=0}\frac{1}{s}(D^s - 1)$$

n'est autre chose que $\Lambda$ ; c'est par cette raison que l'auteur appelle $\Lambda$ *logarithme fonctionnel*.

*Pincherle* (*S.*). — [H 11]. Sur une extension de la formule de Taylor dans le calcul des opérations (128-134).

*Arzelà* (*C.*). — [C 3 *a*]. Sur l'inversion d'un système de fonctions (182-201).

La condition donnée par M. Goursat (*Cours d'Analyse*, t. I, p. 298) que le déterminant fonctionnel ne change pas de signe, nécessaire pour l'unicité de l'inversion, est aussi suffisante sous certaines autres conditions indiquées par l'auteur.

Tome VIII, 1903-1904.

*Pincherle* (*S.*). — [D 3 *f*]. Sur les limites de la convergence de certaines expressions analytiques (5-13).

La convergence de l'intégrale

$$\alpha(x) = \int_0^a \varphi(t) t^{x-1} dt,$$

est limitée par une parallèle à l'axe imaginaire

$$R(x) = c,$$

et le champ de convergence est constitué par le semi-plan $R(x) > c$. Sur la ligne $R(x) = c$ se trouve toujours quelque point singulier à distance finie ou à l'infini.

*Donati* (*L.*). — [T 7 ref. B 12]. Sur les variations déterminées par le mouvement dans un champ vectoriel (22-24).

*Enriquez* (*F.*) — [V 9]. Commémoration de L. Cremona (37-51).

*Ruffini* (*F. P.*). — [$L_1$ 18 *d* $\delta$]. Sur deux séries particulières de coniques (101-110).

*Arzelà* (*C.*). — [D 1]. Sur les séries de fonctions également oscillatoires (143-154).

Tome IX; 1904-1905.

*Enriquez* (*F.*). — [$M_2$ 8]. Sur la propriété caractéristique des surfaces algébriques irrégulières (5-13).

Surfaces pour lesquelles $p_a < p_g$. *La propriété caractéristique de ces surfaces est la suivante :*

Si, sur une surface algébrique, on construit pour toute valeur de $n$ les courbes d'ordre $n$ appartenant à la surface, ces courbes :

1° Se distribuent en un nombre fini de systèmes linéaires complets lorsque la surface est régulière ($p_a = p_g$).

2° *Se distribuent en un nombre fini de systèmes algébriques continus, généralement non linéaires et donnent ainsi lieu à un nombre infini de systèmes linéaires complets, lorsque la surface est irrégulière.*

*Rajna* (*M.*). — [U]. Sur l'éclipse solaire du 30 août 1905 (53-55).

*Pincherle* (*S.*). — [D 2 *f* ref. H 12]. Étude sur sur un théorème de M. Poincaré, relatif aux équations récurrentes (63-73).

Si dans l'équation linéaire aux différences du deuxième ordre

$$V_{n+2} - a_n V_{n+1} + b_n V_n = 0,$$

on a

$$\lim_{n=\infty} a_n = \alpha, \qquad \lim_{n=\infty} b_n = \beta,$$

le rapport $V_{n+1} : V_n$ a, pour $n = \infty$, une limite qui est une des racines de l'équation

$$z^2 - \alpha z + \beta = 0,$$

et, en général, celle qui a le plus grand module. Démonstration analytique.

*Arzelà* (*C.*). — [D 1 *d*]. Sur les fonctions de deux variables à variation limitée (100-107).

*Ruffini* (*F. P.*). — [R 7 *g*]. Sur le mouvement d'un point qui, obligé de rester sur une surface donnée, doit parcourir une courbe donnée avec une vitesse assignée (146-156).

Tome X, 1905-1906.

*Arzelà* (*C.*). — [C 2]. Sur l'intégrabilité d'une série de fonctions intégrables (32-40).

Modifications à la démonstration donnée par l'auteur dans son Mémoire : *Sulle serie di funzioni* (Mém. de Bologne, 1900).

*Enriquez* (*F.*). — [R 6]. Sur les principes de la Mécanique (48-52).

Tome XI, 1906-1907.

*Enriquez* (*F.*). — [$M_2$ 8]. Sur les surfaces algébriques de genre linéaire $p^{(1)} = 1$ (11-15).

Toute surface de genre linéaire $p^{(1)} = 1$, de genre arithmétique $p_a \geq 0$ et de genre géométrique $p_g > p_a$, contient un faisceau de genre $p_g - p_a$ constitué par des courbes elliptiques.

Si une surface de genre géométrique $p_g = 1$ a le quadri-genre $P_4 = 1$, tous les pluri-genres sont $= 1$ et la courbe canonique a l'ordre 0 ; le genre arithmétique est $p_a = 1$ ou $p_a = -1$.

*Ruffini* (*F. P.*). — [$M_1$ 6 *b* $\alpha$]. Sur la lemniscate (41-47).

Tome XII, 1907-1908.

*Enriquez* (*F.*). — [$M_2$ 8]. Une observation relative à la surface de bi-genre 1 (40-45).

Toute surface de genres

$$p_a = p_g = P_3 = 0, \qquad P_2 = 1,$$

peut être regardée comme une surface double de genre 1.

*Arzelà* (*C.*). — [C 2 *g*]. Sur la limite d'une intégrale double (62-75).

Tome XIII, 1908-1909.

*Enriquez* (*F.*). — [$M_2$ 8]. Les surfaces de genre *un* (25-28).

Il résulte de deux travaux de l'auteur (*Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche*, Mem. de Turin, 1893 ; *Sui piani doppi di genere uno*, Mém. des XL, 1896) que toute surface algébrique de genres $p_a = P_2 = 1$ peut se transformer en une surface $F_\pi$ d'ordre $2\pi - 2$, normale dans un espace $S_\pi$ et dont les sections hyperplanes sont des courbes (canoniques) de genre $\pi$.

Le nombre $\pi$ n'est pas déterminé *a priori*, et il y a des classes de surfaces correspondant à $\pi = 2, 3, 4$. La question générale de savoir s'il y a des $F_\pi$ pour toute valeur de $\pi$ est résolue ici. Pour toute valeur de $\pi$ on peut construire une famille de surfaces $F_\pi$ d'ordre $2\pi - 2$, à sections (canoniques), de genre $\pi$ en $S_\pi$, famille qui dépend de 19 modules au moins; les $F_\pi$ correspondant à des valeurs diverses de $\pi$ et à modules généraux sont birationnellement irréductibles.

*Arzelà* (*C.*). — [J 5]. Sur le théorème de Borel (53-57).

*Pincherle* (*S.*). — [E 3]. Quelques observations sur les fonctions déterminantes (71-85).

L'intégrale

$$f(x) = \int_c^\infty \varphi(t) e^{tx} dt,$$

est appelée la *fonction déterminante* de $\varphi(t)$ et celle-ci la fonction génératrice de $f(x)$. Pour la détermination de l'ordre $a$ de $\varphi(t)$ on a, pour $a \geqq 0$, le théorème de Landau

$$a = \overline{\lim_{t=\infty}} \frac{\log\left|\int_c^t \varphi(u)\,du\right|}{t},$$

$\overline{\lim}$ indiquant la *limite maximum* dans le sens de Cauchy et Hadamard. L'auteur démontre une proposition analogue pour le cas de $a < 0$ et d'autres propriétés relatives à ces fonctions.

*Burgatti* (*P.*). — [R 5 *a*]. Sur les potentiels binaires (98-104).

1° Solutions de la forme

$$u = \int_0^{2\pi} f(x\cos\theta + y\sin\theta + iz)\,d\theta,$$

qui se réduisent à la forme

$$u = \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta + ir)\,d\theta,$$

des potentiels symétriques réguliers.

2° Solutions de la forme

$$u = \int_0^{2\pi} \log(x\cos\theta + y\sin\theta + iz)\,\varphi(\theta)\,d\theta,$$

$\varphi$ étant périodique à période $2\pi$. On obtient les potentiels hélicoïdaux.

3° Solutions de la forme

$$u = \int_0^{\pi} f[\log(x\cos\theta + y\sin\theta + iz) \pm a\theta]\,d\theta,$$

$f$ étant périodique par rapport à $\theta$. On a les potentiels spiraux de M. Levi-Civita.

*Razzaboni* (*A.*). — [O 2 *i* β ref. Q 1 *c*]. La transformation de Bäcklund pour les courbes à torsion constante dans l'espace elliptique à trois dimensions (105-112).

Tome XIV, 1909-1910.

*Enriques* (*F.*). — [$M_2$ 8]. Sur les transformations rationnelles des surfaces de genre *un* (71-74).

Si, entre deux surfaces régulières F, F′ ayant les genres *un* ($p_a = P_2 = 1$), il

y a une correspondance rationnelle $[n, 1]$ non univoquement inversible, les groupes de $n$ points correspondant aux points de F′ sur F, forment une involution $I_n$ engendrée par un groupe de $n$ transformations cycliques.

*Pincherle* (*S*). — [B 12 *h*]. Sur la notion de divisibilité en général (109-120).

*Burgatti* (*P.*). — [R 9 *a*]. Sur le frottement (126-129).

*Burgatti* (*P*). — [T 2]. Résolution de quelques problèmes relatifs aux champs vectoriaux (129-135).

*Donati* (*L.*). — [T 7 *a*]. Sur la distribution du potentiel dans les réseaux de fils conducteurs (136-144).

Tome XV, 1910-1911.

*Enriquez* (*F.*). — [J 5]. Sur la définition du continu linéaire (39-43).

On peut construire une série continue qui ne peut se mettre en correspondance ordonnée avec le continu numérique.

*Donati* (*L.*). — [T 7]. Sur le transformateur universel à double circuit magnétique pour des systèmes de courants polyphasés (47-53).

*Arzelà* (*C.*). — [J 3]. Variations faibles et variations fortes des fonctions (56-59).

Étant $\omega(x, \varepsilon)$ la variation d'une fonction et $\omega'(x, \varepsilon)$ sa dérivée par rapport à $x$, la variation est *faible* si l'on a dans tout l'intervalle

$$\lim_{\varepsilon=0} \omega(x, \varepsilon) = 0 \tag{1}$$

et

$$\lim_{\varepsilon=0} \omega'(x, \varepsilon) = 0; \tag{2}$$

*forte* si l'on a seulement

$$\lim_{\varepsilon=0} \omega(x, \varepsilon) = 0.$$

Lorsqu'il y a un point $x'$ pour lequel on a, quel que soit $\varepsilon$,

$$\omega(x', \varepsilon) = 0,$$

(2) entraîne (1).

Pour les fonctions finies qui ont les rapports incrémentaux de leurs dérivées premières contenus entre les limites finies, (1) entraîne (2).

*Burgatti* (*P.*). — [U 2]. Sur une classe particulière de solutions asymptotiques dans le problème borné des trois corps ($\frac{7}{7}$-85).

On considère le système formé par le Soleil, une planète et une petite planète. En dehors des mouvements périodiques des *centres de libration*, il y a d'autres solutions par lesquelles la petite planète a un mouvement asymptotique suivant une spirale autour de l'un des centres de libration.

S. Rindi.

PRACE MATEMATYCZNO-FIZYCZNE (1).

Tome XXIII; année 1912, Varsovie.

*W. Sierpinski.* — Contribution à la dérivabilité des fonctions (en polonais, p. 1-11).

L'auteur considère la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [2nx - E(nx) - 1] \frac{E(nx)}{n^4} \qquad (0 < x \leqq 1).$$

Il démontre les propriétés suivantes de $f(x)$ :

$f(x)$ est croissante de 0 à 1, continue et vérifie la condition de Lipschitz; elle possède en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite. Ces deux dérivées sont égales pour $x$ irrationnel; pour $x$ rationnel, elles diffèrent.

Les fonctions $f'_+(x)$, $f'_+(x)$ sont bornées, constamment croissantes de 0 à 1. Elles ont, dans tout intervalle, des points de continuité et des points de discontinuité.

*L. Lichtenstein.* — Remarque sur les équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptique ; suites convergentes de solutions (en allemand, p. 13-16).

L'auteur présente une généralisation nouvelle (2) du théorème de Harnach sur la convergence de suites de fonctions harmoniques.

Considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u.$$

(1) Voir *Bull. des Sciences math.*, t. XXXVIII$_2$, p. 1-16.

(2) Voir *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1912, p. 201-211.

Soit $u_1(xy)$, $u_2(xy)$ ... une suite infinie de solutions négatives, régulières dans une région T et continues sur le contour, et soit

$$u_1(x, y) > u_2(x, y) > u_3(x, y) > \ldots.$$

L'auteur démontre que la convergence de cette suite en un point à l'intérieur de T entraîne sa convergence uniforme dans toute région entièrement inférieure à T. La fonction limite est elle-même une solution régulière de l'équation.

*A. Rosenblatt.* — Sur les surfaces algébriques irrégulières de genre linéaire $p^{(1)} > 1$ (en français, p. 17-24).

Dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 3 juin 1912, l'auteur a annoncé certaines irrégularités qui ont lieu entre le genre linéaire $p^{(1)}$ d'une surface irrégulière et ses genres géométriques $p_g$ et $p_a$. La démonstration est développée dans un travail de l'auteur : *Recherches sur certaines classes de surfaces algébriques irrégulières* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, juillet 1912).

La Note présente complète sur quelques points les résultats obtenus dans le travail cité.

*G.-A. Miller.* — Le lemme de Gauss et certains théorèmes concernant la théorie des groupes (en anglais, p. 25-29).

La théorie des groupes abéliens fournit, entre autres résultats, le lemme à l'aide duquel Gauss reconnait si un nombre est ou non résidu quadratique d'un module premier donné.

*W. Rybczynski.* — Contribution à la théorie de la diffraction des rayons de Röntgen (Mémoire de physique en polonais, p. 31-50).

*Alfred Rosenblatt.* — Les progrès de la théorie des surfaces algébriques. Mémoire présenté au XI^e Congrès des médecins et naturalistes polonais en juillet 1911, à Cracovie (en polonais, p. 51-192).

L'auteur joint à son aperçu historique une bibliographie complète de la question.

Table de matières. Bibliographie.

I. Les premiers travaux fondamentaux de la théorie des surfaces algébriques ; travaux de Noether.

II. Développement de la théorie des intégrales sur les surfaces algébriques. Les travaux de Picard.

III. La théorie des systèmes linéaires des courbes algébriques sur les surfaces algébriques. Les travaux de Castelnuovo et Enriques.

IV. Les progrès de la théorie des surfaces algébriques dans les dernières années (1903-1912) en Italie. Travaux de Severi.

V. Classes particulières de surfaces algébriques.

*W. Sierpinski.* — Sur les courbes qui remplissent un carré (en polonais, p. 193-219).

L'auteur commence par donner une nouvelle interprétation géométrique de la courbe de M. Peano. Il étudie de même la courbe de M. Hilbert et envisage en particulier la multiplicité des points de cette courbe. Il donne ensuite une nouvelle courbe remplissant le carré dont la génération est plus simple que les précédentes. Enfin, par une méthode due à M. Lebesgue, il construit une courbe remplissant le cube.

HENRI LAUER.

## ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI (1).

5e série, *Rendiconti.*

Tome VII; année 1898, 2e semestre.

*Pizzetti (P.).* — [O 2]. Sur les polyèdres déformables (19-27).

L'auteur, en employant une représentation sur la sphère, établit d'une manière élémentaire la notion de *flexion totale* d'une surface polyédrique, en démontrant que cette quantité (aire d'un certain polygone sphérique) reste constante dans une déformation de la surface dans laquelle les faces restent rigides. Il définit aussi la *flexion géodésique* d'une ligne polygonale tracée sur la surface. Les théorèmes que l'auteur démontre sur ce sujet donnent, par un passage à la limite, les propriétés correspondantes de la théorie des surfaces.

*Bortolotti (E.).* — [$H_{12}$]. Sur les formes linéaires aux différences, équivalentes à leurs adjointes (46-55).

Note faisant suite à l'autre de même titre, publiée dans le premier semestre, page 257.

Entre la forme

$$A(y) = a_0 y + a_1 \theta y + \ldots + a_n \theta^n y,$$

et son adjointe $\overline{A}(y)$, lorsque le rapport $\frac{a_n}{a_0}$ est constant, pour l'opération $\theta$, on a l'identité, analogue à celle de Lagrange,

$$z A(y) - y \overline{A}(z) = (-1)^{n+1} a_n \Delta \Psi(y, \theta^{-1} z).$$

En particulier, cette identité a lieu lorsque la forme $A(y)$ est équivalente à son adjointe. Cette identité ne peut toutefois servir pour une décomposition en facteurs du premier ordre.

Toute fonction intégrale d'une forme équivalente à son adjointe est aussi une intégrale d'une forme à coefficients constants équivalente à son adjointe.

(1) *Bull. des Sciences math.*, t. XXXVII$_2$, p. 16-27.

Pour une forme à coefficients constants équivalente à son adjointe, l'équation caractéristique est réciproque. Cela conduit pour ces formes C à une décomposition

$$C = \frac{(-1)^m}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} Q.F.\theta^m \overline{Q}$$

analogue à celle de Jacobi et Darboux pour les formes différentielles.

*Morano* (*F.*). — [T 4 *c*]. La conductibilité thermique des roches de la campagne de Rome. Mesure des chaleurs spécifiques et des densités (61-68).

*Bortolotti* (*E.*). — [J 4 *g*]. Sur les opérations équivalentes à leurs adjointes (74-82).

M. Pincherle indique par $(\varphi, f)$ une opération qui, appliquée à deux fonctions $\varphi(x)$, $f(z)$ appartenant respectivement à des classes déterminées S, S', donne deux fonctions des mêmes classes, qui est distributive par rapport à $f$ et à $\varphi$, ne fait jamais correspondre un même couple de fonctions à deux couples distincts et jouit de la propriété

$$(x\varphi, f) = (\varphi, zf).$$

Une opération distributive $\overline{A}$ sur des fonctions de la classe S' est *adjointe* à l'opération A sur des fonctions de S, lorsqu'on a identiquement

$$[A(\varphi), f) = [\varphi, \overline{A}(f)].$$

Cette définition comprend celle des formes adjointes dans les cas des formes linéaires, des formes différentielles et des formes aux différences, et l'auteur, en employant les résultats obtenus par M. Pincherle (*Math. Ann.*, Bd. 49, et *Rendiconto* de Bologne, 1898), montre comme on peut former effectivement des opérations coïncidant avec leurs adjointes, en donne les propriétés générales et en indique l'application à l'étude des formes linéaires aux différences. En particulier, il résulte qu'une forme linéaire aux différences où entrent des puissances de $\theta$ ayant toutes un même signe, ne peut coïncider avec son adjointe à moins qu'elle ne se réduise à une de ces opérations que M. Pincherle appelle *normales*.

*De Sparre* (*M.*). — [H 5]. Note au sujet de l'intégration approchée de certaines équations différentielles linéaires du deuxième ordre (111-117) (en français).

L'équation est

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + \alpha^2 \varphi(x) y = 0,$$

$\alpha$ étant très grand, et $x$, $f(x)$, $\varphi(x)$ étant finies et pas très grandes. Une valeur de $y$ est considérée comme solution si le résultat de la substitution

contient $\frac{1}{\alpha}$ en facteur. On trouve une solution de la forme

$$y = e^{\alpha x_1}.$$

Autre équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha f(x) \frac{dy}{dx} + \alpha^2 \varphi(x) y = 0,$$

traitée d'une manière analogue.

*Amaldi* (*U.*). — [J 4 *g*]. Sur la transformation de Laplace (117-124).

On imagine d'opérer sur les éléments d'une variété $V_\rho$ formée pour toutes les séries (convergentes et divergentes)

$$\varphi = x^\rho \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n,$$

$\rho$ étant un paramètre complexe et $n$ entier.

Soit L une opération distributive ayant les propriétés

$$L(x\varphi) = D\,L(\varphi),$$
$$x\,L(\varphi) = -L\,D(\varphi),$$

D étant la dérivation. Une telle opération est appelée par l'auteur une *transformation de Laplace*, puisque l'ordinaire transformation de Laplace

$$\psi(z) = \int_l \varphi(x)\, e^{zx}\, dx$$

en est une détermination particulière. Il démontre quelques propriétés de l'opération L, en prouvant qu'elle coïncide avec son adjointe $\overline{L}$. Cette opération L peut être employée pour transformer des opérations distributives en d'autres dans le but de déduire des propriétés des unes de propriétés connues des autres. Une opération distributive *normale*

$$A = \sum_0^\infty x^r \alpha_r D^r,$$

où

$$\alpha_r = \sum_{s=0}^\infty a_{rs} x^s,$$

se transforme en une série de puissances entières et positives de D, dont les coefficients sont des polynomes de degré respectivement *non supérieur* aux puissances correspondantes de D.

*Paci* (*P.*) — [R 5 *b*]. Exposition de deux nouvelles méthodes pour déterminer l'expression de la densité en tout point d'une couche ellipsoïdique équipotentielle (131-138).

Première méthode :

$P_0$ étant la composante de l'attraction, K' la densité au point $(x', y', z')$ de la surface, $r$ la distance de $(x, y, z)$ à $(x', y', z')$ et $n$ la normale extérieure, on a l'expression

$$P_0 = \int K' \frac{\cos(rn)}{r^2} ds'$$

qu'on transforme en

$$P_0 = -\int K' \frac{\sqrt{\Delta f'}}{\sqrt{\Delta f}} d\sigma',$$

où

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

$$f' = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1,$$

et $d\sigma'$ est l'élément de la surface sphérique ayant pour rayon l'unité et pour centre le point $(x, y, z)$. Or, V étant la fonction potentielle, on a, pour un point infiniment rapproché de $(x, y, z)$ et situé sur la normale intérieure, à la distance $\varepsilon$ de ce point,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-\varepsilon} = P_0 + 2\pi K,$$

où K est la densité au point $(x, y, z)$, et, la fonction potentielle étant constante sur la surface et dans l'intérieur,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-\varepsilon} = 0;$$

donc

$$P_0 + 2\pi K = 0.$$

Par suite

$$\int K' \frac{\sqrt{\Delta f'}}{\sqrt{\Delta f}} d\sigma' = 2\pi K,$$

relation à laquelle on satisfait en prenant

$$K' = \frac{H}{\sqrt{\Delta f'}}, \qquad K = \frac{H}{\sqrt{\Delta f}},$$

avec H constant.

Dans la seconde méthode, l'auteur prend une sphère concentrique et intérieure à l'ellipsoïde, se rapporte à un système de coordonnées polaires ($\rho$, $\theta$, $\varphi$ pour la sphère et $\rho'$, $\theta'$, $\varphi'$ pour l'ellipsoïde) et développe la fonction potentielle V en série par les fonctions sphériques

$$V = \sum_0^\infty \rho^n \int \frac{P_n(\cos\omega)}{\rho'^{n+1}} K' ds',$$

où

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi').$$

Si $d\sigma'$ est encore l'élément de surface sphérique de rayon égal à l'unité, on transforme l'expression de V et l'on reconnaît qu'en prenant

$$K' = \frac{H}{\sqrt{\Delta f'}}$$

la fonction V est constante sur toute la surface de la sphère, et par suite sur celle de l'ellipsoïde et à l'intérieur.

Comme corrollaires de cette seconde méthode, on obtient de nouvelles propriétés des fonctions sphériques

$$\int \cos^{2\nu-2}\theta' P_{2n}(\cos\omega)\, d\sigma' = 0,$$

$$\int \sin^{2\nu-2}\theta' \cos^{2\nu-2}\varphi' P_{2n}(\cos\omega)\, d\sigma' = 0,$$

$$\int \sin^{2\nu-2}\theta' \sin^{2\nu-2}\varphi' P_{2n}(\cos\omega)\, d\sigma' = 0.$$

## *Bianchi* (*L.*). — [O 6 *k*]. Sur l'applicabilité de deux espaces ayant même courbure riemannienne constante (147-155).

L'élément linéaire d'un espace à courbure constante peut se réduire à une forme canonique d'où résulte l'applicabilité de tout espace à courbure constante $K_0$ sur tout autre espace ayant même courbure constante. De ce théorème, démontré par Lipschitz, l'auteur donne une démonstration remarquable par sa simplicité, en examinant successivement les cas de

$$K_0 = 0, \qquad K_0 = -\frac{1}{R^2}, \qquad K_0 = \frac{1}{R^2}.$$

Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ constituant la transformation nécessaire, doivent satisfaire au système, complètement intégrable, de $\frac{n(n+1)}{2}$ équations

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_i\, \partial x_k} = \sum_l \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}_a \frac{\partial U}{\partial x_l} - K_0 a_{ik} U,$$

l'indice $a$ indiquant que les symboles sont formés pour la forme

$$\sum_{i,k}^{1\ldots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Comme on a, pour deux solutions U et V,

$$\nabla(U, V) + K_0 UV = \text{const.}$$

et, en particulier, pour une solution U,

$$(2) \qquad \Delta_1 U + K_0 U^2 = \text{const.},$$

les hypersurfaces U = const. sont géodésiquement parallèles (elles sont aussi des espaces à courbure constante de $n - 1$ dimensions). Alors, pour

$$K_0 = -\frac{1}{R^2},$$

en prenant des valeurs initiales convenables de U et des dérivées, on peut annuler la constante de (2) et avoir

$$(3) \qquad \Delta_1 U - \frac{U^2}{R^2} = 0.$$

Si l'on prend pour hypersurfaces coordonnées $x_1 = 0$ les U = const., et pour lignes coordonnées correspondantes leurs trajectoires orthogonales, l'élément linéaire prend la forme

$$(4) \qquad ds^2 = dx_1^2 + \sum_{i,k}^{2\ldots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

et en exprimant que $U = f(x_1)$ satisfait par rapport à la forme (4) aux équations (1), on trouve

$$f(x_1) = e^{\frac{x_1}{R}},$$

$$a_{ik} = e^{\frac{2x_1}{R}} b_{ik},$$

les $b$ étant des fonctions de $x_2, \ldots, x_n$ seulement, et l'on a

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{\frac{2x_1}{R}} \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Comme l'auteur démontre que les espaces de $n - 1$ dimensions $x_1 = \text{const.}$ sont à courbure nulle, on peut réduire la forme $\Sigma b_{ik}\, dx_i\, dx_k$ à la forme $dy_2^2 + \ldots + dy_n^2$, et par cela

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{\frac{2x_1}{R}} (dy_2^2 + \ldots + dy_n^2),$$

où, en posant

$$e^{\frac{x_1}{R}} = \frac{R}{y_1},$$

$$ds^2 = R^2 \frac{dy_1^2 + \ldots + dy_n^2}{y_1^2},$$

forme *parabolique* de l'élément linéaire d'un espace pseudosphérique.

2ème Partie



Si, au lieu d'employer une solution de (1) pour laquelle

$$\Delta_1 U - \frac{U^2}{R^2} = 0,$$

on se sert d'une solution pour laquelle

$$\Delta_1 U - \frac{U^2}{R^2} = \text{const. positive},$$

on peut faire

$$f(x_1) = \sin h\left(\frac{x_1}{R}\right),$$

et l'on obtient

$$ds^2 = dx_1^2 + \sin h^2\left(\frac{x_1}{R}\right) \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k;$$

et les hypersurfaces $x_1 = \text{const.}$ sont à courbure constante positive.

Si l'on emploie une solution pour laquelle

$$\Delta_1 U - \frac{U^2}{R^2} = \text{const. négative},$$

on peut faire

$$f(x_1) = \cos h\left(\frac{x_1}{R}\right)$$

et l'on obtient

$$ds^2 = dx_1^2 + \cos h^2\left(\frac{x_1}{R}\right) \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

et les hypersurfaces $x_1 = \text{const.}$ sont à courbure constante négative.

Ce sont les formes *elliptique* et *hyperbolique* de l'élément linéaire de l'espace pseudosphérique.

Enfin, pour le cas

$$K_0 = \frac{1}{R^2},$$

l'auteur emploie la conclusion de $n-1$ à $n$ et arrive à la forme

$$ds^2 = dx_1^2 + \sin^2\left(\frac{x_1}{R}\right) \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

où la forme

$$\sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

appartient aussi à un espace (de $n-1$ dimensions) à courbure constante positive $\frac{1}{R^2}$.

Par application successive du même procédé, on arrive à la forme

$$ds^2 = R^2(dy_1^2 + \sin^2 y_1\, dy_2^2 + \sin^2 y_1 \sin^2 y_2\, dy_3^2 + \ldots + \sin^2 y_1 \ldots \sin^2 y_{n-1}\, dy_n^2).$$

*Straneo* (*P.*) — [T 4 *c*] Sur la température d'un conducteur linéaire bimétallique. Note II (206-213).

La Note I est dans ce Tome, premier semestre, page 346.

L'auteur s'est proposé de déterminer l'état thermique du conducteur, en supposant que ses extrémités et l'air ambiant soient maintenus à température constante. Il a obtenu dans la Note I les équations différentielles satisfaites par la température $u_1$ d'un point de la première partie du fil et par la température $u_2$ d'un point de la seconde, et les conditions imposées aux solutions par les propriétés qui doivent avoir lieu aux extrémités et au point commun des deux fils et par le phénomène Peltier. Les équations pour l'état stationnaire sont déduites en posant $= 0$ les dérivées de la température par rapport au temps et résolues par approximations successives. Un cas particulier remarquable est celui où les variations de température sont très petites.

*Bertini* (*E.*) — [$M_2$ 1 *c* ref. Q 2] Sur les systèmes d'hyperespaces de $S_r$ ayant les mêmes polaires premières (217-227).

Extension de la question traitée par l'auteur dans les *Atti* de Turin (1897) sur la détermination de tous les systèmes de courbes planes ayant les mêmes polaires premières. La propriété caractéristique des $V^n_{r-1}$ dont il s'agit est que chacune d'elles admet un certain système de quadriques apolaires. Toutes les $V^n_{r-1}$, par rapport auxquelles un tel système de quadriques est apolaire, forment, dans un cas, un seul système linéaire A de surfaces ayant même polaires premières, dans tout autre cas se distribuent en un nombre infini de systèmes A. Toutes les $V^n_{r-1}$ d'un système A s'obtiennent d'une d'entre elles par les transformations homographiques d'un groupe avec mêmes espaces fondamentaux.

*Voir* la Note II à la page 275.

*Millosevich* (*E.*). — [U] La planète DQ 1898 (433) (227-234).

*Bertini* (*E.*). — [$M_2$ 1 *c* ref. Q 2] Sur les systèmes d'hyperespaces de $S_r$ ayant les mêmes polaires premières (275-281).

Suite de la Note insérée à la page 217. Cas de $r = 3$.

Il y a 13 cas donnant 13 types de systèmes A, dont cinq $\infty^3$, quatre $\infty^2$ et quatre $\infty^1$; de tous ces systèmes, l'auteur trouve les équations, ainsi que celles des systèmes respectifs de quadriques apolaires.

*Enriquez* (*F.*). — [$M_2$ 8] Sur les surfaces possédant un faisceau elliptique ou de genre deux de courbes rationnelles (281-286).

Toute surface possédant un faisceau elliptique ou de genre deux de courbes rationnelles, peut se transformer birationnellement en une surface réglée (elliptique ou de genre deux, respectivement). Le cas de $p = 0$ avait été considéré par Nœther. Le cas général, de $p$ quelconque, est traité dans la Note à la page 344.

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur les taches, facules et protubérances solaires observées à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le troisième trimestre de 1898 (303-304).

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur les Léonides et les Biélides de novembre 1898 (304-305).

*Millosevich* (*E.*). — [U] Observations sur les dernières petites planètes intrajoviales (305-306).

*Enriquez* (*F.*). — [$M_2$ 8] Sur les surfaces possédant un faisceau de courbes rationelles (344-347).

Le théorème démontré dans la Note de la page 281, pour le cas de $p=1$ et $p=2$, est ici démontré en général pour $p$ quelconque. Une surface algébrique, possédant un faisceau de courbes rationnelles, peut se transformer birationnellement en une surface réglée, dont le genre $p$ est égal à celui du faisceau.

Tome VIII, année 1899.

[1er semestre.

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le deuxième et le troisième trimestre de 1898 (3-4).

*Millosevich* (*E.*). — [U] Observations de la petite planète ED 1898, faites à l'équatorial de $0^m,25$ (4).

*Somigliana* (*C.*). — [D 1] Sur les fonctions réelles d'une variable (4-12).

Si dans un vase à section horizontale constante, on a plusieurs liquides de différentes densités, qui ne sont pas solubles entre eux et qui sont soumis à l'action de la gravité, on sait que la disposition d'équilibre stable est celle où les densités vont en croissant du haut en bas. L'auteur suppose qu'on ait un liquide dont la densité varie d'une couche horizontale à l'autre suivant une loi quelconque, et cherche la nouvelle distribution de la densité dans l'équilibre stable, en supposant que tout élément conserve sa densité et son volume.

Ce problème d'hydrostatique a amené l'auteur à étudier certaines questions relatives aux fonctions réelles. Étant $f(x)$ une telle fonction donnée entre $a$ et $b$, on peut imaginer un nombre infini de fonctions, toujours croissantes, variant entre les limites inférieure et supérieure de $f(x)$. Entre ces fonctions,

il en cherche une $\Gamma(x)$ qu'on puisse regarder comme représentant la série ordonnée croissante des valeurs de $f(x)$, analoguement à ce qu'il arrive pour un nombre fini de valeurs réelles données, que l'on peut toujours disposer en succession croissante. Lorsque $f(x)$ est continue et n'est pas constante en aucun trait, la fonction $\Gamma(x)$ existe et elle est continue (fonction *ordonnée*).

*Bortolotti* (*E.*). — [D 2 *d*] Sur la convergence des fractions continues algébriques (28-33).

Si dans la fraction

$$a_0(t) + \frac{b_1(t)}{a_1(t)} + \frac{b_2(t)}{a_2(t)} + \ldots,$$

où $t$ est une variable complexe, le degré de $a_x(t)$ n'est pas dépassé par celui de la $b_x(t)$ correspondante, et il y a des limites supérieures finies pour les valeurs absolues des sommes des coefficients de puissances semblables de $t$ en $a(t)$, $b(t)$, et de plus, les valeurs absolues des coefficients de la plus grande puissance de $t$ en $a_x(t)$ n'ont pas une limite inférieure nulle, la fraction est convergente à l'extérieur d'un cercle de rayon déterminé et représente une fonction analytique de $t$, régulière à l'extérieur de ce cercle. Cela comprend le cas des fractions périodiques.

*Bortolotti* (*E.*). — [D 6] Sur la représentation approchée des fonctions algébriques au moyen de fonctions rationnelles (57-64).

Il y a des équations algébriques pour lesquelles, à l'extérieur d'un certain cercle, il y a toujours une racine de module maximum qui peut se représenter, par la méthode de Bernoulli, au moyen de fractions rationnelles approchées. La succession de ces fractions tend uniformément à la racine sur des circonférences concentriques, et elle a une relation simple avec la succession des réduites de la fraction continue périodique que l'on obtient en développant une irrationnelle du deuxième degré par la méthode de Lagrange.

*Voigt* (*W.*). — [D 1 *b* α] Démonstration simple de la possibilité de développer en série de Fourier une fonction angulaire finie et à une seule valeur (93-97).

Démonstration fondée sur une propriété du potentiel logarithmique, analogue à celle du potentiel newtonien sur laquelle est fondée la démonstration analogue de Laplace pour le cas de l'espace.

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur les taches et facules polaires observées à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le dernier trimestre de 1898 (97-98).

*Almansi* (*E.*). — [H 10 *e*] Sur l'intégration de l'équation différentielle $\Delta^2\Delta^2 = 0$ (104-107).

Le contour est supposé donné par

$$x' = \cos\theta + a\cos 2\theta,$$
$$y' = \sin\theta + a\sin 2\theta,$$

$\theta$ variant entre o et $2\pi$ et étant $|a| < \frac{1}{2}$. La fonction bi-harmonique cherchée U' peut se représenter par

$$U' = u'_0 + x' u'_1,$$

$u'_0$, $u'_1$ étant deux fonctions harmoniques. En faisant la représentation de l'aire considérée sur le cercle de rayon égal à l'unité dans le plan $x$, $y$ et, en appelant U $u_0$, $u_1$ les U', $u'_0$, $u'_1$ exprimées par $x$, $y$, on trouve

$$U = u_0 + [x + a(x^2 - y^2)]u_1.$$

Puis, après avoir reconnu que celle-ci est une fonction tri-harmonique, on peut la représenter par

$$U = v_0 + (r^2 - 1)v_1 + (r^2 - 1)^2 v_2,$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $v_0$, $v_1$, $v_2$ sont trois fonctions harmoniques.

Comme sur la circonférence on s'est donné

$$U = \varphi, \qquad \frac{\partial U}{\partial \nu} = \psi,$$

on a, pour $r = 1$,

$$v_0 = \varphi, \qquad \frac{\partial v_0}{\partial \nu} - 2v_1 = \psi,$$

ce qui permet de déterminer $v_0$ et $v_1$ dans tout le cercle. Pour déterminer $v_2$ l'auteur trouve l'équation

$$v_2 + r_1 \frac{\partial v_2}{\partial r_1} = a\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2}a^2 c_1,$$

où

$$x_1 = x + 2a,$$
$$y_1 = y,$$
$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

et $c_1$ une constante, et dont la solution est

$$v_2 = \frac{a}{r_1}\int_0^{r_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\, dr_1 - \frac{1}{2}a^2 c_1.$$

Enfin, on détermine $c_1$ en trouvant

$$c_1 = \frac{2}{1 - 2a^2}(v_1)_1,$$

où $(v_1)_1$ est la valeur de $v_1$ à l'origine des $x_1$, $y_1$.

*Bianchi* (*L.*). — [O 6 *k* ref. N₂ 1] Sur la théorie de la déformation des surfaces de révolution (141-151).

On a, sur les congruences normales, le théorème suivant dû à Beltrami :

Si les rayons d'une congruence normale, issus des points d'une surface S, sont considérés terminés à l'une des surfaces orthogonales Σ, pour toute déformation par flexion de la surface S, transportant les rayons comme invariablement liés à la surface, le lieu des extrémités est encore une surface orthogonale aux rayons.

L'auteur pose la question suivante : Quelles sont les surfaces S pour lesquelles, dans toute déformation, le lieu Σ des extrémités mentionnées reste une surface W, dont les rayons principaux de courbure sont liés constamment par une même relation ? Il traite le cas où S est applicable sur une surface de rotation et les rayons sont normaux aux déformées des parallèles. Il trouve les résultats suivants :

A. Afin que Σ reste constamment une surface minima, il est nécessaire et suffisant que S soit applicable sur le paraboloïde de rotation et que, dans cette configuration spéciale, les rayons partent du foyer ou du point à l'infini de l'axe. Les longueurs des segments compris entre S et Σ sont égales aux rayons focaux correspondants.

B. Afin que Σ reste constamment à courbure constante positive, il est nécessaire et suffisant que S soit applicable sur l'ellipsoïde de rotation allongé ou sur l'hyperboloïde de rotation à deux nappes. Les rayons, dans cette configuration, partent de l'un ou de l'autre des foyers.

C. Afin que Σ reste constamment à courbure constante négative, il est nécessaire et suffisant que la courbe méridienne de la surface de rotation sur laquelle S est applicable, soit la courbe exponentielle

$$r = e^z,$$

ou la chaînette raccourcie

$$r = m \cosh z \qquad (m < 1),$$

ou la courbe

$$r = m \sinh z.$$

On a chaque fois deux systèmes de rayons satisfaisant à la question, et l'on obtient l'un de l'autre par une réflexion sur S.

Les propositions A et B donnent des théorèmes énoncés par M. Guichard (*C. R.*, 23 janvier 1899). Les propositions C se rattachent à la théorie de la transformation des surfaces pseudo-sphériques. De même, la proposition B est ensuite (*voir* la Note à la page 223) utilisée par l'auteur pour donner une méthode de transformation des surfaces à courbure constante positive au moyen d'une réflexion des rayons sur la surface S, et la proposition A pour la transformation des surfaces minima (*voir* la Note à la page 151 du second semestre).

*Pincherle* (*S.*). — [H. 11] Sur une équation fonctionnelle symbolique et sur quelques conséquences qu'on en déduit (152-162).

F et G étant deux expressions différentielles linéaires de même ordre $m$,

$$F = \alpha_0 D^m + \alpha_1 D^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1} D + \alpha_m D^0,$$
$$G = \beta_0 D^m + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_m D^0,$$

X une opération fonctionnelle distributive et X′ sa *dérivée fonctionnelle*, c'est-à-dire l'opération telle que

$$X'(\varphi) = X(x\varphi) - x\,X(\varphi),$$

l'auteur étudie l'opération définie par l'équation symbolique

$$FX' = GX.$$

Dans le cas particulier où F se réduit à l'ordre zéro, si l'on a aussi

$$G = D - x,$$

l'équation se réduit à la suivante

$$X' = (D - x)X$$

à laquelle satisfait la transformation de Laplace.

Un autre cas particulier, c'est l'équation

$$DX' = sX$$

à laquelle satisfait la transformation d'Euler et la dérivation d'indice quelconque $s$.

*Ciappi* (*A.*). — [R 2] Contribution à la géométrie des masses (163-170).

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur les protubérances solaires observées à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le quatrième trimestre de 1898 et sur leur distribution en latitude (221-222).

*Millosevich* (*E.*). — [U] Observations de la nouvelle petite planète EE 1899 faites à l'équatorial de $0^m,25$ d'ouverture de l'Observatoire royal du Collège romain (222-223).

*Bianchi* (*L.*). — [O 6 *g*] Sur les surfaces à courbure constante positive (223-228).

L'auteur a réussi à établir une transformation par laquelle en partant d'une surface à courbure constante positive on peut en déduire d'infinies avec la même courbure.

Soit la surface Σ à courbure constante $k = +1$, dont l'élément linéaire rapporté aux lignes de courbure est

$$ds^2 = \operatorname{sh}^2\theta\, du^2 + \operatorname{ch}^2\theta\, dv^2,$$

θ satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{sh}\theta\operatorname{ch}\theta = 0.$$

Sur la normale en tout point M de $\Sigma$, on prend le segment $T = MM'$ déterminé par le système

$$\frac{1}{(\operatorname{sh}\theta + T\operatorname{ch}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{(\operatorname{ch}\theta + T\operatorname{sh}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 = cT^2 - (c+1),$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v} = \left(\frac{\operatorname{sh}\theta}{\operatorname{ch}\theta + T\operatorname{sh}\theta} + \frac{\operatorname{ch}\theta}{\operatorname{sh}\theta + T\operatorname{ch}\theta}\right)\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v}$$
$$+ \frac{\operatorname{sh}\theta + T\operatorname{ch}\theta}{\operatorname{ch}\theta + T\operatorname{sh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\operatorname{ch}\theta + T\operatorname{sh}\theta}{\operatorname{sh}\theta + T\operatorname{ch}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial u};$$

le lieu des extrémités M′ de ces segments est une surface S applicable sur l'ellipsoïde de rotation allongé ($c < 0$) ou sur l'hyperboloïde de rotation à deux nappes ($c > 0$).

On fait la réflexion des rayons MM′ sur la surface S, et sur tout rayon réfléchi on prend un segment $M'N = MM'$.

Le lieu de N est une nouvelle surface $\Sigma'$ ayant la même courbure $k = +1$, et dont les rayons réfléchis sont les normales (*cf.* la proposition B de la Note précédente du même auteur, dans ce même Tome).

## *Pincherle* (*S.*). — [D 4] Sur les singularités d'une fonction dépendant de deux fonctions données (228-232).

Étant $u$, $v$ respectivement les points singuliers des fonctions analytiques

$$\alpha(x) = \sum \frac{a_n}{x^{n+1}},$$

$$\varphi(x) = \sum \frac{k_n}{x^{n+1}},$$

les fonctions

$$\psi(x) = \sum \frac{c_n}{x^{n+1}},$$

où

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_{n-i} k_i.$$

n'ont pas d'autres points singuliers que les $u$, $v$, $u+v$. C'est le théorème de Hurwitz, que l'auteur démontre dans un cas plus général et par la considération d'une opération distributive permutable avec la dérivation.

## *Levi-Civita* (*T.*). — [$N_2$ 3] Sur les congruences de courbes (239-246).

Soient [C] une congruence de courbes $c$ : $t_P$ la tangente et $\pi_P$ le plan normal à la courbe $c$ au point P. Les tangentes $t$ aux courbes $c$, conduites par les points de $\pi_P$, forment une congruence [$T_P$] qui est normale seulement lorsque [C] est normale. Dans le cas où sur $t_P$ les points limites sont coïncidants, la congruence (*isotrope*) [C] peut, en un nombre infini de manières, être regardée comme résultant de l'intersection de deux familles orthogonales de surfaces. Dans ce même cas, les droites cycliques passant par les points P et appartenant aux

plans respectifs $\pi_p$ forment deux congruences conjuguées au lieu de former deux complexes. De cette dernière propriété on déduit le moyen de construire toutes les congruences isotropes, et, en même temps, une proposition qui donne l'expression générale des coefficients A, B des équations

$$\frac{\partial u}{\partial z} = A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y},$$

admettant un nombre infini de couples d'intégrales orthogonales. Pour ces équations, les caractéristiques

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = -dz$$

ont la propriété, mentionnée ci-dessus, que pour tout point P les droites cycliques appartenant au plan $\pi_p$, au lieu de former un complexe, forment deux congruences.

Le calcul est fait par les symboles de M. Ricci.

## *Fubini* (*G.*). — [O 6 *k* ref. Q 2] Sur les déformations infiniment petites des surfaces dans les espaces de courbure constante (246-250).

Les problèmes des déformations infiniment petites des surfaces dans l'espace euclidien et dans les espaces à courbure constante sont équivalents.

Si, par tout point de la surface S (d'un espace non euclidien), on conduit la géodésique normale à la direction du déplacement, on a une congruence W, et toute congruence W peut être obtenue de cette manière.

## *Fano* (*G.*). — [H 4 *b*] Observations sur certaines équations différentielles linéaires (285-291).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation différentielle linéaire homogène soit de même espèce que pour son adjointe, c'est-à-dire que ces équations puissent se transformer l'une en l'autre par une substitution

$$y = a_0 z + a_1 z' + \ldots + a_{n-1} z^{(n-1)},$$

dont les coefficients sont des fonctions appartenant au champ de rationalité défini par les coefficients de l'équation donnée, est que le groupe de rationalité de cette équation soit composé de substitutions qui transforment en elle-même une forme bilinéaire à déterminant $\gtrless 0$. Cela a été démontré par l'auteur dans une Note insérée dans les *Atti* de Turin (1898-1899), t. XXXIV, p. 388. Une proposition, qui est essentiellement la même, est aussi énoncée dans la Note de Halphen : *Sur les formes quadratiques, etc.* (*Comptes rendus*, t. CI, 1885, p. 664), mais Halphen ne parle pas de la condition que le déterminant de la forme soit $\gtrless 0$. Ici l'auteur montre que cette contradiction n'est qu'apparente, puisque dans le cas considéré par Halphen, dans lequel le déterminant de la forme est 0, l'équation ne se transforme pas en son adjointe, mais en un *diviseur rationnel* de celle-ci.

*Medolaghi* (*P.*). — [J 4 *f*] Contribution à la détermination des groupes continus dans un espace de *n* dimensions (291-295).

Les équations de définition, prises sous la forme de Engel, représentent en général des groupes différents et il y en a toujours un qui contient comme sous-groupe le groupe des translations.

*Levi-Civita* (*T.*). — [H 8 *f*] Sur les équations à couples d'intégrales orthogonales (295-296).

Démonstration géométrique d'une propriété relative aux équations

$$\frac{\partial u}{\partial z} = A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}$$

à couples d'intégrales orthogonales, donnée dans la Note précédente à la page 239.

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur les taches, facules et protubérances solaires observées à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le premier trimestre de 1899 (321-322).

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur la distribution en latitude des facules et taches solaires observées à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le quatrième trimestre de 1898 (322-323).

*Millosevich* (*E.*). — [U] Observations de la nouvelle comète 1899 L Swift et de la nouvelle planète Coggia EL 1899 (323).

*Klein* (*F.*). — [P 1 *b* ref. A 3] Sur la résolution des équations du dixième degré (324).

L'auteur indique la manière d'utiliser le groupe de 360 collinéations planes trouvé par M. Valentiner et étudié par M. Wiman dans les *Math. Ann.*, t. XLII.

*Bianchi* (*L.*). — [V 9] Notice sur l'œuvre mathématique de Sophus Lie (360-366).

*Bianchi* (*L.*). — [O 6 *g*] Sur les transformations des surfaces à courbure constante positive. Note 2e (371-377).

Transformation du système de la Note précédente (p. 223), et réduction à une équation différentielle linéaire. Relation entre la transformation considérée dans la même Note et celle de Hazzidakis : le segment qu'on doit prendre sur

chaque normale de la transformée $S_1$ de Hazzidakis est l'inverse du segment qu'on doit prendre sur la normale à la surface S. Les transformées de S et de $S_1$ obtenues au moyen de la transformation de M. Bianchi sont des transformées de Hazzidakis l'une de l'autre. Puis l'auteur démontre une proposition qu'il avait déjà annoncée dans l'autre Note, c'est-à-dire que la transformation considérée peut aussi s'appliquer aux systèmes triples orthogonaux contenant une série de surfaces à courbure constante positive, et que par cela on peut d'un tel système en obtenir $\infty^3$ par l'intégration d'une équation différentielle ordinaire. Enfin, il observe que ces transformations *réelles* des surfaces à courbure constante positive peuvent se composer par deux transformations *imaginaires* de Bäcklund.

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur la distribution en latitude des protubérances solaires observées à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le premier trimestre de 1899 (421-422).

*Straneo* (*P.*). — [D 1] Sur les fonctions réelles d'une variable (438-442).

Il s'agit de la *fonction ordonnée* de M. Somigliana (*voir* la Note à la page 4).

Étant $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ les valeurs de $x$ correspondant à la valeur $y'$ de la fonction $f(x)$ donnée entre $a$ et $b$, et en indiquant par $Of(x)$ la fonction ordonnée, comme on trouve

$$\left[\frac{dx}{dOf(x)}\right]_{Of(x)=y'} = \frac{1}{\left|\frac{dx}{df(x)}\right|_{x=x'_1} + \ldots + \left|\frac{dx}{df(x)}\right|_{x=x_m}},$$

on a le moyen suivant de construire la fonction ordonnée :

Soient $F_1(x), \ldots, F_{n+1}(x)$ des fonctions qui, pour les valeurs comprises entre $f(x)$ et $f(x_1)$, entre $f(x_1)$ et $f(x_2), \ldots$, entre $f(x_n)$ et $f(b)$, prennent respectivement les valeurs du module de $\frac{dx}{df(x)}$ en chacun de ces intervalles et s'annulent pour toute autre valeur; soit $OF(x)$ une fonction qui, dans $(a, b)$, prend les valeurs du module de $\frac{1}{\frac{dOf(x)}{dx}}$ et qui au dehors de $(a, b)$, est o. Alors

$$OF(x) = F_1(x) + \ldots + F_{n+1}(x),$$

d'où l'on déduit $\frac{dOf(x)}{dx}$ et puis, par intégration, $Of(x)$.

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur la distribution en latitude des facules et taches solaires observées à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le premier trimestre de 1899 (483-484).

*Bianchi* (*L.*). — [O 6 *g*] Sur les nouvelles transformations des surfaces à courbure constante. Note 3e (484-489).

Dans ses *Lezioni di Geometria differenziale* (Pisa, 1894, p. 435) (*voir* aussi ces *Rendiconti des Lincei*, 5e série, t. I, 1892, 2e semestre, p. 3), l'auteur a démontré le théorème suivant, qu'il appelle de *permutabilité:*

Étant $S_1$, $S_2$ deux surfaces pseudosphériques, liées à une même surface pseudosphérique S par deux transformations de Bäcklund $B_{\sigma_1}$, $B_{\sigma_2}$ à constantes différentes $\sigma_1$, $\sigma_2$, il y a une quatrième surface pseudosphérique $S_3$ liée respectivement à $S_1$, $S_2$ par des transformations de Bäcklund $B'_{\sigma_1}$, $B'_{\sigma_2}$ avec les constantes permutées entre elles.

Une conséquence de ce théorème est que, dans l'application successive et illimitée des transformations de Bäcklund, lorsqu'on a intégré l'équation qui définit la transformation générale $B_\sigma$, les équations successives n'introduisent que des calculs algébriques et de dérivation.

Un théorème analogue et des conséquences analogues ont lieu pour les nouvelles transformations que M. Bianchi a trouvées pour les surfaces à courbure constante positive, et dont il donne les formules. Par ces travaux de M. Bianchi (*voir* aussi les Notes précédentes dans ce même Volume), la théorie des surfaces à courbure constante positive est arrivée à ce degré de développement qui distinguait la théorie des surfaces pseudosphériques.

## *Burgatti* (*P.*). — [$N_2$] Sur quelques formules fondamentales relatives aux congruences de droites (515-520).

Étant $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ un point de la surface considérée et $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ les cosinus de direction de la droite de la congruence passant par ce point, posons

$$\Sigma X \frac{\partial x}{\partial u} = P, \qquad \Sigma X \frac{\partial x}{\partial v} = Q.$$

On trouve, en adoptant les symboles de Kummer, les formules

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{eG - f'F}{EG - F^2}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{f'E - eF}{EG - F^2}\frac{\partial X}{\partial v} + PX,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{fG - gf}{EG - F^2}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{gE - fF}{EG - F^2}\frac{\partial X}{\partial v} + QX,$$

et les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u} = f' - f,$$

$$\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} = b_1 e - d_2 f' - a_1 f - a_2 g + EQ - FP,$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial v} = b_2 g - b_1 f - c_2 f' - c_2 e - GP - FQ,$$

où

$$a_1 = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \qquad a_2 = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\},$$

$$b_1 = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \qquad b_2 = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\},$$

$$c_1 = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \qquad c_2 = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}.$$

Ces formules sont appliquées par l'auteur au problème de déterminer les congruences ayant une image sphérique assignée des surfaces réglées *moyennes* (ce sont les surfaces réglées de la congruence qui ont les lignes de striction sur la surface moyenne).

*Fano* (*G.*). — [$M_2$ 8 *a* ref. Q 2] Un théorème sur les variétés algébriques à trois dimensions avec un nombre infini de transformations projectives en elles-mêmes (562-565).

Toute variété algébrique à trois dimensions contenant une congruence rationnelle du premier ordre de courbes rationnelles, et douée d'une surface unisécante, est rationnelle. De cette proposition, l'auteur déduit que :

Toute variété algébrique à trois dimensions, admettant un groupe continu transitif de transformations projectives en elles-mêmes, est rationnelle.

2e semestre.

*Banal* (*R.*). — [O 6 *k* ref. Q 2] Sur la déformabilité des surfaces à trois dimensions (13-22).

Les surfaces à trois dimensions de l'espace de quatre dimensions ne sont pas, en général, déformables. On connaît des cas (Killing, *Die nicht-euklidischen Raumformen*, Leipzig, Teubner, 1885; Schur, *Math. Ann.*, Bd. 28) où cela peut arriver. L'auteur se propose de trouver la manière de reconnaître si un élément linéaire donné appartient à une surface (à trois dimensions) déformable, et résout la question pour une classe très étendue de surfaces.

*Segre* (*C.*). — [$M_1$ 2 ref. Q 2] Sur les points de Weierstrass d'une courbe algébrique (89-91).

Les *points de Weierstrass* d'une variété algébrique $\infty^1$ de genre $p$ sont les points qui sont $p$-uples au moins pour des groupes de la série canonique $g^p_{2p-2}$. Du nombre *général* $p(p^2-1)$ de ces points, il faut retrancher les points singuliers de la courbe, chacun compté avec une certaine multiplicité. L'auteur démontre qu'il n'y a pas de point de la courbe (le cas hyperelliptique excepté) qui puisse compter pour plus de

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2}+1$$

points, et que, par conséquent, le nombre des points de Weierstrass distincts est au moins

$$2p+6+\frac{8(p-3)}{p(p-3)+4}.$$

*Del Re* (*A.*) — [$N_1$ 2] Sur quelques complexes homaloïdiques des sphères (100-107).

On prend deux *groupes* projectifs de sphères $G_1$, $G_2$ et, dans le faisceau déterminé par deux sphères correspondantes $S_1$, $S_2$, on cherche la sphère S orthogonale à la sphère $S_3$ qui correspond à $S_1$ et $S_2$ dans un autre groupe $G_3$ projectif à $G_1$ et $G_2$. Les sphères S ferment un complexe qui est, en général, du septième degré et peut, suivant certaines circonstances, s'abaisser jusqu'au deuxième.

*Somigliana* (*C.*). — [D 1] Considérations sur les fonctions ordonnées (125-135).

Autres remarques au sujet de l'existence et de la détermination de ces fonctions considérées dans la Note du même auteur (*voir* ce Tome, 1er sem., p. 4) et dans celle de M. Straneo (*Ibid*, p. 438). L'auteur rapporte aussi des observations de M. Volterra sur ce sujet.

*Bianchi* (*L.*). — [O 6 *f*] Sur la théorie de la transformation des surfaces minima (151-165).

Il est nécessaire qu'on se rappelle la proposition A de la Note du même auteur, insérée à la page 141 de ce Tome (1er sem.), qui est relative à la déformation du paraboloïde de rotation. Ici, l'auteur démontre que :

En considérant une déformée quelconque $S_0$ du paraboloïde de rotation et les deux congruences, l'une réfléchie de l'autre par rapport à $S_0$ et qui sont respectivement normales à deux surfaces minima S, $\bar{S}$, si l'on prend des deux surfaces S, $\bar{S}$ les conjuguées en applicabilité suivant Bonnet, ces deux surfaces convenablement placées dans l'espace sont les deux nappes de la surface focale d'une congruence de Thybaut. Inversement, toutes les congruences de Thybaut s'obtiennent des déformées du paraboloïde par cette construction. Des formules établies par l'auteur découlent aussi les autres propriétés des congruences de Thybaut.

*Millosevich* (*E.*). — [U] Sur l'orbite de la planète Eros (230-235).

*Levi-Civita* (*T*). — [R 6 *b* ref. P 6 *e*] Interprétation des intégrales d'un système canonique au point de vue des groupes (235-238).

Les intégrales d'un système canonique

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

et les transformations de contact en $x_i$, $p_i$ qui changent le système en lui-même sont la même chose. A toute intégrale correspond une transformation et réciproquement, les fonctions caractéristiques des transformations coïncident avec les premiers membres des intégrales correspondantes.

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur les taches, facules et protubérances solaires observées à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le deuxième et le troisième trimestre de 1899 (296-298).

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur les étoiles filantes du mois de novembre 1899 (298-299).

*Millosevich* (*E.*). — [U] Observations de la petite planète ER 1899 faites à l'équatorial de $0^m,25$ (299).

*Medolaghi* (*P.*). — [O 6] Sur les surfaces pouvant engendrer deux familles de Lamé avec deux mouvements divers (304-320).

Si une surface peut engendrer deux familles de Lamé par deux mouvements permutables, dans l'un des deux systèmes triples une famille se compose de surfaces invariables dans le mouvement.

Les surfaces qui engendrent des familles de Lamé par rotation et par translation suivant un même axe sont, en dehors des plans et des sphères, les surfaces moulures dont la développable directrice est un cylindre circulaire parallèle à l'axe, et les surfaces de Joachimsthal dont les lignes de courbure d'un système sont toutes sur des sphères de rayon égal et ayant leurs centres sur l'axe.

Tome IX; année 1900.

1er semestre.

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le deuxième et le troisième trimestre de 1899 (3-4).

*Millosevich* (*E.*). — [U] Observations de la nouvelle planète EY 1899 (65).

*Viterbi* (*A.*). — [R 8 *g*] Sur la transformation des équations de la dynamique à deux variables (66-70).

Deux systèmes d'équations dynamiques sont appelés *correspondants* lorsqu'ils ont mêmes trajectoires. La recherche de tous les systèmes correspondant à un système donné

$$T = \frac{1}{2}\Sigma_{rs} a_{rs} x'_r x'_s,$$

$$\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial x'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = X_i,$$

a été réduite par M. Levi-Civita [*Sulle trasf. delle equaz-dinamiche* (*Ann. di Mat.*, 1896)] au problème de déterminer toutes les variétés représentables univoquement sur la variété d'élément linéaire

$$ds^2 = 2\,T\,dt^2 = \Sigma_{rt} A_{rs}\,dx'_r\,dx'_s,$$

de manière que les géodésiques soient correspondantes.

Lorsqu'il n'y a pas de forces, les géodésiques des deux variétés coïncident. Lorsqu'il y a des forces, la correspondance entre deux systèmes d'équations dynamiques présente deux espèces :

1° Où il y a la coïncidence indiquée des géodésiques;

2° Où il n'y a pas cette coïncidence.

L'auteur démontre le théorème suivant de M. Painlevé (*C. R. Acad. Sc.*, 1896), en supposant qu'il n'existe d'autre intégrale première quadratique que celle des forces vives :

« Étant (A) un système d'équations dynamiques à deux coordonnées de Lagrange et en supposant qu'il y ait des forces admettant un potentiel U, soit $(A_1)$ un système correspondant de première espèce et $ds^2$ la forme différentielle relative à (A); soit $(A'_1)$ un correspondant de première espèce d'un autre système pour lequel soient $(U + h)\,ds^2$ la forme différentielle et $\frac{1}{U+h}$ le potentiel. Alors $(A'_1)$ est correspondant de deuxième espèce de $(A_1)$, et par ce procédé on peut obtenir tous ces correspondants de deuxième espèce. »

*Viterbi* (*A.*). — [R 8 *g*] Sur la transformation des équations de la dynamique à deux variables (97-102).

Démonstration du théorème précédent dans le cas où le système a une intégrale première quadratique distincte de celle des forces vives.

*Cerruti* (*V.*). — [U 9] Commémoration de E. Beltrami (139-142).

*Millosevich* (*E.*). — [U] Sur l'orbite de la planète (306) Unitas (148-149).

*Millosevich* (*E.*). — [U.] Observation de la nouvelle planète FA 1900 (150).

*Levi-Civita* (*T.*). — [O 7 *b*] Compléments au théorème de Malus-Dupin (185-189) et (237-245).

La propriété d'une congruence d'être *normale* est invariante par rapport aux réfractions. L'auteur démontre que c'est la seule propriété qui soit invariable dans ces transformations; deux congruences normales peuvent toujours se déduire l'une de l'autre par *une* réfraction; deux congruences non normales, par *deux*.

*Reina* (*V.*). — [U] Détermination astronomique de latitude et d'azimut faite à Monte-Pisanello en 1899 (189-196).

*Viola* (*C.*). — [T 3 *a*] Les déviations minima de la lumière par des prismes de substances anisotropes (196-204).

*Millosevich* (*E.*). — [U] Observation de la nouvelle planète Schwassmann (236-237).

*De Francesco* (*D.*). — [R 8 *b* ref. Q 1] Sur l'intégration des équations différentielles du mouvement spontané d'un corps rigide dans un espace de courbure constante (245-252).

Question que l'auteur a traitée aussi dans deux Notes des *Atti* de Turin (t. XXXV, 1899-1900, p. 34 et p. 387). En dehors de la solution trouvée dans ces Notes et de celle de M. Volterra, où les caractéristiques sont exprimées par des séries de fonctions du temps, il y en a une troisième qui est donnée dans cette Note.

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur les taches, facules et protubérances solaires, observées à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le quatrième trimestre de 1899 (285-286).

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'Observatoire royal du Collège romain pendant le quatrième trimestre de 1899 (287).

*Almansi* (*E.*). — [H 10 *d*] Intégration de la double équation de Laplace (298-304).

La fonction biharmonique V peut être déterminée dans un champ S représentable conformément sur un cercle (de rayon unité et ayant le centre à l'origine), étant données les valeurs de la fonction et de sa dérivée normale intérieure. Supposons que la représentation de S sur le cercle $S_1$ soit

$$x = F_1(x_1, y_1), \qquad y = F_2(x_1, y_1),$$

les F étant du degré $m$ par rapport aux coordonnées $x_1$, $y_1$ du plan du cercle. Si l'on a au contour

$$V = g, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = g', \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = g''$$

et si l'on détermine trois fonctions $u$, $v$, $w$ harmoniques en S pour lesquelles on ait au contour

$$u = g', \qquad v = g'', \qquad w = g - x g' - y g'',$$

la fonction V peut se représenter en S par

$$V = xu + yv + w + P,$$

P étant un polynome de degré $2m$ en $x_1$, $y_1$.

*Viola* (*C.*). — [R 7] Sur le sismographe à pendule verticale (317-321).

*Voir* aussi la Note de M. Burgatti à la page 295 du second semestre.

*Millosevich* (*E.*). — [U] Observations de la nouvelle planète FG 1900 (327).

*Di Legge* (*A.*). — [U] Observation de l'éclipse de Soleil du 28 mai 1900, faite à l'Observatoire du Capitole (328).

*Giacomelli* (*F.*). — [U] Sur la latitude de Monte-Mario (329-336).

*Severi* (*F.*). — [$M_1$ 2] Les groupes neutres à éléments multiples dans une involution sur une variété rationnelle (379-381).

Formule donnant le nombre de ces points.

2e semestre.

*Levi* (*B.*). — [J 5] Sur la théorie des fonctions et des ensembles (72-79).

Un ensemble est appelé de *première catégorie*, *complète*, par rapport à un ensemble fermé A, lorsqu'il est la somme logique d'un ensemble dénombrable d'ensembles qui ne soient pas *condensés* en A et qui ne soient pas tous fermés. On a le théorème suivant, que l'auteur énonce :

« Tout ensemble bien défini de points d'un espace ayant un nombre fini, ou infini (mais dénombrable) de dimensions, est la somme logique d'un ensemble dénombrable de différences entre des ensembles fermés et des ensembles de première catégorie, complets, par rapport à ceux-ci. »

Ce théorème est appliqué par l'auteur à la théorie des ensembles, en démontrant que le continu a la puissance 2, et à la théorie des fonctions en ce qui concerne la résolution de certaines équations fonctionnelles. Enfin, il en fait une application géométrique en en déduisant que les seules correspondances harmoniques sur la droite complexe sont la projectivité et l'antiprojectivité.

*Bianchi* (*L.*). — [O 6 *k*]. Sur la déformation des congruences et sur certaines classes de surfaces applicables (185-193).

Soit $\Sigma$ une surface flexible et inextensible. En tout plan tangent $\pi$, soit invariablement fixée une droite $r$. Pendant la déformation de la surface, la congruence C des droites $r$ se déforme, comme l'auteur le dit, *à la manière de Ribaucour*, et il y a un théorème de Riemann, suivant lequel, si la congruence C admet une surface S orthogonale pour une forme particulière de $\Sigma$, il en sera de même pour toute déformation de $\Sigma$. L'auteur suppose que la surface S, pour une configuration particulière de la congruence C, soit une surface *minima*, et se propose le problème suivant :

« Comment doit-on choisir la surface $\Sigma$ et la congruence C afin que la surface normale S reste une surface minima pour toutes les flexions de $\Sigma$; ou bien qu'elle conserve toujours une même courbure constante $k$. »

La solution du problème est indiquée sans développer les démonstrations. On trouve, pour le cas où S doit rester une surface minima, que les $\Sigma$ sont des surfaces de Weingarten

$$ds^2 = du^2 + (2u + 2v + e^{2v})\,dv^2. \tag{1}$$

Pour le cas où S doit rester à courbure constante K, on trouve, pour les $\Sigma$ deux classes de surfaces :

1° Celles d'élément linéaire

$$ds^2 = e^{2\tau}\,du^2 + \left[\mathrm{C}e^{-2v} - \frac{a}{a+1}e^{2\tau} + \frac{a}{k}\right]dv^2, \tag{2}$$

où

$$\tau = av - (a+1)u$$

$a$ et C sont des constantes;

2° Les surfaces d'élément linéaire

$$ds^2 = e^{-2v}\,du^2 + \left[2(v-u)e^{-2v} - \frac{1}{k}\right]dv^2. \tag{3}$$

On a donc une construction géométrique pour déduire d'une surface (1) une surface minima, ou d'une surface (2) ou (3) une surface à courbure constante K. L'auteur traite aussi le problème inverse : Étant donnée une surface S minima ou à courbure constante, conduire par toute normale à S un plan, de manière que l'enveloppe de ces plans soit une surface (1) ou une surface (2) ou (3). Et il trouve une relation remarquable qui lie les surfaces (3) aux systèmes triples orthogonaux contenant une série de surfaces à courbure constante, et qui est exprimée par le théorème suivant :

« Dans tout système triple orthogonal, contenant une série (S) de surfaces dont chacune a une courbure constante K (variable d'une surface à l'autre), les plans osculateurs des trajectoires orthogonales de (S) aux points d'une surface S enveloppent une surface (3). »

*Segre* (*C.*). — [$N_4$ 2 ref. Q 2] Les ordres des variétés qui annulent les déterminants des divers degrés extraits d'une matrice donnée (253-260).

*Millosevich* (*E.*). — [U] La planète Eros (280-282).

*Burgatti* (*P.*). — [R 7] Sur le mouvement d'un pendule vertical, dont le point de suspension est sujet à des mouvements oscillatoires et sur la détermination de ces mouvements (295-301).

*Viola* (*C.*). — [K 14] Sur la loi de rationalité des indices dans les cristaux (301-308).

*Tacchini* (*P.*). — [U] Sur les étoiles filantes de novembre 1900 (321).

*Severi* (*F.*). — [M, 2 ref. Q 2] Les coïncidences d'une série algébrique $\infty^{(k+1)(r-k)}$ de couples d'espaces à $k$ dimensions, plongée dans l'espace à $r$ dimensions (321-326).

S'il y a un nombre fini de coïncidences, ce nombre est

$$x = \Sigma(a_0, a_1, \ldots, a_k)(r - a_k, \ldots, r - a_0)',$$

où le symbole $(a_0, a_1, \ldots, a_k)(r - a_k, \ldots, r - a_0)'$ indique le nombre des couples dont l'un des espaces appartient à la forme $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ et l'autre à la forme conjuguée $[r - a_k, \ldots, r - a_0]$; et la somme est étendue à tous les produits possibles de ce type.

*Bianchi* (*L.*). — [H 10 *d*] Sur l'intégration de l'équation $\Delta_2 u = 0$ dans l'espace infini non euclidien (333-343).

La validité des formules de Green pour les espaces quelconques (*voir* Beltrami, *Sulla teoria generale dei parametri differenziali*) porte comme conséquence que, pour les fonctions satisfaisant à $\Delta^2 u = 0$ dans des espaces à deux ou trois dimensions et de courbure constante, a lieu le théorème de la moyenne (Gauss), c'est-à-dire que toute fonction de cette espèce, régulière dans un cercle (ou dans une sphère) prend au centre (non euclidien) la valeur moyenne (non euclidienne) des valeurs au contour. Comme tout point O′ du plan (intérieur au cercle) peut être regardé comme centre, en disposant convenablement de la droite $r_1 = 0$ (extérieure au cercle) représentant l'absolu, on peut, de cette manière, déterminer la valeur de la fonction $u$ en tout point O′ par une intégrale définie qui coïncide avec la formule de Poisson. Une méthode semblable est appliquée par l'auteur pour déterminer aussi la valeur de $u$ à l'intérieur d'une sphère, dans un espace à courbure constante, étant données ses valeurs à la surface. Il trouve

$$u(x', y', z') = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S U \frac{(R^2 - \rho'^2)^2 \, d\sigma}{(R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos\gamma)^2},$$

Puis, pour l'espace général non euclidien, il trouve la formule, qui contient les précédentes comme cas particuliers

$$u(x'_1, \ldots, x'_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}} R^{n-1}} \int_S U \frac{(R^2 - \rho'^2)^{-n} \, d\sigma}{(R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos\gamma)^{n-1}}.$$

*Millosevich* (*E.*). — [U] L'orbite définitive d'Eros pour la période 18 août 1898 au 31 octobre 1900 (344-345).

*Burgatti* (*P.*). — [O5*i*] Sur certaines surfaces à lignes de courbure isothermes (352-357).

La détermination de toutes les surfaces ayant la propriété énoncée peut, suivant un théorème de M. Darboux, se réduire aux recherches suivantes :

Déterminer d'abord toutes les fonctions $\varphi$ de $u$, $v$, telles que l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \log \varphi}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \log \varphi}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}$$

admette trois solutions $x$, $y$, $z$ liées par la relation

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

puis déterminer tous les groupes de trois solutions $x$, $y$, $z$ satisfaisant à cette relation

Les $x$, $y$, $z$ sont solutions du système

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \dfrac{\partial \log \varphi}{\partial v}\dfrac{\partial \theta}{\partial u} - \dfrac{\partial \log \varphi}{\partial u}\dfrac{\partial \theta}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\dfrac{\partial \theta}{\partial v} = c, \end{cases}$$

où $c$ est une fonction différente pour chacune des trois solutions. En supposant vérifiées les conditions pour que le système soit *complet*, et ayant trouvé les expressions de $c$ et de $\theta$,

$$c = \gamma f(u, v), \qquad \theta = \gamma F(u, v, \alpha) + \beta,$$

les formules

$$x = \gamma_1 F(u, v, \alpha_1),$$
$$y = \gamma_2 F(u, v, \alpha_2),$$
$$z = \gamma_3 F(u, v, \alpha_3),$$

où

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = a,$$

définissent des surfaces à lignes de courbure isothermes.

Tous les systèmes (1) complets peuvent se réduire à un certain nombre de formes, dont l'auteur donne pour chacune les résultats de l'intégration.

S. Rindi.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES. PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome 154; année 1912 (1).

*Borel* (*E.*). — Sur le battage des cartes. (23-25).

A 1630

*Parenty* (*H.*). — Sur un compteur de vapeur. (25-28).

B 2800

*Léauté* (*A.*). — Sur le développement d'une fonction en série d'exponentielles ; application au transport de force à 100000 volts de l'Exposition de Turin. (28-30).

A 3630

*Tzitzéica*. — Sur les surfaces isothermiques. (54-56).

A 8860

*Lévy* (*P.*). — Sur les équations intégro-différentielles de M. Hadamard. (56-58).

A 5620 4430

*Picard* (*E.*). — Sur un théorème général relatif aux fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique. (98-101).

A 3610 4440

*Hadamard* (*J.*). — Sur une question relative aux liquides visqueux. (109).

B 2500

*Roy* (*L.*). — Les équations générales des membranes flexibles. (109-112).

B 3650 1630

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. $XXXVI_2$, p. 47.

*Bernstein* (*S.*). — Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation de $|x|$. (184-186).

A 1640

*Parenty* (*H.*). — Sur la régulation progressive des pressions à l'entrée d'une conduite de distribution d'eau, de gaz ou de vapeur. (186-188).

B 2800

*Pick* (*G.*). — Sur les notions : droites parallèles et translation, et sur la géométrie différentielle dans l'espace non euclidien. (263).

A 6410

*Littlewood* (*J. E.*). — Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > \frac{1}{2}$. (263-266).

A 3600 3240

*Cotty* (*G.*). — Sur une classe de formes quadratiques à quatre variables liées à la transformation des fonctions abéliennes. (266-268).

A 2840 4070

*Tamarkine* (*J.*). — Sur le problème des vibrations transversales d'une verge élastique hétérogène. (269-271).

A 3630 B 3220 3240

*Vallier* (*F.*). — Sur la position actuelle du problème balistique. (317-321).

B 1650

*Tzitzéica*. — Sur les équations de Laplace à solutions quadratiques (332-334).

A 4840

*Lebesgue* (*H.*). — Sur le problème de Dirichlet. (335-337).

A 5660

*Cotty* (*G.*). — Sur une classe de formes quadratiques à quatre variables liées à la transformation des fonctions abéliennes. (337-339).

A 2840 4070

*Borel* (*E.*). — Sur les théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions de variables réelles. (413-415).

A 0430

*Drach* (*J.*). — Sur les équations différentielles de la Géométrie. (415-418).

A 4820 5240

*Enriques* (*F.*). — Sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables indépendantes. (418-421).

A 4020

*Petrovitch* (*M.*). — Allure d'une transcendante entière (499-501).

A 3610

*Châtelet* (*A.*). — Sur une representation des idéaux. (502-504).

A 2800

*Borel* (*E.*). — La classification des ensembles de mesure nulle et la théorie des fonctions monogènes uniformes. (568-570).

A 0436 3610

*Vessiot* (*E.*). — Sur les groupes fonctionnels et les équations intégro-différentielles linéaires. (571-573).

A 4470

*Soreau* (*R.*). — Sur l'équation à quatre variables d'ordre monographique 4. (573-576).

A 2440

*Petot* (*A.*). — Sur l'emploi des accouplements élastiques dans les transmissions des automobiles. (576-578).

B 3240

*Fichot* (*E.*). — Sur le décalage entre la force perturbatrice et le mouvement contraint. (579-581).

B 2100

*Hartmann* (*L.*). — Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts. Cas du plissement. (584-586).

B 3210

*Riesz* (*F.*). — Sur quelques points de la théorie des fonctions sommables. (641-643).

A 3260 3210

*Guichard* (*C.*). — Sur les cercles osculateurs et les sphères osculatrices aux lignes de courbure d'une surface. (677-679).

A 8830 8870

*Vessiot* (*E.*). — Sur les fonctions permutables et les groupes continus de transformations fonctionnelles linéaires. (682-684).

A 4470

*Jamet* (*V.*). — Sur certains complexes de droites. (684-686).

A 8080

*Soreau* (*R.*). — Généralisation de la construction de Massau et abaque pour résoudre les équations de la forme

$$z^{\alpha+\beta} + nz^{2\beta} + pz^{\beta} + q = 0.$$

(686-688).

A 2240

*Boussinesq* (*J.*). — Comment peut s'expliquer l'exercice instantané, ou sans propagation successive, de la pesanteur et des actions moléculaires, à toutes les distances où se produisent ces forces autour des points matériels d'où elles émanent. (737-742).

B 0000 0820

*Jung* (*H. W. E.*). — Sur l'invariant de MM. Zeuthen et Segre. (754-756).

A 4020

*Chazy* (*J.*). — Sur une équation différentielle dont un coefficient est une série divergente. (756-758).

A 4820

*Roy* (*L.*). — Les ondes de choc dans le mouvement des membranes flexibles. (759-761).

B 1630 C

*Reignier* (*C.*). — Sur les temps de démarrage des moteurs à volant. (761-764).

B 1640

*Jordan* (*Ch.*) et *Fiedler* (*R.*). — Contribution à la géométrie des courbes convexes et de certaines courbes qui en dérivent. (927-930).

A 8460 8470

*Boussinesq* (*J.*). — Sur la théorie géométrique, pour un corps non rigide, des déplacements bien continus, ainsi que des déformations et des rotations de ses particules. (949-954).

B 0440

*Delassus* (*E.*). — Sur les liaisons d'ordre quelconque des systèmes matériels. (964-967).

B 2000

*Mayor* (*B.*). — Sur les déformations de certains systèmes élastiques. (967-969).

B 3210

*Borel* (*E.*). — Les bases géométriques de la mécanique statistique. (970-972).

B 6900 C

*Appell* (*P.*). — Aperçu sur l'emploi possible de l'énergie d'accélération dans les équations de l'électrodynamique. (1037-1040).

B 2020 C

*Denjoy* (*A.*). — Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale. (1075-1078).

A 0430 3260

*Bohr* (*H.*). — Sur la fonction $\xi(s)$ dans le demi-plan $\sigma > 1$. (1078-1081).

A 0430 4400

*Fremont* (*Ch.*). — Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts. Cas du plissement des tuyaux. (1081-1082).

B 3210 3620

*Tzitzéica*. — Sur les réseaux isothermiques. (1144-1145).

A 8860

*Delassus* (*E.*). — Sur les systèmes de Lagrange à paramètre principal. (1146-1148).

A 2020

*Borel* (*E.*). — Modèles arithmétiques et analytiques de l'irréversibilité apparente (1148-1150).

A 3210 3240 C

*Garnier* (*R.*). — Sur les limites des substitutions du groupe d'une équation linéaire du second ordre. (1208-1211).

A 4850

*Geöcze* (*Z. de*). — Sur la quadrature des surfaces courbes. (1211-1213).

A 8460

*Guichard* (*C.*). — Sur les surfaces telles que les sphères osculatrices aux lignes de courbure d'une série soient tangentes à une sphère fixe. (1274-1277).

A 8830 8870

*Browne* (*P.*). — Sur quelques cas singuliers de l'équation de Volterra. (1289-1291).

A 4170

*Barré* (*E.*). — Sur les surfaces engendrées par une hélice indéformable qui reste constamment une asymptotique de la surface qu'elle engendre. (1291-1294).

A 8810

*Garnier* (*R.*). — Sur les limites des substitutions du groupe d'une équation linéaire du second ordre. (1335-1338).

A 4850

*Bouligand* (*G.*). — Sur les petits mouvements de surface d'un liquide dans le champ d'une force centrale attractive, fonction de la distance. (1338-1340).

B 2400 2460

*Leinekugel Le Cocq* (*G.*). — Sur une propriété remarquable des câbles télédynamiques. (1340-1341).

B 1260

*Rouyer*. — Sur les surfaces à courbure constante. (1399-1402).

A 8450

*Browne* (*P.*). — Sur quelques équations fonctionnelles. (1402-1404).

A 4460

*Lévy* (*P.*). — Sur la fonction de Green relative au cylindre de révolution. (1405-1407).

A 5660

*Borel* (*E.*). — Les séries de fonctions analytiques et les fonctions quasi analytiques. (1491-1493).

A 3610 3630

*Rosenblatt* (*A*). — Sur quelques inégalités dans la théorie des surfaces algébriques. (1494-1495).

A 8040

*Dumas* (*G.*). — Sur les singularités des surfaces. (1495-1497).

A 7640 8040

*Clairin* (*J.*). — Sur la transformation d'Imschenetsky (1579-1581).

A 4840

*Chazy* (*J.*). — Sur des développements asymptotiques divergents qui représentent les intégrales de certaines équations différentielles. (1581-1584).

A 4820

*Picard* (*E.*). — Sur les développements de Cauchy en séries d'exponentielles et sur la transformation de M. André Léauté (1665-1669).

A 3630

*Borel* (*E.*). — Sur la théorie du potentiel logarithmique. (1686-1688).

A 3610 4430

*Lusin* (*N.*). — Sur les propriétés des fonctions mesurables. (1688-1690).

A 0430

*Carathéodory* (*C.*). — Sur le théorème général de M. Picard. (1690-1693).

A 3610

*Villat* (*H.*). — Sur le changement d'orientation d'un obstacle donné dans un courant fluide. (1693-1695).

B 2440

*Buhl* (*A.*). — Sur les équations aux dérivées partielles définissant des surfaces susceptibles de passer par un contour fermé. (1782-1785).

A 4310

*Gevrey* (*M.*). — Sur certaines équations aux dérivées partielles du type parabolique. (1784-1788).

A 4840

*Mesnager* (*M.*). — Sur les plaques circulaires épaisses. (1788-1790).

B 3250

Tome 155; année 1912.

*Boussinesq* (*J.*). — Pourquoi les équations différentielles de la Mécanique sont du second ordre, plutôt que du premier, ou, en d'autres termes, déterminent les accélérations des points matériels et non leurs vitesses. (5-9).

B 0000 0800

*Young* (*W. H.*). — Sur la généralisation du théorème de Parseval. (30-33).

A 3260 5610

*Boussinesq* (*J.*). — Des erreurs parfois importantes au point de vue théorique, qu'entraînent les notions particulières d'expérience, simplificatrices, adjointes aux lois générales de la Mécanique pour pouvoir arriver à des résultats saisissables. (101-107).

B 0000

*Buhl* (*A.*). — Sur les extensions de la formule de Stokes. (123-126).

A 3270

*Moore* (*Ch. N.*). — Sur les facteurs de convergence dans les séries doubles et sur la série double de Fourier. (126-129).

A 3220 5610

*Browne* (*F.*). — Sur le problème généralisé d'Abel et ses applications. (129-132).

A 4460

*Chazy* (*J.*). — Sur la limitation du degré des coefficients des équations différentielles algébriques à points critiques fixes. (132-135).

A 4800 4880

*Denjoy* (*A.*). — Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques. (135-136).

A 3220

*Garnier* (*R.*). — Sur la représentation des intégrales des équations irréductibles du second ordre à points critiques fixes au moyen de la théorie des équations linéaires. (137-139).

A 4800 4880

*Borel* (*E.*). — Sur l'indétermination des fonctions analytiques au voisinage d'un point singulier essentiel. (201).

A 3610

*Andrade* (*J.*). — Sur la mesure des frottements. (201-203).

B 0090 0170

*Godeaux* (*L.*). — Sur les transformations rationnelles entre deux surfaces de genre un. (421-423).

A 8000 8040

*Young* (*W. H.*). — Sur la sommabilité d'une fonction dont la série de Fourier est donnée. (472-475).

A 5610

*Donder* (*Th. de*). — Sur les invariants du calcul des variations. (577-580).

A 3280

*Lusin* (*N.*). — Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques. (580-582).

A 3220 3630

*Saltykow* (*N.*). — Sur la théorie des équations partielles. (638-640).

A 4830

*Cisotti* (*U.*). — Remarques énergétiques sur le mouvement d'un solide dans un liquide visqueux. (641-644).

B 2500

*Petot* (*A.*). — Sur les systèmes conjugués. (696-699).

A 8450

*Lebesgue* (*H.*). — Sur le principe de Dirichlet. (699-701).

A 5660

*Autonne* (*L.*), — Sur les substitutions crémoniennes. (763-764).

A 8020

*Gronwall* (*T. H.*). — Sur un théorème de M. Picard. (764-766)

A 3610 3240

*Polya* (*G.*). — Sur un théorème de Stieltjes. (767-769).

A 4850

*Petot* (*A.*). — Sur certains systèmes conjugués. (812-815).

A 8450

*Gevrey* (*M.*). — Remarques sur certains théorèmes d'existence. (815-818).

A 4810

*Rémoundos* (*G.*). — Le théorème de M. Picard et les fonctions multifoames. (818-820).

A 3620 3240

*Plancherel* (*M.*). — Les problèmes de Cantor et de Dubois-Reymond dans la théorie des séries de polynomes de Legendre. (897-900).

A 4420 4870 3630

*Montel* (*P.*). — Sur quelques généralisations des théorèmes de M. Picard. (1000-1003).

A 3610

*Donder* (*Th. de*). — Sur les invariants du calcul des variations. (1003-1005).

A 3280

*Lémeray*. — Le principe de relativité et la loi de variation des forces centrales. (1005-1008).

B 0810 0900

*Bernstein* (*S.*). — Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques. (1062-1065).

A 3220

*Soreau* (*R.*). — Réduction de $F_{123} = 0$ à la forme

$$f_1 f_3 + f_1 g_3 + h_3 = 0.$$

(1065-1067).

A 2440

*Browne* (*P.*). — Sur un problème d'inversion posé par Abel. (1136-1140).

A 4470

*Ocagne* (*M. d'*). — Sur la réduction des équations à trois variables aux formes canoniques que comporte la méthode des points alignés. (1140-1141).

A 2440

*Darboux* (*G.*). — Sur les surfaces de translation. (1449-1457).

A 8060

*Egoroff* (*Th.*). — Sur l'intégration des fonctions mesurables. (1474-1475).

A 3260 0430

*Lusin* (*N.*). — Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy. (1475-1477).

A 3260 3210

*Montel* (*P.*). — Sur l'existence des dérivées. (1478-1480).

A 3240 0430

*Young* (*W. H.*). — Sur les séries de Fourier convergentes presque partout. (1480-1482).

A 5610

*Lattès* (*S.*). — Sur la réduction des substitutions linéaires. (1482-1484).

A 2030

*Nörlund*. — Sur les équations linéaires aux différences finies. (1485-1487).

A 6020

*Rémoundos* (*G.*). — Le théorème de M. Picard et les fonctions algébroïdes. (1592-1595).

A 4010

Tome 156; année 1913.

*Demoulin* (*A.*). — Une propriété générale des lignes tracées sur une surface. (40-42).

A 8840

*Rosenblatt* (*A*). — Sur les surfaces irrégulières dont les genres satisfont à l'inégalité $p_g \leq 2(p_\alpha + 2)$. (42-43).

A 8040

*Muntz* (*Ch.*). — Solution directe de l'équation séculaire et de quelques problèmes analogues transcendants. (43-46).

A 2440

*Fejér* (*L.*). — La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissances effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple. (46-49).

A 3610 8840

*Giraud* (*G.*). — Sur une classe de transcendantes ayant un théorème de multiplication. (49-51).

A 4460

*Nörlund*. — Sur les équations linéaires aux différences finies. (51-54).

A 6020

*Kœnigs* (*G.*). — Construction des centres de courbure et des plans principaux de l'enveloppe d'une surface solidaire d'un cylindre qui roule sans glisser sous un autre. (54-56).

A 8420 8450

*Andrade* (*J.*). — Recherches expérimentales sur le spiral cylindrique double. (56-58).

B 0150

*Villat* (*H.*). — Sur l'écoulement des fluides pesants. (58-61).

B 2800

*Gau* (*P.-E.*). — Sur les transformations les plus générales des équations aux dérivées partielles du second ordre. (116-118).

A 4840

*Janet* (*M.*). — Sur les caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles. (118-121).

A 4840

*Giraud* (*G.*). — Sur certaines équations fonctionnelles et sur les transformations permutables. (197-200).

A 4460

*Nörlund*. — Sur le problème de Riemann dans la théorie des équations aux différences finies. (200-203).

A 6020

*Bachelier* (*L.*). — Les probabilités semi-uniformes. (203-205).

A 1630

*Delassus* (*E.*). — Les diverses formes du principe de d'Alembert et les équations générales du mouvement des systèmes soumis à des liaisons d'ordre quelconque. (205-209).

B 0820

*Mesnager*. — Sur un paradoxe des plaques rectangulaires uniformément chargées. (209-211).

B 3220

*Fichet* (*E.*). — Sur la production des marées statiques de la deuxième sorte dans un océan répondant à une loi quelconque de profondeur. (211-213).

B 2480

*Borel* (*E.*). — La théorie de la relativité et la cinématique. (215-218).

B 0810

*Severi* (*F.*). — Les correspondances algébriques existant sur les courbes d'un système linéaire tracé sur une surface. (287-290).

A 8030 8040

*Rosenblatt* (*A.*). — Sur les surfaces algébriques qui possèdent un faisceau irrationnel de courbes de genre 2. (290-292).

A 8040

*Kostitzin* (*V.*). — Quelques remarques sur les systèmes complets de fonctions orthogonales. (292-295).

A 4030 3200

*Tonolo* (*A.*). — Sur le potentiel d'une ligne analytique. (295-297).

B 1220

*Tzitzéica* (*G.*). — Sur les réseaux dérivés. (374-376).

A 8810 4840

*Pompéiu* (*D.*). — Sur une application du calcul fonctionnel à la théorie des fonctions. (376-378).

A 3600

*Pérès* (*J.*). — Détermination de toutes les fonctions permutables de première espèce avec une fonction donnée. (378-381).

A 4460

*Bilimovitch*. — Sur les équations du mouvement des systèmes conservatifs non holonomes. (381-385).

B 2020

*Tillinger* (*S.*). — Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par une série de Taylor. (434-437).

A 3240 3610

*Le Roux* (*J.*). — Sur la détermination des fonctions harmoniques. (437-440).

A 5560

*Donder* (*Th. de*). — Sur un théorème de Jacobi. (440-442).

A 4830

*Villat* (*H.*). — Sur la détermination des problèmes d'Hydrodynamique relatifs à la résistance des fluides. (442-445).

B 2790

*Appell* (*P.*). — Sur l'équilibre de fils dont les éléments s'attirent ou se repoussent en fonction de la distance. (500-504).

B 1260

*Gevrey* (*M.*). — Sur la nature des solutions de certaines équations aux dérivées partielles. (528-531).

A 4810 4460

*Pchéborski* (*A.*). — Sur quelques polynomes qui s'écartent le moins possible de zéro dans un intervalle donné. (531-534).

A 4010

*Valiron*. — Sur les fonctions entières d'ordre nul. (534-536).

A 3610

*Cisotti* (*U.*). — Sur les mouvements rigides d'une surface de tourbillon. (539-542).

B 2450

*Appell* (*P.*). — Équation fonctionnelle pour l'équilibre d'un liquide homogène en rotation sous l'action newtonienne de ses parties. (587-589).

B 2470

*Bompiani* (*E.*). — Sur les configurations de Laplace. (603-605).

A 4840

*Sannia* (*G.*). — Propriétés nouvelles des caractéristiques des équations partielles linéaires du premier ordre en deux variables (605-609).

A 4830

*Donder* (*Th. de*). — Sur le théorème d'indépendance de Hilbert. (609-611).

A 4820 4850

*Crussard* (*L.*). — Sur la propagation et l'altération des ondes de choc. (611-613).

B 2460

*Tzitzéica*. — Sur les réseaux réciproquement dérivés. (666-670).

A 4840

*Le Roux* (*J.*). — Sur la détermination des fonctions harmoniques. Application au carré. (670-672).

A 5660

M^lle^ *Tarnarider* (*Th.*). — Sur la meilleure approximation de $|x|^{2s+1}$ par des polynomes de degrés indéfiniment croissants. (672-675).

A 3200

*Chapelon* (*J.*). — Sur les nombres de classes des formes quadratiques binaires positives. (675-677).

A 2050

*Delassus* (*E.*). — Sur l'équilibre et les petits mouvements des systèmes soumis à des liaisons d'ordre quelconque. (677-680).

B 2090

*Appell* (*P.*). — Éloge funèbre de M. A. Picard. (747-748).

A 0010 B 0010

*Guichard* (*C.*). — Sur une classe particulière d'équations de M. Moutard. (748-751).

A 4840

*Clairin* (*J.*). — Sur les invariants des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. (760-762).

A 4840

*Autonne* (*L.*). — Sur les matrices hypohermitiennes et les unitaires. (858-860).

A 1200

*Muntz* (*Ch.*). — Sur la solution des équations séculaires et des équations intégrales (860-862).

A 2440 4470

*Rémoundos* (*G.*). — Sur les familles de fonctions algébroïdes. (862-865).

A 3620

*Boulad Bey* (*F.*). — Sur la disjonction des variables dans les équations représentables par des nomogrammes à points alignés. (865-868).

A 0090 2440

*Donder* (*Th. de*). — Sur le théorème d'indépendance de Hilbert. (868-870).

A 4830

*Bourlet* (*C.*). — Appareil de mesure des vibrations de corps solides en mouvement. (870-872).

B 0160

*Jouguet* (*E.*). — Sur la propagation de déflagration dans les mélanges gazeux. (872-875).

B 2400

*Darboux* (*G.*). — Sur les surfaces minima engendrées par un cercle variable. (928-933).

A 8820

*Andrade* (*J.*). — Nouvelles recherches expérimentales sur le spiral double. (939-940).

B 0150

*Darboux* (*G.*). — Sur les surfaces minima engendrées par un cercle variable. (971-978).

A 8820

*Picard* (*E.*). — Sur une classe transcendante généralisant les fonctions elliptiques et les fonctions abéliennes. (978-983).

A 4040 4400

*Boussinesq* (*J.*). — Sur l'existence d'une viscosité superficielle, dans la mince couche de transition séparant un liquide d'un autre fluide contigu. (983-989).

B 2490

*Lichtenstein* (*L.*). — Sur les fonctions fondamentales des équations différentielles linéaires du second ordre et sur le développement d'une fonction arbitraire. Application de la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables. (993-996).

A 4850

*Polya* (*G.*). — Sur un théorème de Laguerre. (996-999).

A 3260

*Barré.* — Sur une série de surfaces dont une famille de lignes de courbure est constituée par des hélices indéformables. (999-1002).

A 8450

*Bénard* (*H.*). — Sur la zone de formation des tourbillons alternés derrière un obstacle. (1003-1005).

B 2450

*Boussinesq* (*J.*). — Application des formules de viscosité superficielle à la surface d'une goutte liquide sphérique, tombant lentement, d'un mouvement devenu uniforme, au sein d'une masse fluide indéfinie en repos, d'un poids spécifique moindre. (1035-1040).

B 2490

*Cotton* (*E.*). — Sur une question concernant les fonctions de deux variables réelles. (1054-1056).

A 3210

*Belsetsky* (*S.*). — De la stabilité d'équilibre dans un cas particulier de pièce courbe. (1056-1058).

B 3270

*Boussinesq* (*J.*). — Vitesse de la chute lente, devenue uniforme, d'une goutte liquide sphérique, dans un fluide visqueux de poids spécifique moindre. (1124-1130).

B 2490

*Tzitzéica.* — Sur une généralisation des surfaces minima non euclidiennes. (1136-1138).

A 4840

*Valiron* (*G.*). — Sur les fonctions entières d'ordre fini. (1138-1141).

A 3610

*Rémoundos* (*G.*). — Sur les séries et les familles de fonctions algébroïdes dans un domaine. (1141-1144).

A 3620

*Polya* (*G.*). — Sur la méthode de Graeffe. (1145-1147).

A 2420

*Gunther*. — Sur les caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles. (1147-1150).

A 4810

*Burkhardt* (*H.*). — Un théorème sur la fonction gamma. (1212-1213).

A 4400

*Petrovitch* (*M.*). — Sur des transcendantes entières généralisant les fonctions exponentielles et trigonométriques. (1213-1216).

A 4400 3610

*Bilimovitch* (*A.*). — Sur les systèmes conservatifs non holonomes avec des liaisons dépendantes du temps. (1216-1218).

B 2020

*Andrade* (*J.*). — Le frottement et l'isochronisme du spiral double. Propriété remarquable d'un groupe de spiraux doubles convenablement choisi. (1218-1219).

B 0150

*Roy* (*L.*). — Sur le mouvement des milieux visqueux indéfinis. (1219-1222).

B 2490

*Godeaux* (*L.*). — Sur les involutions appartenant à une surface de genres zéro et de bigenre un. (1306-1307).

A 8040

*Hardy* (*G. H.*) et *Littlewood* (*J. E.*). — Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable. (1307-1309).

A 5610

*Roy* (*L.*). — Sur le mouvement des milieux visqueux et les quasi-ondes. (1309-1312).

B 2490

*Anghelatza* (*Th.*). — Quelques remarques sur le développement exponentiel de Cauchy. (1358-1361).

A 3630

*Bouligand* (*G.*). — Sur la fonction de Green du cylindre indéfini. (1361-1364).

A 5660

*Hadamard* (*J.*). — Observations à propos d'une Note de M. Bouligand. (1364).

A 5660

*Appell* (*P.*). — Les polynomes $V_{mn}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions. (1423-1425).

A 4400

*Cotty* (*G.*). — Sur la réduction des formes quadratiques binaires à coefficients entiers dans un corps quadratique réel. (1448-1451).

A 2830

*Landau* (*E.*). — Sur les séries de Lambert. (1451-1454).

A 3630

*Andrade* (*J.*). — Précision nouvelle de l'indépendance latérale du balancier des chronomètres marins. Atténuation de la perturbation d'isochronisme due à l'inertie des ressorts réglants. (1454-1456).

B 0150

*Lévy* (*P.*). — Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles. (1515-1518).

A 4460

*Moulin* (*M.*). — Sur la loi de déformation du spiral plat des chronomètres. (1518-1521).

B 0150

*Sparre* (*de*). — Sur les coups de bélier dans les conduites formées de sections de diamètres différents. (1521-1523).

B 2800

*Picard* (*E.*). — Note au sujet de la récente session de l'Association internationale des Académies. (1579–1582).

A 0020 B 0020

*Appell* (*P.*). — Les polynomes $U_{mn}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'hyperespace. (1582-1585).

A 5620

*Kryloff* (*N.*). — Sur quelques propriétés des équations intégrales à noyau non symétrique. (1587-1589).

A 4460

*Tamarkine* (*J.*). - Problème du développement d'une fonction arbitraire en séries Sturm-Liouville. (1589-1591)

A 3630

*Osgood* (*W. F.*). — Sur une extension d'un théorème de Weierstrass et sur une restriction d'un autre théorème du même auteur. (1591-1593).

A 3640

*Ocagne* (*M. d'*). — Sur l'application générale de la méthode des points alignés aux problèmes qui se ramènent à des résolutions de triangles sphériques. (1593-1596).

A 0090 6830

*Got* (*Th.*). — Sur l'équivalence de certaines formes quadratiques ternaires indéfinies de même genre. (1596-1598).

A 2840

*Lusin* (*N.*). — Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier. (1655-1658).

A 5640

*Lévy* (*P.*). — Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles. (1658-1661).

A 4460

*Chapelon* (*J.*). — Sur les nombres de classes des formes quadratiques binaires positives et à déterminant négatif. (1661-1663).

A 2830

*Roy* (*L.*). — Complément à deux Notes récentes sur le mouvement des milieux visqueux indéfinis. (1665-1667).

B 2490

*Godeaux* (*L.*). — Classification des involutions de genre 1 appartenant à une surface de genre 1. (1737-1739).

A 8040

*Buhl* (*A.*). — Sur les formules analogues à la formule de Stokes. (1739-1741).

A 3270

*Got* (*Th.*). — Sur les domaines fondamentaux de certains groupes fuchsiens. (1741-1743).

A 4440

*Appell* (*P.*) et *Vergne* (*H.*). — Sur une transformation du mouvement d'un système holonome conservatif donné dans le mouvement d'un autre système donné de même liberté. (1800-1801).

B 2000

*Fabry* (*E.*). — Un essai de démonstration du théorème de Fermat. (1814-1816).

A 2800

*Jonas* (*H.*). — Sur une transformation qui dépend d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre. (1816-1820).

A 8850 8455

*Montel* (*P.*). — Sur les différentielles totales et les fonctions monogènes. (1820-1822).

A 3260 3600

*Petrovitch* (*M.*). — Séries hypergéométriques. (1823-1825).

A 3630

*Platrier* (*Ch.*). — Sur les solutions holomorphes de certaines équations intégrales linéaires de troisième espèce. (1825-1828).

A 4470

*Jamet* (*V.*). — Sur le complexe des moments vectoriels. (1828-1829).

A 8080

*Porchl* (*Th.*). — Sur les équations canoniques de systèmes non holonomes. (1829-1831).

B 2000

*Carrière* (*Z.*). — Nouvelle méthode de mesure de la vitesse des fluides. (1831-1833).

B 2530

*Moulin* (*M.*). — Sur les courbes terminales du spiral droit. (1833-1836).

B 0150

*Korn* (*A.*). — Sur les équations intégrales à noyau symétrique. (1965-1968).

A 4470

Tome 157; année 1913.

*Appell* (*P.*). — Sur les développements en séries procédant suivant les inverses de polynomes donnés. (5-7).

A 3630

*Boussinesq* (*J.*). — Équations de l'équilibre dynamique de la couche superficielle séparant un liquide d'un autre fluide. (7-14).

B 2460

*Platrier* (*Ch.*). — Sur des solutions méromorphes de certaines équations intégrales de troisième espèce. (28-31).

A 4470

*Barré*. — Sur les hélicoïdes de seconde espèce (31-34).

A 8480

*Got* (*Th.*). — Sur les symétries des groupes reproductifs des formes quadratiques ternaires indéfinies. (34-36).

A 2840

*Boussinesq* (*J.*). — Sur la théorie des nappes liquides réfractiles de Savart. (89-94).

B 2490

*Robinson*. — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles. (106-108).

A 4840

*Anghelutza* (*Th.*). — Sur une généralisation de la sommation de Riemann. (108-110).

A 3630

*Boussinesq* (*J.*). — Démonstration nouvelle de la formule des énergies potentielles de superficie dans les liquides parfaits. (171-176).

B 2400

*Zarlatti* (*F. S.*). — Sur quelques équations intégrales singulières. (198-201).

A 4470

*Soreau* (*R.*). — Formule approchée de l'arc d'ellipse. (272-273).

A 8460

*Stiemke* (*E.*). — Sur les modules dénombrables. (273-275).

A 0430

*Boussinesq* (*J.*). — Détermination complète, par ses équations aux dérivées partielles, du problème du long mouvement régularisé, d'une masse liquide pesante, au sein d'une autre masse fluide, indéfinie et en repos, également incompressible. (313-319).

B 2400

*Gateaux* (*R.*). — Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques. (325-327).

A 3210 4460

*Andrade* (*J.*). — Loi de similitude des ressorts circulaires. (327-329).

B 3240

*Séguier* (*de*). — Sur les groupes quadratiques et hermitiens dans un champ de Galois. (430-432).

A 2450

*Moulin* (*M.*). — Sur les courbes terminales des spiraux. Influence des termes du second ordre. (446-448).

B 0150

*Andrade* (*J.*). — Réglage d'un chronomètre marin à quatre spiraux. (464-466).

B 0150

*Lévi-Civita* (*T.*). — Théorème de Torricelli et début de l'écoulement. (481-484).

B 2800

*Plancherel* (*M.*). — Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales. (539-542).

A 3630

*Rémoundos* (*G.*). — Sur les familles de fonctions multiformes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine. (542-545).

A 3620

*Fejér* (*L.*). — Sur les polynomes trigonométriques. (571-574).

A 5610

*Fekete* (*M.*). — Sur une propriété des racines des moyennes arithmétiques d'une série entière réelle. (574-577).

A 3240

*Gunther* (*N.*). — Sur la forme canonique des équations algébriques. (577-580).

A 2460

*Tomassetti* (*M.*) et *Zarlatti* (*J. S.*). — Le problème des deux corps de masses variables. (580-583).

B 1610

*Lichtenstein* (*L.*). — Sur quelques applications de la notion des fonctions d'une infinité de variables au calcul des variations. (629-632).

A 3210 3280

*Lukacs* (*F.*). — Sur la série de Laplace. (632-634).

A 5620

*Chazy* (*J.*). — Sur certaines trajectoires du problème des *n* corps. (688-691).

B 1610

*Chipart* et *Liénard*. — Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique. (691-694).

A 2440

*Rémoundos* (*G.*). — Le théorème de M. Picard dans un cercle dont le centre est un point critique algébrique. (694-697).

A 3620

*Janet* (*M.*). — Existence et détermination univoque des solutions des systèmes d'équations aux dérivées partielles. (697-700).

A 4810

*Villat* (*H.*). — Sur la validité des solutions des problèmes d'Hydrodynamique. (700-703).

B 2400

*Borel* (*E.*). — La cinématique dans la théorie de la relativité. (703-705).

B 0810 0900

*Picard* (*E.*). — Remarque au sujet d'une équation intégrale considérée par M. Chartier. (813-814).

A 4470

*Chipart* et *Liénard*. — Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique. (837-840).

A 2440

*Polya* (*G.*). — Sur un algorithme toujours convergent pour obtenir les polynomes de meilleure approximation de Tchebychef pour une fonction continue quelconque. (840-843).

A 1630 3210

*Goursat* (*E.*). — Sur quelques équations intégrales singulières. (843-846).

A 4470

*Keraval* (*E.*). — Sur une famille de systèmes triples-orthogonaux. (905-908).

A 8860

*Tzitzéica*. — Sur les réseaux conjugués à suite de Laplace périodique. (908-910).

A 8810

*Zoard de Geörze*. — Sur la quadrature des variétés. (910-912).

A 8870

*Kampé de Fériet*. — Sur les polynomes ultra-sphériques $V^{(\lambda)}_{m_1 \ldots m_p}$. (912-914).

A 5620

*Petrovitch* (*M.*). — Sur le module minimum d'une fonction analytique le long d'une circonférence. (986-988).

A 3610

*Kœnigs* (*G.*). — Sur les mouvements doublement décomposables et sur les surfaces qui sont le lieu de deux familles de courbes égales. (988-991).

A 8420

*Appell* (*P.*). — Développement de $(x-y)^{-1}$ en série procédant suivant les inverses de polynomes donnés. (1042-1043).

A 3630

*Demoulin* (*A.*). — Sur une propriété caractéristique des familles de Lamé. (1050-1053).

A 8860

*Vessiot* (*E.*). — Sur la réductibilité des systèmes différentiels. (1053-1055).

A 4830

*Bernstein* (*S.*). — Sur quelques propriétés asymptotiques des polynomes. (1055-1057).

A 3210 1640

*Gevrey* (*M.*). — Sur les fonctions infiniment dérivables de classe donnée et leur rôle dans la théorie des équations partielles. (1121-1124).

A 4840

*Bouligand* (*G.*). — Sur le problème de Dirichlet, dans un cylindre indéfini. (1124-1127).

A 5660

*Humbert* (*G.*). — Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. (1358-1362).

A 2830

*Darmois* (*G.*). — Sur les courbes algébriques à torsion constante. (1379-1382).

A 8440

*Tzitzéica*. — Sur les réseaux à invariants égaux et à suite de Laplace périodique. (1382-1384).

A 4840 8810

*Hortinsky* (*B.*). — Sur les courbes fermées à torsion constante. (1384-1386).

A 8840

*Châtelet* (*A.*). — Sur la multiplication complexe. (1386-1389).

A 4050

*Esclangon* (*E.*). — Sur les fonctions quasi-périodiques moyennes, déduites d'une fonction quasi-périodique. (1389-1392).

A 4070

*Kampé de Fériet.* — Sur le développement d'une fonction en séries de polynomes ultra-sphériques. (1392-1395).

A 3630

*Popoff* (*K.*). — Sur les équations de Fredholm de première espèce. (1395-1397).

A 4470

*Bouligand* (*G.*). — Rectification à la Note « *Sur le problème de Dirichlet pour le cylindre indéfini* », présentée dans la séance du 8 décembre 1913. (1397-1398).

A 5660

*Chazy* (*J.*). — Sur les points singuliers de l'intégrale générale du problème des $n$ corps. (1398-1400).

A 4800 B 1610

*Demoulin* (*A.*). — Résolution d'un problème de calcul intégral (1505-1508).

A 4830

*Lichtenstein* (*L.*). — Intégration de l'équation $\Delta_2 u = Ke^u$ sur une surface fermée. (1508-1511).

A 5660

*Giraud* (*G.*). — Sur un groupe de transformations birationnelles. (1511-1514).

A 8020

*Rosenblatt* (*A.*). — Sur les invariants des variétés algébriques à trois dimensions. (1514-1516).

A 8100

*Drach* (*J.*). — Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique. (1516-1519).

B 2060

C. Guichard.

## ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA [1].

Série II, Tome XX; mars 1892 à janvier 1893.

*A. Cayley.* — Sur la surface des ondes (1-18).

L'auteur retrouve et développe par une méthode élégante les résultats de Combescure et de Brioschi (*Annali*, 1859) relatifs aux lignes de courbure de la surface des ondes.

*R. Bettazzi.* — Le concept de longueur et la droite (19-39).

On fait d'ordinaire dépendre le concept de longueur de celui de droite : le but de cet article est de montrer comment on peut, au contraire, établir le premier indépendamment du second, et légitimer la définition du segment de droite comme plus court chemin d'un point à un autre; ce travail fait suite à un autre du même auteur sur *Les postulats et les êtres géométriques* (*Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario*, Anno 1°) dont les principaux résultats sont ici résumés dans une courte Note.

*G. Ascoli.* — Sur les fonctions de deux variables réelles qui croissent ou décroissent toujours du côté positif de chacun des axes dans une portion de plan à distance finie (41-59).

Complément, relatif au cas d'une aire connexe quelconque, d'un travail paru précédemment sous le même titre (*Annali*, t. XIX).

*C. Somigliana.* — Recherches sur la déformation et les phénomènes piézoélectriques dans un cylindre cristallin (61-99).

Une méthode générale de Voigt permet de donner une théorie des phénomènes thermo- et piézo-électriques en supposant résolu le problème de la déformation. Le présent travail a pour but, d'une part, la solution d'un problème d'équilibre élastique relatif à un cylindre, d'autre part l'application aux résul-

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVI, 1912, p. 145-166.

tats obtenus de la théorie de Voigt sur les phénomènes piézo-électriques. Le problème considéré est celui d'un cylindre dont les bases sont libres, la surface latérale étant soumise à des pressions données. Les effets électriques calculés dans la seconde Partie sont : 1° les variations des moments électriques à l'intérieur du cristal, et cela pour les divers systèmes cristallins; 2° le potentiel dû à cette polarisation (le calcul de ses maxima et de ses minima peut être intéressant pour les vérifications expérimentales qu'on peut faire, comme on sait, grâce à un mélange de minium et de soufre répandu sur la surface).

*L. Berzolari.* — Sur les « combinants » des systèmes de formes binaires attachés à une courbe gauche unicursale du quatrième ordre (101-161).

La courbe gauche unicursale du quatrième ordre a été l'objet de nombreux travaux portant sur son existence, sa représentation analytique au moyen de quatre formes binaires biquadratiques, l'existence de ses cordes principales, d'une involution biquadratique sur la courbe, etc. Le présent Mémoire a pour but l'extension à cette courbe du théorème suivant de M. Gross :

*Toutes les formes algébriques attachées d'une manière invariante à une courbe plane unicursale $C_n$ sont des invariants et covariants binaires simultanés d'un nombre fini de telles formes, qu'on appelle les* combinants élémentaires.

Si le théorème lui-même est encore simple ici, il n'en est pas de même de l'étude et de l'interprétation géométrique des combinants et de leurs compositions (*spinte*), qui peuvent présenter une grande variété; de plus, entre les compositions des combinants élémentaires et des formes binaires provenant de celle qui donne les points de contact des plans stationnaires, il existe de nombreuses identités dont il faut tenir compte. Cette étude conduit à de nombreux résultats géométriques, la plupart déjà connus, et à des formes simples pour les équations des surfaces intéressantes qui se rattachent à la courbe en question.

*E. Pascal.* — Représentation géométrique des caractéristiques de genre 3 et de genre 4 et de leurs groupes de substitution (163-226).

Clebsch a montré le lien qui existe entre le groupe des substitutions des caractéristiques d'une fonction abélienne et la configuration des systèmes de courbes de contact d'une certaine courbe fixe; c'est ainsi qu'aux caractéristiques impaires correspondent, pour le genre 3, les tangentes doubles de la quartique plane, pour le genre 4, les plans tritangents de la sextique gauche. Une représentation géométrique plus simple est donnée ici; l'ensemble des 28 droites joignant 8 points de l'espace permet de le faire pour le genre 3 (Hesse); c'est l'ensemble des 120 plans déterminés par 10 points de l'espace qui le réalise pour le genre 4. Cette représentation permet de faire l'étude détaillée des groupes de substitutions des caractéristiques et de retrouver les théorèmes déjà rencontrés par Weber et par Noether. A cette étude se rattache très naturellement celle du groupe des substitutions entre les 27 droites d'une surface du troisième degré.

*F. Amodeo.* — Contribution à la théorie des séries irrationnelles involutives simplement infinies situées sur les variétés algébriques (228-235).

Courte Note relative à l'existence de ces séries et au nombre des couples communs à deux séries.

*C. Segre.* — Quelques idées de E. Caporali sur les quartiques planes (237-242).

*G. Ascoli.* — Des fonctions régulières dans une aire convexe quelconque à distance finie (243-255).

Étude des lignes $f(x, y) = C$ dans une aire convexe, qui soit décomposable en un nombre fini de portions où $f$ se comporte d'une des quatre manières connues (décroissant suivant deux directions parallèles aux axes), étudiées dans des Mémoires précédents (*Annali*, t. XIX).

*F. Brioschi.* — E. Betti (Notice nécrologique) (p. 256).

*E. Ciani.* — Sur deux courbes invariantes d'une quartique plane (257-268).

Recherche des caractéristiques pluckériennes de la *covariante* et de la *contravariante* d'une quartique plane (Clebsch, *Sur les courbes du quatrième ordre* (*Journal de Crelle*, t. 59).

*E. Pascal.* — Essai sur le groupe de substitutions des 27 droites de la surface du troisième ordre et sur les groupes isomorphes (269-332).

L'étude de la configuration que forment les 27 droites d'une surface du troisième ordre se réduit à l'étude de la manière dont est formé le groupe de leurs substitutions, substitutions bien entendu compatibles avec les relations invariables qui doivent exister entre elles. Ce groupe a une relation simple avec celui des caractéristiques du genre 3 étudié dans un Mémoire précédent : il correspond exactement au sous-groupe obtenu en laissant inaltérée une caractéristique impaire déterminée. L'étude de ce groupe et de ses sous-groupes (laissant fixe un plan tritangent, ou un couple de plans passant par une droite, etc.) est faite, ici encore, par une méthode graphique; cette méthode offre de grands avantages, mais n'est pas en son principe différente de celle de Schlaefli (*voir* Cremona, *J. de Crelle*, t. 68).

Maurice Janet.

## ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.

Série II, Tome XXI; janvier–décembre 1893 (1).

*Berzolari* (*L.*). — Sur les courbes rationnelles d'un espace linéaire à un nombre quelconque de dimensions (1-24).

Soit $C_n^d$ une courbe rationnelle d'ordre $n$ dans un espace linéaire à $d$ dimensions $S_d$. L'auteur généralisant un travail précédent relatif à $C_4^3$ (*Annali di Matematica*, t. XX), étudie sur $C_n^d$ l'involution dite *involution fondamentale*, conjuguée de l'involution déterminée sur la courbe par un plan quelconque de $S_d$. Il démontre que, en général, cette involution fondamentale ne peut présenter un groupe plan, unique d'ailleurs, que si $d$ est pair et $n$ impair. Il étudie, plus généralement, l'involution conjuguée de celle qu'on obtient en coupant la courbe par des plans contenant un espace fixe $S_h (h \leqq d \leqq n)$ et il détermine les groupes plans de cette involution. Plusieurs résultats sont établis en considérant $C_n^d$ comme projection d'une courbe normale $C_n^n$ de $S_n$.

*Vivanti* (*G.*). — Sur les séries de puissances dont les coefficients dépendent d'une variable (25-32).

Les séries envisagées sont des séries en $z$ dont les coefficients sont des polynomes en $u$ de degré $\leqq p$, $p$ étant un nombre fixe. On peut construire de pareilles séries de façon qu'elles aient pour $n$ valeurs données $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de $u$ un rayon de convergence donné R, fini ou infini et, pour toutes les autres valeurs de $u$, un rayon de convergence nul. L'auteur montre ensuite que si le rayon de convergence a une même valeur R pour $p+1$ valeurs de $u$, il est égal à R, quel que soit $u$. A l'aide de quelques propositions relatives aux déterminants d'ordre infini, l'étude précédente est étendue aux séries en $z$ dont les coefficients sont, non plus des polynomes, mais des séries de puisssances en $u$.

*Pirondini* (*G.*). — Quelques formules relatives aux lignes tracées sur une surface et applications de ces formules (33-46).

Étude de quelques invariants de déformation. — Formules diverses relatives aux courbes, spécialement aux géodésiques, tracées sur un cône ou sur un cylindre. — Conditions nécessaires et suffisantes pour que, en tout point d'une ligne tracée sur une surface, la sphère osculatrice soit orthogonale, ou tangente, à la surface. Propriétés de ces lignes.

*Zignago* (*I.*). — Au sujet d'un théorème d'arithmétique (47-56).

---

(1) *Voir* ci-dessus, p. 85.

L'auteur propose une démonstration, de nature purement arithmétique, du célèbre théorème démontré par Dirichlet : « Toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont premiers entre eux contient une infinité de nombres premiers. »

*Pereno* (*I.*). — Quelques recherches sur le groupe de substitutions et la configuration des 16 droites de la surface du quatrième ordre à conique double (57-84).

Ce travail se rattache par la méthode et par les résultats aux recherches de M. E. Pascal sur les 27 droites de la surface cubique $S_3$ (*Annali di Mat.*, t. XX et XXI). La configuration des 16 droites de la surface $S_4$ du quatrième ordre à conique double peut s'obtenir en supprimant, parmi les 27 droites de $S_3$, une de ces droites et les 10 qui la rencontrent. L'auteur, partant de ce résultat connu et de la représentation graphique des droites de $S_3$ adoptée par M. E. Pascal, étudie la configuration des 16 droites de $S_4$, le groupe de substitutions G qui s'y rattache, diverses figures formées de droites et de plans qu'on peut construire avec les 16 droites et les sous-groupes de G qui laissent invariantes ces diverses figures.

*Pascal* (*E.*). — Suite de l'essai sur le groupe de substitutions entre les droites de la surface cubique (Mémoire III) (85-137).

Ce Mémoire fait suite aux Mémoires I et II déjà parus dans ce Recueil. L'auteur étudie d'abord les *ennuples*, c'est-à-dire ces ensembles de 9 droites avec lesquelles on peut former 6 plans constituant un couple de trièdres dits *conjugués*. Il s'occupe ensuite des *sextuples* (groupe de 6 droites ne se rencontrant pas deux à deux); à chaque sextuple correspond un sextuple conjugué (tel que chaque droite de l'un rencontre 5 droites seulement de l'autre) formant avec le premier un *bisextuple*. Les ensembles de bisextuples, les quintuples, etc. sont étudiés ainsi que les groupes de substitutions entre les 27 droites qui laissent fixes ces diverses configurations.

*Pincherle* (*S.*). — Sur les séries de puissances. (Extrait d'une lettre à M. Vivanti.) (138-140).

Remarques diverses relatives au travail de M. Vivanti analysé plus haut.

*Fano* (*G.*). — Étude de quelques systèmes de droites considérés comme surfaces de l'espace à cinq dimensions (141-192).

On sait que toute droite de l'espace $S_3$ à trois dimensions peut être considérée comme un point d'une certaine quadrique Q de l'espace $S_5$ à cinq dimensions. A ce point de vue, toute congruence de droites de $S_3$ peut être considérée dans $S_5$ comme une surface contenue dans Q. L'auteur étudie par cette méthode les congruences d'ordre 2 ou de classe 2, puis les congruences pour lesquelles la somme de l'ordre et de la classe est l'un des nombres 5, 6, 7 ou 8.

*Vivanti* (*G.*). — Sur les séries de puissances. (Extrait d'une lettre à M. Pincherle.) (193-194).

Le Mémoire analysé plus haut est ici complété par deux nouveaux exemples généraux de séries de puissances en $z$, à coefficients analytiques en $u$, ayant un rayon de convergence discontinu pour certaines valeurs données de $u$.

*Caló* (*B.*). — Sur les développées des surfaces dont les rayons principaux de courbure sont liés par la relation

$$r_1 - r_2 = 2\,T_0 \sin \frac{r_1 + r_2}{2\,T_0} \qquad (T_0 \text{ constant}),$$

et sur la déformation de ces développées (195-220).

Il résulte des théorèmes de Weingarten que les développées des surfaces considérées sont des surfaces $\Sigma$ applicables sur une même surface de révolution S. En partant de la construction donnée par M. Darboux pour les surfaces $\Sigma$, l'auteur s'est proposé de vérifier sur ces surfaces un certain nombre de théorèmes généraux de la théorie des surfaces applicables donnés par M. Darboux dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces* (t. III, p. 277-282), par exemple le théorème d'après lequel on peut déformer une surface de façon qu'une ligne donnée devienne asymptotique pour la surface déformée. Dans chaque cas, l'auteur donne explicitement les formules qui résolvent les problèmes de déformation qu'il traite.

*Amodeo* (*F.*). — Courbes $k$-gonales. (Mémoire I.) (221-236).

Une courbe algébrique $k$-gonale est une courbe qui possède une série linéaire $\infty^1$ d'ordre $k$ sans posséder une série linéaire $\infty^1$ d'ordre $k-1$. Pour $k=2$, on a les courbes hyperelliptiques. Soit $C_p^m$ une courbe algébrique de genre $p$, d'ordre $m$. Toutes les courbes $C_{2k-3}^{2k-2}$ ou $C_{2k-2}^{2k-2}$ sont $k$-gonales. Pour toute autre valeur de $p$, les courbes $k$-gonales sont des courbes spéciales du genre $p$. Pour chaque valeur de $m$ ($m \leqq k+1$), on peut définir une courbe $k$-gonale de genre maximum dite *courbe $k$-gonale typique*. Le Mémoire se termine par un tableau donnant l'ordre et le genre des courbes $k$-gonales typiques pour $k \leqq 15$, $m-k \leqq 16$.

*Bianchi* (*L.*). — Recherches sur les formes quaternaires quadratiques et sur les groupes polyédriques (237-288).

Il s'agit ici des formes arithmétiques quaternaires $f$ qu'on peut réduire par une transformation linéaire réelle au type

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2.$$

Ainsi que l'a déjà montré l'auteur (*Math. Annalen*, t. XLII et XLIII), au groupe arithmétique reproduisant $f$, on peut faire correspondre un groupe discontinu de substitutions linéaires à coefficients complexes donnant lieu, suivant les principes établis par Poincaré (*Acta mathematica*, t. III) à une di-

vision régulière de l'espace non euclidien en polyèdres symétriques ou congruents. Toute la théorie des formes considérées repose alors sur la solution du problème suivant : *Construire le polyèdre fondamental correspondant à la forme donnée.* Ce problème est ici résolu pour les formes du type

$$x_1^2 + x_2^2 + \mu(x_3^2 - \nu x_4^2),$$

où $\mu$ et $\nu$ sont deux entiers positifs. Le problème est traité complètement, accompagné de figures représentant les polyèdres, dans sept cas particuliers correspondant à des valeurs simples de $\mu$ et $\nu$. L'étude de ces exemples suffit d'ailleurs pour caractériser la méthode.

## *Hermite* (*Ch.*). — Sur la généralisation des fractions continues algébriques. (Extrait d'une lettre à M. Pincherle.) (289-308).

Le but de ce Mémoire est de résoudre le problème suivant :

*Soient* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *n séries données procédant suivant les puissances croissantes de* $x$. *Déterminer les polynomes* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *de degrés donnés* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *de manière à avoir*

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + \ldots + S_n X_n = S x^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+n-1},$$

*où* S *est une série de même nature que les séries données.*

Les coefficients des polynomes inconnus pourraient s'obtenir par la résolution d'un système d'équations linéaires et homogènes qui déterminent ces coefficients à un facteur commun près. Mais Hermite se propose ici de donner un algorithme conduisant au résultat sans avoir à résoudre ce système d'équations.

Le premier cas traité est celui où les fonctions données sont de la forme

$$S_i = e^{\zeta_i x}.$$

L'intégrale

$$J = 2i\pi \int_C \frac{e^{zx}\,dz}{(z-\zeta_{11})^{\mu_1+1}(z-\zeta_{12})^{\mu_2+1}\ldots(z-\zeta_{1n})^{\mu_n+1}},$$

où le contour C entoure les points $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, est de la forme

$$S x^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+n-1}.$$

D'autre part, le théorème des résidus donne pour cette intégrale une expression de la forme cherchée

$$X_1 e^{\zeta_{11}x} + X_2 e^{\zeta_{12}x} + \ldots + X_n e^{\zeta_{1n}x},$$

et les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s'obtiennent par ce calcul de résidus.

Les polynomes X vérifient des relations de récurrence obtenues en partant d'autres relations de récurrence entre certaines intégrales analogues à J. Ces dernières relations sont complètement développées pour $n = 2$. L'algorithme ainsi introduit pour obtenir l'approximation maximum de $X_1 e^{\zeta_1 x} + X_2 e^{\zeta_2 x}$ est étendu au cas où, $n$ étant toujours égal à 2, les deux exponentielles sont remplacées par des séries quelconques S et S′ en $x$. Les polynomes $X_1$ et $X_2$ sont

obtenus en cherchant d'abord par voie récurrente deux polynomes P, P′ de degrés respectifs $n+1$, $n$ et deux polynomes Q, Q′ de degrés respectifs $n$, $n+1$ tels que l'on ait

$$SP + S'P' = S_1 x^{2n+2},$$
$$SQ + S'Q' = S'_1 x^{2n+2},$$

où $S_1$, $S'_1$ sont toujours deux séries en $x$. Les polynomes P, P′, Q, Q′ ainsi calculés coïncident avec ceux que M. Padé a introduits dans la théorie des fractions continues algébriques. On passe de là à la détermination de polynomes $X_1$, $X_2$ de degrés quelconques.

Hermite traite ensuite de même le cas d'une fonction à trois termes

$$SX + S'X_1 + S''X_2.$$

La fin du Mémoire est consacré aux séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$. Il s'agit alors de déterminer les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de degrés $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ tels que la fonction $S_1X_1 + S_2X_2 + \ldots + S_nX_n$ contienne une partie entière en $x$ augmentée d'une partie entière en $\frac{1}{x}$, cette dernière ayant pour terme de degré minimum un terme en $\frac{1}{x^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+1}}$. Hermite rappelle d'abord un exemple déjà traité par lui (*Journal de Crelle*, t. 79), et il montre, pour le cas de deux séries S, S′, comment on peut résoudre le probleme proposé par une relation de récurrence semblable à celle de la théorie des fractions continues.

## *Brioschi* (*E.*). — Sur la transformation du onzième ordre des fonctions elliptiques (309-315).

Ce travail se rattache au Mémoire « Sur la théorie des fonctions elliptiques » publié par l'auteur dans le même Recueil (série II, t. XII, 1883). Il est relatif à la transformation du onzième ordre et aux équations modulaires qui s'y rattachent.

Série II, Tome XXII; janvier-décembre 1894.

## *Bertini* (*E.*). — La géométrie des séries linéaires sur une courbe plane suivant la méthode algébrique (1-40).

Ce Mémoire est un exposé de la théorie des séries linéaires de groupes de points sur une courbe algébrique, théorie développée par l'auteur dans la voie algébrique introduite par Brill et Nœther (*Math. Annalen*, t. VII). Les théories développées dans ce Mémoire, et dans le Mémoire de M. Segre qui suit celui-ci, ont été exposées plus récemment dans leurs points essentiels par M. Picard dans son Ouvrage classique *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (tome II, chap. II), où il se place au même point de vue que M. Bertini. Nous nous bornerons à donner ici les titres des divers paragraphes du Mémoire de M. Bertini.

1. Définitions. Propositions préliminaires. — 2. Courbes adjointes. Théorème du reste. — 3. Séries complètes. Séries résiduelles. — 4. Séries complètes relatives aux courbes adjointes. Série canonique. Système adjoint pur. — 5. Séries spéciales et non spéciales. Théorème de réduction. Théorème des séries spéciales et conséquences de ce théorème. — 6. Théorèmes de Riemann-Roch et de Brill-Nœther. Théorème de Clifford. Réciproque du théorème de réduction. — 7. Séries composées. Courbes hyperelliptiques. Théorème sur la composition d'une série et ses conséquences. Énoncé plus précis du théorème de Clifford. Théorème de Nœther. — 8. Courbes contenant des séries $g_i^1$. Courbes $i$-gonales. Courbes elliptiques ou rationnelles. — 9. Application aux systèmes linéaires de courbes irréductibles. Systèmes linéaires de courbes hyperelliptiques. Systèmes linéaires surabondants définis par neuf points-bases au plus.

## *Segre* (*C.*). — Introduction à la géométrie sur un élément algébrique simplement infini (41-142).

Cet important Mémoire est consacré, comme le précédent, à l'étude de la géométrie sur les variétés algébriques et plus spécialement sur les courbes algébriques. La méthode employée par M. Segre est celle qu'il a introduite dans ses travaux antérieurs (*voir*, par ex., *Mathem. Annalen*, t. 30 et 34). C'est une méthode géométrique dans laquelle n'interviennent ni les considérations fonctionnelles transcendantes (Riemann), ni les développements algébriques (Brill et Nœther) : c'est seulement par le *principe de correspondance* qu'intervient la nature algébrique des éléments sur lesquels on raisonne.

M. Segre remarque d'abord qu'un élément (en italien *ente*, être) algébrique est susceptible de plusieurs interprétations géométriques. C'est ainsi que l'élément algébrique simplement infini, le seul envisagé à partir du Chapitre II, peut être interprété comme une courbe, mais aussi, par exemple, comme une surface réglée algébrique. C'est pourquoi l'auteur étudie l'élément algébrique sans spécifier une interprétation géométrique particulière de cet élément. L'étude des courbes algébriques est néanmoins celle qu'il a surtout en vue. Le Mémoire est divisé en trois Chapitres.

Dans le Chapitre I sont définies les correspondances algébriques entre deux variétés algébriques à un nombre quelconque de dimensions, en particulier les correspondances rationnelles ou birationnelles ; le principe de correspondance est énoncé. Ces bases algébriques de la théorie étant établies, on peut aborder d'une façon sûre, par la voie géométrique, l'étude de la géométrie sur les variétés algébriques, c'est-à-dire des propriétés invariantes dans les transformations birationnelles de ces variétés. Les séries linéaires, les involutions, les variétés-images, les variétés multiples sont étudiées à ce point de vue, ainsi que quelques propositions relatives aux séries linéaires contenues dans une série donnée.

Dans le Chapitre II, il ne s'agit plus que des éléments algébriques simplement infinis, en particulier des courbes algébriques. Une série linéaire de groupes de points de dimension $r$ et d'ordre $n$, série désignée par $g_n^r$, a pour image dans un espace $S_r$ à $r$ dimensions une courbe d'ordre $n$ : la série est déterminée sur cette courbe par les hyperplans de $S_r$. Les séries $g_n^1$ et les fonctions rationnelles sur l'élément algébrique qui se rattachent à ces séries sont étudiées ensuite. Pour une pareille série $g_n^1$, il y a lieu de considérer le nombre $\nu$ des

points de ramification (nombre des groupes contenant deux points confondus). On arrive ainsi à la notion de *genre* de l'élément algébrique. Après avoir démontré que $\nu - 2n$ a une même valeur (paire) pour toutes les séries $g_h^1$, on pose $\nu - 2n = 2(p-1)$ et $p$ est le genre. Il devient ainsi évident que le genre demeure invariant par une transformation birationnelle. La formule donnant le genre d'une courbe plane ayant des singularités données est ensuite établie. Cette notion de genre s'applique à l'élément algébrique composé $\Gamma$ constitué par les couples de points homologues dans une correspondance algébrique entre deux éléments algébriques $\gamma$, $\gamma'$ et l'on obtient ainsi la formule de Zeuthen. Les points multiples d'ordre $r+1$ d'une série $g_n^r$ donnent lieu à une généralisation des résultats ainsi obtenus à l'aide des points doubles de $g_h^1$, et l'auteur déduit de là la formule de Cayley et Brill sur le nombre des points confondus dans une correspondance $(\alpha, \alpha')$ donnée sur un élément de genre $p$. Dans la même voie est établie une formule donnant le nombre des points doubles d'une involution de degré $m$ sur une courbe C d'ordre $n$ d'un espace $S_r$. Le Chapitre se termine par l'étude des séries complètes, des courbes normales, des séries résiduelles.

Le Chapitre III est consacré à la construction effective des séries linéaires sur une courbe algébrique à l'aide des adjointes de celle-ci. Les propriétés des adjointes et des séries linéaires sont établies et l'on obtient en particulier la limite inférieure $n-p$ de la dimension d'une série linéaire complète d'ordre $n$ sur une courbe de genre $p$. Après une digression sur les éléments elliptiques ou hyperelliptiques, l'auteur étudie les séries linéaires *spéciales* sur un élément algébrique quelconque. Revenant aux courbes adjointes, il établit le théorème du *reste*, le théorème de Riemann-Roch, la loi de réciprocité de Brill et Nœther et il donne diverses applications connues de ces propositions. Vient ensuite l'étude des conditions sous lesquelles il est possible d'établir une relation biunivoque entre deux éléments algébriques de genre $p$, étude qui conduit au calcul du nombre des *modules*. Le Mémoire se termine par la démonstration de quelques propositions déjà énoncées par M. Segre dans diverses Notes et relatives aux surfaces réglées algébriques, propositions qu'on déduit de la théorie générale en donnant une nouvelle interprétation géométrique aux éléments algébriques abstraits considérés précédemment comme des courbes.

## *Somigliana* (*C.*). — Sur les systèmes symétriques d'équations aux dérivées partielles (143-156).

Il s'agit ici de certains systèmes formés de $n$ équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre, à deux variables indépendantes et à $n$ fonctions inconnues. Ce sont des systèmes pour lesquels il existe un théorème analogue au théorème de Green pour l'équation de Laplace. L'auteur déduit de là la représentation à l'aide d'intégrales définies des intégrales du système assujetties à certaines conditions aux limites. Les formules obtenues dérivent, comme pour la formule de Green, de l'existence d'intégrales *caractéristiques*, c'est-à-dire ayant un point singulier isolé où elles deviennent infinies, ainsi que leurs dérivées, suivant une loi déterminée. L'existence de ces intégrales caractéristiques est ramenée par l'auteur au problème analogue pour une équation linéaire unique d'ordre $2n$ à coefficients constants, problème qu'il résout dans le cas où cette équation est du type elliptique.

*Marcolongo* (*R.*). — Sur deux mouvements à la Poinsot concordants (157-174).

Les deux mouvements considérés sont deux mouvements à la Poinsot $P_0$, $P_1$ correspondant à la même polhodie. Ils ont été étudiés par M. Darboux (Notes à la *Mécanique* de Despeyrous). M. Marcolongo étudie le mouvement relatif de $P_1$ par rapport à $P_0$. Il exprime successivement, à l'aide des fonctions elliptiques, les 9 cosinus des angles que font les axes liés à $P_1$ avec les axes liés à $P_0$, les composantes de la rotation, et il donne les équations du mouvement de $P_1$ par rapport à $P_0$. L'identité de ces dernières équations avec celles du mouvement d'un corps pesant de révolution suspendu par un point de son axe démontre le théorème de Jacobi relatif à la décomposition d'un pareil mouvement en deux mouvements à la Poinsot, théorème établi autrement par Padova, Halphen et M. Darboux. Le Mémoire se termine par l'étude de la polhodie et de l'herpolhodie.

*Burkhardt* (*H.*). — (Traduit de l'allemand par E. Pascal.) Paolo Ruffini et les origines de la théorie des groupes (175-212).

Ce Mémoire est extrait des *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik* publiés en supplément au Tome 37 du *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. C'est une étude critique des œuvres mathématiques de Paolo Ruffini (1765-1822). Ce mathématicien paraît avoir été le premier à énoncer et à démontrer l'impossibilité de la résolution par radicaux des équations de degré supérieur au quatrième. Il a consacré à cette question cinq Mémoires dont le dernier est de 1813. Malgré l'obscurité de certaines démonstrations et le peu de précision de quelques définitions, Ruffini peut être considéré comme un véritable précurseur de la Théorie des groupes dans ses rapports avec la Théorie de la résolution algébrique des équations.

*Pirondini* (*G.*). — Symétrie orthogonale par rapport à une surface de révolution (213-236).

Deux points A et $A_1$ sont dits symétriques par rapport à une surface $\Sigma$ si la droite $AA_1$ est normale à $\Sigma$ en son milieu. Dans le cas où $\Sigma$ est une surface de révolution, soient L une ligne quelconque, $L_1$ sa symétrique par rapport à $\Sigma$, $\Lambda$ la projection orthogonale de L et de $L_1$ sur la surface $\Sigma$. L'auteur donne des formules générales qui lui permettent de déterminer deux des quatre éléments L, $L_1$, $\Sigma$, $\Lambda$ connaissant les deux autres. En particularisant ces éléments, il obtient divers théorèmes de géométrie.

*Pannelli* (*M.*). — Sur la construction de la surface du troisième ordre déterminée par 19 points (237-260).

L'auteur part d'une correspondance particulière entre trois faisceaux de rayons, correspondance qu'il appelle *corrélation de seconde espèce*. Dans cette correspondance, à deux rayons pris dans les faisceaux (A) et (B) correspond un plan $\Pi$ du troisième faisceau (C) et le lieu des points où concourent deux rayons de (A), (B) et le plan $\Pi$ correspondant est une surface du troisième

ordre. La corrélation considérée peut être construite en partant de 19 points donnés par lesquels doit passer la surface.

*Pittarelli* (*G.*). — Les groupes continus projectifs simplement infinis de l'espace ordinaire (261-311).

L'auteur se propose d'obtenir, sous forme réduite, les transformations infinitésimales des groupes projectifs de l'espace et d'en déduire, par intégration, les divers types de groupes projectifs à un paramètre de l'espace. Sophus Lie a traité explicitement le cas des groupes projectifs du plan, mais il n'a pas fait une étude aussi complète pour les groupes de l'espace. C'est cette lacune que l'auteur se propose de combler.

Les transformations infinitésimales étant données par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, on est conduit, pour donner à ce dernier système une forme réduite, à se servir des formes réduites des substitutions linéaires ou, en employant le langage géométrique, des formes réduites des homographies de l'espace. L'auteur se sert à cet effet de la classification de ces homographies donnée par M. Segre (*Memorie dell' Accademia di Torino*, t. 37, 1885) et par M. Predella (*Annali di Matematica*, t. 17, 1889), en partant de la théorie des diviseurs élémentaires de Weierstrass. Il obtient ainsi 13 types de groupes projectifs : pour chacun d'eux, l'auteur donne les équations de groupe sous forme finie et il étudie les courbes invariantes par les transformations du groupe ; à côté du groupe lui-même sont étudiés dans chaque cas les groupes correspondants des transformations des plans ou des droites de l'espace et les éléments géométriques, surfaces développables ou complexes de droites, invariants par ces transformations. Dans un dernier paragraphe, la classification est reprise en projetant à l'infini dans chaque cas un plan double de l'homographie, ce qui redonne, en coordonnées cartésiennes, les types de groupes projectifs de l'espace.

*Brioschi* (*F.*). — La transformation d'ordre pair des fonctions elliptiques (313-322).

Ce Mémoire est consacré à la transformation d'ordre pair des fonctions elliptiques et à la formation des équations modulaires correspondantes. L'auteur montre comment l'équation modulaire correspondant à la transformation d'ordre $2m$, ou $4m$, où $m$ est impair, peut se déduire de l'équation modulaire relative à la transformation d'ordre $m$ ; la méthode se généralise d'ailleurs et se prête facilement à la recherche des équations modulaires correspondant à un nombre pair et à la recherche des valeurs des invariants de a transformée.

S. Lattès.

## JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK [1].

Tome CXLII; année 1913.

*Lichtenstein* (*Leo*). — Problèmes avec conditions aux limites de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre du type elliptique. I : Le premier problème avec conditions aux limites. Domaines plans généraux (1-40).

Dans quelques travaux antérieurs (*Math. Annalen*, 1909; *Comptes rendus*, 1909) l'auteur s'était déjà occupé de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre du type elliptique et avait en particulier résolu le premier problème avec conditions aux limites pour des domaines plans limités par des contours analytiques à points anguleux et pour des valeurs sur le contour continues, sauf en un nombre fini de points. Il se propose maintenant une exposition systématique de toute la théorie des équations du type elliptique; dans ce premier Mémoire il traite le premier problème avec conditions aux limites pour des valeurs sur le contour continues, sauf en un nombre fini de points, et pour tous les domaines quarrables convexes satisfaisant à une certaine condition d'*analysis situs;* cette condition est en particulier remplie lorsque le contour se compose de plusieurs arcs de courbe à tangente continue et possède un nombre fini de points anguleux ou de points de rebroussement quelconques. Du reste, en général, l'existence de la tangente n'est même pas nécessaire.

L'auteur suppose simplement connue la résolution du problème de Dirichlet pour les domaines limités par un contour à courbure continue. Son Mémoire se divise en trois Chapitres : le premier s'occupe de l'équation elliptique sous sa forme normale pour les contours à courbure continue; le second de la même équation pour les contours plus généraux dont il est question plus haut; le troisième enfin s'occupe de la réduction de l'équation elliptique la plus générale à sa forme normale.

### Chapitre I. — *Les équations aux dérivées partielles elliptiques sous la forme normale. Contours à courbure continue.*

1. *Solutions régulières.* — Soit T un domaine plan simplement ou multiplement connexe, limité par un contour S formé d'un nombre fini de courbes $S_1$, $S_2$, ..., $S_n$, fermées, sans point double et à courbure continue, qui ne se coupent ni ne se touchent. Soit, de plus, l'équation

$$(1) \qquad L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} - cu = f,$$

où les coefficients $a$, $b$, $c$, $f$ sont continus, $a$ et $b$ admettant en T et S des dérivées partielles du premier ordre continues, $c$ et $f$ satisfaisant à l'intérieur de T à la condition de Hölder : cela veut dire qu'à chaque domaine $\mathfrak{T}$ tout entier inté-

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVII, 1913, p. 107-186.

rieur à T on peut faire correspondre un nombre positif M et un nombre $\lambda$ plus petit que 1, tels que si $(x, y)$ et $(x+h, y+h')$ sont deux points quelconques de $\mathfrak{T}$, on ait

$$|c(x+h, y+h') - c(x, y)| < M\{|h| + |h'|\}^{\lambda},$$

avec la même inégalité pour $f$.

On se donne sur S une suite continue, sauf en un nombre fini de points, de valeurs $\varphi(s)$. L'auteur démontre alors le théorème fondamental suivant :

*Ou bien l'équation* (1) *a pour toutes les fonctions $f$ une solution et une seule $u(x, y)$ bornée et régulière dans* T (*c'est-à-dire continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres*), *prenant sur* S *les valeurs données $\varphi(s)$; ou bien l'équation homogène* $L(u) = 0$ *a un nombre fini de solutions $u_1(x, y), \ldots, u_m(x, y)$ linéairement indépendantes, régulières dans* T *et s'annulant sur* S.

Ce théorème résulte de ce que l'équation (1), avec les conditions aux limites données, est équivalente à l'équation intégrale

$$\begin{aligned} u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_T\int \Big[ & G(x, y; \xi, \eta)\, c(\xi, \eta) \\ & - \frac{\partial}{\partial \xi}\{a(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)\} \\ & - \frac{\partial}{\partial \eta}\{b(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)\}\Big]\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ - \frac{1}{2\pi}\int_T\int & G(x, y; \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + v(x, y), \end{aligned}$$

où $G(x, y; \xi, \eta)$ désigne la fonction de Green, nulle sur S, du problème de Dirichlet correspondant au domaine T, et où $v(x, y)$ désigne la fonction potentielle régulière en T qui prend sur S les valeurs données $\varphi(s)$.

Si l'équation intégrale (2) admet une solution unique $u(x, y)$, celle-ci est régulière dans T et prend sur S les valeurs $\varphi(s)$. Sinon l'équation homogène admet $m$ solutions linéairement indépendantes régulières dans T et nulles sur S.

Si les fonctions $c$ et $f$, au lieu de satisfaire à la condition de Hölder, sont simplement continues, la fonction $u$ admet encore dans T des dérivées du premier ordre continues et satisfaisant à la condition de Hölder, mais l'existence des dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ n'est assurée que presque partout et $u$ vérifie presque partout l'équation (1).

2. *La fonction de Green s'annulant sur le contour.* — L'auteur suppose que l'équation $L(u) = 0$ n'admet aucune solution non nulle régulière dans T et s'annulant sur S; il cherche alors à déterminer la fonction de Green

$$\mathcal{G}(X, Y; x, y) = \log\frac{1}{r} + U(x, y),$$

satisfaisant à l'équation $L(u) = 0$, régulière dans T, sauf au point $(X, Y)$ où elle devient infinie comme $\log\frac{1}{r}$, et nulle sur S. La fonction U, ainsi que les

expressions

$$\frac{\partial U}{\partial x}\left|\log\frac{1}{r}\right|,\quad \frac{\partial U}{\partial y}\left|\log\frac{1}{r}\right|,$$

doivent être finies au voisinage de (X, Y).

La fonction U est donnée par l'équation intégrale

$$(3)\quad U(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T\int\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(aG) + \frac{\partial}{\partial\eta}(bG) - cG\right]U(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_T\int G(x, y; \xi, \eta)\,\Phi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + g(X, Y; x, y),$$

où l'on a posé

$$\Phi(x, y) = -L\left(\log\frac{1}{r}\right),$$
$$g(X, Y; x, y) = G(X, Y; x, y) - \log\frac{1}{r}.$$

L'équation intégrale (3) admet une solution unique continue, satisfaisant aux conditions voulues au voisinage de (X, Y). De plus, les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ sont continues quand on s'approche du contour. Les dérivées partielles $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$ sont ainsi continues sur S. Ces dernières propriétés sont démontrées en montrant que $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}$ satisfont à un certain système d'équations intégrales linéaires. Une démonstration analogue montrerait que si $\varphi(s)$ est continue et admet des dérivées des deux premiers ordres continues (ou du moins une dérivée du premier ordre satisfaisant à la condition de Hölder), les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ de la solution $u$ de l'équation (1) sont continues sur S.

L'auteur étend ensuite à la fonction $\mathcal{G}$ des propriétés classiques de la fonction de Green ordinaire G. On a, en particulier, l'inégalité

$$|\mathcal{G}(X, Y; x, y)| < \left|\log\frac{1}{r}\right| + A,$$

où A est un nombre positif constant, pour tous les couples de points (X, Y) et $(x, y)$, différents, pris dans T et sur S. De plus, à tout point P sur S et à tout nombre positif $\omega$, on peut faire correspondre un nombre positif $\delta(\omega) < \frac{\omega}{2}$ tel que si $(x, y)$ est à une distance de P supérieure à $\omega$ et (X, Y) à une distance de P inférieure à $\delta(\omega)$, on ait

$$|\mathcal{G}(X, Y; x, y)| < \omega.$$

Enfin, l'équation adjointe

$$M(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right)u = 0$$

n'admet, en même temps que $L(u) = 0$, aucune solution non nulle régulière dans T et nulle sur S. Si $\mathfrak{G}(X, Y; x, y)$ est la fonction de Green correspondante, on a la loi de réciprocité

$$\mathfrak{G}(x_1, y_1; x_2, y_2) = \mathfrak{G}(x_2, y_2; x_1, y_1).$$

3. *Solutions régulières* (suite). — L'auteur considère une suite infinie de fonctions continues $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s), \ldots$ tendant vers $\varphi(s)$, et cela uniformément dans toute partie de S qui ne contient pas de point de discontinuité de $\varphi(s)$. Si $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, .... sont les solutions correspondantes de l'équation (1), *on a alors, pour tous les points* $(x, y)$ *de* T *et de* S, *sauf pour les points de discontinuité de* $\varphi(s)$,

$$\lim_{k=\infty} u_k(x, y) = u(x, y).$$

*Le passage à la limite est uniforme dans toute partie de* T *qui ne contient aucun point de discontinuité de* $\varphi(s)$.

En considérant les fonctions $\varphi_k(s)$ analytiques, ce qui est toujours possible l'auteur démontre la formule

$$u_k(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T\int \mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{G}(x, y; s)\, \varphi(s)\, ds$$

qui le conduit à la formule générale

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T\int \mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{G}(x, y; s)\, \varphi(s)\, ds,$$

valable pour tous les points $(x, y)$ de T et pour toutes les fonctions $\varphi(s)$ indiquées au début. Elle est également valable, comme il le démontre dans un Mémoire non publié des *Acta mathematica*, pour les domaines limités par un nombre fini d'arcs de courbes analytiques régulières avec points anguleux et pointes non rentrantes.

4. *Le cas particulier* $c < 0$. *Le procédé alterné.* — Si la fonction $c$ est négative, l'équation intégrale (2) admet toujours une solution et une seule. On peut dans ce cas étendre à l'équation (1) le procédé alterné de Schwarz dans le cas d'un domaine simplement connexe. Si, en effet, on prend sur S deux points $B_1$ et $B_2$ et qu'on les relie par une courbe $S^*$ à courbure continue, tout entière à l'intérieur de T et ne touchant pas S, la solution $\omega(x, y)$ de l'équation homogène $L(u) = 0$ qui prend sur les deux parties de S respectivement les valeurs 1 et 0, satisfait, en tous points de $S^*$, à une inégalité

$$|\omega(x, y)| < q,$$

où $q$ est un nombre fixe plus petit que 1.

L'auteur termine le Chapitre en indiquant la résolution de l'équation (1) pour le domaine formé d'un cercle muni d'une coupure le long d'un rayon.

### Chapitre II. — *Les équations aux dérivées partielles elliptiques sous la forme normale. Domaines généraux.*

1. *Le cas particulier $c < 0$. La fonction de Green qui s'annule sur le contour.* — L'auteur considère un domaine T borné, limité par un contour S fermé, continu et sans point double (courbe de Jordan). Il suppose les coefficients $a$, $b$, $c$ définis dans un domaine T* qui contient le domaine T tout entier à son intérieur, et satisfaisant dans T* aux mêmes conditions que plus haut; il suppose de plus que l'expression $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}$ existe et satisfait dans T* à la condition de Hölder. Il considère ensuite une suite $T_1, T_2, T_3, \ldots$, de domaines de la nature de ceux considérés dans le Chapitre I, limités par des contours $S_1$, $S_2$, $S_3, \ldots$ tels que $S_k$ est contenu tout entier dans $T_{k+1}$ et que le maximum de la distance des points de $S_k$ à S tend vers zéro quand $k$ augmente indéfiniment. Enfin il désigne par $T_0$ un domaine simplement connexe, limité par une courbe $S_0$ à courbure continue située dans T*, et contenant T à son intérieur.

Soient $\mathcal{G}_k(X, Y; x, y)$ et $\mathcal{G}^0(X, Y; x, y)$ les fonctions de Green relatives aux domaines $T_k$ et $T^0$. Un théorème de Paraf, qui repose sur l'hypothèse $c < 0$, montre que $\mathcal{G}_{\nu+1} - \mathcal{G}_\nu$ est positif ou nul dans $T_\nu$. La série infinie

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} (\mathcal{G}_{\nu-1} - \mathcal{G}_\nu)$$

est alors convergente dans $T_k$ et sur $S_k$, et la convergence est uniforme dans tout domaine tout entier intérieur à $T_k$. De plus la somme $\Omega_k(x, y)$ de cette série est une solution, régulière dans $T_k$, de l'équation $L(u) = 0$. D'après cela la série

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathcal{G}_{\nu+1} - \mathcal{G}_\nu)$$

est aussi une solution de la même équation, régulière dans T, sauf au point (X, Y) où elle devient infinie comme $\mathcal{G}_1$.

Pour démontrer que la fonction $\mathcal{G}$ s'annule sur S, *l'auteur a besoin d'introduire une nouvelle hypothèse sur le domaine* T. Il suppose qu'il est possible de joindre tout point de S à un point de $S^0$ par une courbe à courbure continue, sans point double, n'ayant aucun point à l'intérieur de T, mais pouvant avoir avec S des points ou même des arcs en commun. Le domaine qui se déduit de $T^0$ par la courbe précédente regardée comme une *coupure*, admet une fonction de Green $\overline{\mathcal{G}}$ dont la comparaison avec $\mathcal{G}$ montre que cette dernière fonction s'annule sur S. L'existence de la fonction de Green est ainsi démontrée; cette fonction de Green est d'ailleurs unique.

2. *Le cas particulier $c < 0$, $c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} < 0$. Le premier problème avec conditions aux limites.* — L'équation adjointe $M(u) = 0$ admet, avec les hypothèses faites, une fonction de Green $\mathcal{H}(X, Y; x, y)$. Si l'on suppose alors le

domaine T quarrable, l'intégrale

$$V(X, Y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T\int \mathcal{G}(X, Y; x, y)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

est définie à l'intérieur de T et tend uniformément vers zéro quand on s'approche de S. Cette fonction V (X, Y) admet, en tous les points intérieurs à T, des dérivées partielles continues des deux premiers ordres et elle satisfait à l'équation (1).

Supposons les coordonnées d'un point de S définies en fonctions continues (périodiques) d'un paramètre $t$ et soient $\varphi(t)$ les valeurs, supposées d'abord continues, données sur le contour S. Il existe une fonction $F(x, y)$, continue dans $T^0$, et prenant sur S les valeurs $\varphi(t)$. Cette fonction peut être développée en série uniformément convergente de polynomes $P_k(x, y)$ et l'on peut supposer

$$|P_1| < \delta_1, \qquad 0 \leq P_k < \delta_k,$$

la série

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots$$

étant convergente. D'après cela, si l'on pose

$$u_k(x, y) = P_k(x, y) + \frac{1}{2\pi}\int_T\int L[P_k(\xi, \eta)]\,\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$u_k$ est une solution, régulière dans T, de l'équation $L(u) = 0$, qui prend sur S les valeurs $P_k(x, y)$. La fonction

$$-\frac{1}{2\pi}\int_T\int \mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y),$$

où la série est uniformément convergente dans T et sur S, résout alors le premier problème avec conditions aux limites pour l'équation (1).

Si la fonction $\varphi(t)$ admet un nombre fini de discontinuités, on peut la regarder comme la limite, uniforme dans les portions de S qui ne contiennent pas de point de discontinuité de $\varphi(t)$, d'une suite de fonctions $R_k(t)$, bornées dans leur ensemble, continues et croissantes avec $k$. La solution $u^{(k)}(x, y)$ de l'équation $L(u) = 0$, régulière dans T et qui prend sur S les valeurs $R^{(k)}(t)$, tend vers une limite $u'(x, y)$ qui prend sur S les valeurs $\varphi(t)$. On a alors

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T\int \mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - \lim_{k=\infty} u^{(k)}(x, y).$$

3. *La résolution définitive du premier problème avec conditions aux limites.* — L'auteur maintenant ne suppose plus qu'on ait

$$c < 0, \qquad c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} < 0.$$

Il considère alors une constante $c_0$ telle qu'on ait dans $T^*$

$$c_0 < 0, \qquad c_0 - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} < 0.$$

L'équation (1) est équivalente à

$$\overline{L}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c_0 u = f + (c_0 - c)u.$$

Soit l'équation adjointe

$$\overline{M}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} + \left(c_0 - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right)u.$$

Soient $\overline{\mathcal{G}}$ et $\overline{\mathcal{H}}$ les fonctions de Green relatives aux équations homogènes $\overline{L}(u) = 0$ et $\overline{M}(u) = 0$ et correspondant au domaine T; soit enfin $u_0(x, y)$ la solution de l'équation $\overline{L}(u) = 0$, bornée et régulière dans T, qui prend sur S les valeurs données $\varphi(t)$. L'équation (1), avec les conditions aux limites données, est équivalente à l'équation intégrale

$$(4) \qquad u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T\int \overline{\mathcal{H}}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + u_0(x, y)$$
$$- \frac{1}{2\pi}\int_T\int \overline{\mathcal{H}}(x, y; \xi, \eta)[c_0 - c(\xi, \eta)]u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Si cette équation intégrale admet une solution et une seule, cette solution est régulière dans T, prend sur S les valeurs données et satisfait à l'équation (1). Sinon l'équation différentielle $L(u) = 0$ admet autant d'intégrales linéairement indépendantes s'annulant sur S que l'équation intégrale (4) rendue homogène admet de solutions linéairement indépendantes.

CHAPITRE III. — *L'équation aux dérivées partielles linéaires générale du second ordre de type elliptique. Réduction à la forme normale.*

Soit $\overline{\Theta}$ un domaine limité par une courbe $\overline{\Sigma}$ fermée, sans point double et à courbure continue; soit de plus $\Theta$ un domaine quelconque tout entier continu à l'intérieur de $\overline{\Theta}$ et limité par une courbe $\Sigma$ fermée, sans point double et à courbure continue. L'auteur considère l'équation

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial y} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = H, \qquad AC - B^2 = 1,$$

où A, B, C sont des fonctions définies dans $\overline{\Theta}$, continues, avec des dérivées partielles des deux premiers ordres continues, où D et E sont continues avec des dérivées partielles du premier ordre continues et où H est continue et satisfait à la condition de Hölder.

L'auteur démontre la possibilité de la réduction de l'équation précédente au type normal en utilisant certains résultats dus à E.-E. Levi et à lui-même, et relatifs à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Il utilise les solutions de cette dernière équation $\Gamma(\overline{x}, \overline{y}; x, y)$ où $\overline{x}$, $\overline{y}$ est

un point quelconque de $\overline{\Theta}$ extérieur à $\Theta$, régulières dans $\overline{\Theta}$, sauf au point $(\overline{x}, \overline{y})$ où elles deviennent logarithmiquement infinies. A chacune X de ces solutions correspond une solution adjointe Y satisfaisant aux équations

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -B\frac{\partial X}{\partial x} - C\frac{\partial X}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = A\frac{\partial X}{\partial x} + B\frac{\partial X}{\partial y}.$$

Ces fonctions X, Y définissent une représentation du plan $(x, y)$ sur le plan $(X, Y)$ et cette représentation sert de point de départ à l'auteur pour obtenir une autre représentation réversible donnant à l'équation elliptique générale la forme normale.

## *Bachmann* (*P.*). — Sur le reste de $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ (mod $p$) (41-51).

L'étude du grand théorème de Fermat a attiré l'attention sur le reste de $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ (mod $p$). Stern a indiqué la congruence

$$(1) \qquad \frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{p-2} \pmod{p}.$$

L'auteur donne de cette congruence de nouvelles démonstrations qui le conduisent à d'autres formules analogues, mais qui ne semblent pas plus que la première de nature à décider quand le reste considéré est divisible ou non par $p$. Il se propose dans cet article d'indiquer des expressions d'une autre nature.

En partant de la congruence (1) et en désignant par $v'$ ceux des associés des nombres $1, 2, 5, \ldots, p-2$ qui sont impairs, il arrive à la formule

$$(2) \qquad \frac{2^{p-1}-1}{p} - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv 2\Sigma v' \pmod{p}.$$

Il en déduit la congruence

$$(3) \qquad \frac{2^{p-1}-1}{p} + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - 2 \equiv \Sigma\, sgn(s-t)(-1)^{s+t-1}s \pmod{p},$$

où la somme du second membre est étendue à toutes les solutions $(s, t)$, en nombres positifs entiers plus petits que $p$, de la congruence

$$s^2 - t^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

En désignant par $w(z)$ le nombre 1, si $z$ est divisible par $p$, et le nombre 0, si $z$ est premier avec $p$, la formule (3) peut s'écrire

$$(4) \qquad \frac{2^{p-1}-1}{p} - \frac{p^2-1}{4} \equiv \sum_{s=1}^{p-1}\sum_{t=1}^{p-1}(-1)^{s+t}\, w(s^2-2ts-1) \pmod{p}.$$

En désignant enfin par $r$ la racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité

$$r = e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

on peut donner à la dernière congruence la forme

$$(5)\qquad \frac{2^{p-1}-1}{p} = \sum_{h=1}^{p-1}(r^h - r^{-h})\sum_{g}\frac{1}{r^{2gh}-1},$$

où la dernière somme est étendue aux valeurs paires de $g$, depuis 2 jusqu'à $p-1$.

La relation que la formule (5) établit entre le reste de $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ et la théorie de la division du cercle est intéressante, bien que l'auteur ne soit pas encore en mesure d'en tirer des conclusions importantes.

*Burrau* (*Carl*). — Résolution numérique de l'équation

$$\frac{2^{-D}\log 2}{1-2^{-2D}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{p_n^{-D}\log p_n}{1-p_n^{-2D}},$$

où $p_n$ parcourt la série des nombres premiers à partir de 3 (51-53).

Cette équation s'est présentée à Bohr (même journal, t. CXLI, p. 217). L'auteur la résout numériquement en cherchant la valeur de D pour laquelle la fonction

$$\frac{\zeta(D)}{\sqrt{\zeta(2D)}}\,\frac{2^D-1}{2^D+1},$$

atteint son minimum. En se servant des Tables numériques de la fonction $\zeta$ et utilisant la méthode d'approximation de Newton, il trouve

$$D = 2{,}576076,$$

à une demi-unité du dernier ordre décimal.

*Remak* (*R.*). — Nouvelle démonstration d'un théorème de M. Burnside sur certains groupes (54-56).

Il s'agit du théorème suivant :

*Si un groupe* G *admet une suite de sous-groupes invariants*

$$G = H_0, H_1, H_2, \ldots, H_n, E = H_{n+1},$$

*telle que le groupe* $\frac{H_{s-1}}{H_s}$ *forme le centre du groupe* $\frac{G}{H_s}$ *pour* $s = 1, 2, \ldots, n+1$, G *est le produit direct de groupes dont les ordres sont des puissances de nombres premiers tous différents.*

*Rosanes* (*J.*). — Un théorème sur les formes conjuguées (57-60).

Ce théorème s'énonce ainsi :

*Si dans un plan* G $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(p)})$, *et* $g$ $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(p)})$ *sont deux groupes de même puissance* $p$, *le premier de formes ponctuelles, le second de formes tangentielles de degré* $n$, *et si* G *contient une forme* $f$ *conjuguée à tout le groupe* $g$, *réciproquement* $g$ *contient une forme* $\varphi$ *conjuguée à tout le groupe* G.

L'auteur indique plusieurs cas particuliers simples dont nous ne citerons que les deux premiers :

S'il existe une conique $C_2$ conjuguée par rapport à un triangle $abc$ et circonscrite à un triangle $\alpha\beta\gamma$, il existe aussi une conique $K_2$ conjuguée par rapport à $\alpha\beta\gamma$ et inscrite dans $abc$.

Soient $a$, $b$, $c$, $d$ quatre droites et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ quatre points d'un plan. S'il existe une conique $C_2$ passant par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ et polaire par rapport au quadrilatère $abcd$, il existe aussi une conique $K_2$ inscrite dans $abcd$ et polaire par rapport au quadrangle $\alpha\beta\gamma\delta$.

## *Jung* (*Heinrich-W.-E.*). — Sur les courbes distinguées tracées sur les surfaces algébriques (61-117).

Une surface algébrique F se transforme par une transformation birationnelle en une autre surface algébrique $\Phi$. En général à un point de F correspond un point de $\Phi$ et réciproquement. Mais il peut arriver qu'à certaines courbes (en nombre fini) de F corresponde seulement un point sur $\Phi$ et inversement; ces courbes s'appellent *courbes distinguées* de F. Le présent Mémoire s'occupe de la théorie de ces courbes; bien que la plupart des théorèmes qu'il contient soient déjà connus, la méthode employée est nouvelle; de plus, l'auteur ne fait aucune hypothèse restrictive sur la nature des singularités de la surface. Il se réfère souvent à deux Mémoires précédents relatifs aux diviseurs premiers des fonctions algébriques, parus l'un dans le *Circolo matematico di Palermo* (t. XXVI); l'autre dans le *Journal de Crelle* (t. 38).

1. *Les diviseurs premiers.* — On considère un corps algébrique K de deux variables indépendantes. On peut choisir d'une infinité de manières trois fonctions $x$, $y$, $z$ de ce corps, de manière que toute fonction du corps soit une fonction rationnelle de $x$, $y$, $z$; ces trois fonctions sont liées par une relation algébrique $F = 0$ qui peut être regardée comme définissant une surface. Au corps K correspondent donc une infinité de surfaces; on passe de l'une quelconque de ces surfaces à une autre quelconque par une transformation birationnelle.

Soit $\mathfrak{P}$ un corps algébrique d'une variable tel qu'on puisse établir une correspondance entre les éléments de $\mathfrak{P}$ et ceux de K, un élément de K correspondant à un élément et un seul de $\mathfrak{P}$, un élément de $\mathfrak{P}$ correspondant, au contraire, à une infinité d'éléments de K; on suppose que la correspondance respecte les opérations élémentaires du calcul (addition, soustraction, multiplication et division) et que les éléments constants de K correspondent aux mêmes éléments constants de $\mathfrak{P}$. Un tel corps $\mathfrak{P}$ définit ce qu'on appelle un *facteur premier* de K. Une fonction R du corps K est dite *divisible* par $\mathfrak{P}$ lorsqu'il lui correspond dans $\mathfrak{P}$ l'élément zéro.

En même temps que les facteurs premiers on considère les *diviseurs* obtenus

comme produits de diviseurs premiers affectés d'exposants entiers positifs, nuls ou négatifs. Deux diviseurs sont dits *équivalents* lorsque leur quotient est égal à une fonction du corps K.

2. *Les deux espèces de facteurs premiers. Les fonctions associées.* — Il y a deux espèces de facteurs premiers, *lorsqu'on se donne la surface* $F(x, y, z) = 0$ *qui définit le corps* K.

1° Il peut arriver qu'aux éléments $x$, $y$, $z$ du corps K correspondent dans $\mathfrak{P}$ trois constantes $a$, $b$, $c$. On a alors un facteur premier de *seconde* espèce auquel correspond sur la surface F un *point*.

2° Il peut arriver, au contraire, qu'à l'un au moins des éléments $x$, $y$, $z$ du corps K corresponde dans $\mathfrak{P}$ un élément non constant. On a alors un facteur premier de *première* espèce auquel correspond sur la surface F une *courbe*. Cette courbe est le lieu des points qui annulent les différentes fonctions rationnelles $R(x, y, z)$ divisibles par $\mathfrak{P}$.

En réalité, la classification des facteurs premiers en deux espèces est un peu plus compliquée; on est conduit à regarder dans certains cas comme de première espèce certains facteurs premiers auxquels correspondent des points; mais alors ce sont des points singuliers de la surface F, et l'on convient encore de dire que le facteur premier en question définit une courbe réduite à un point. L'auteur indique d'une manière précise dans quels cas cela a lieu.

Il distingue sur la surface F les *points* (définis par trois coordonnées) et les *positions* (Stellen) : celles-ci sont définies par trois développements (de $x$, $y$ et $z$) en séries procédant suivant les puissances de deux paramètres $u$ et $v$ et qui définissent le domaine de la surface voisin de la position correspondant à $u = 0$, $v = 0$. A un point peuvent ainsi correspondre plusieurs positions. Étant donné une position et une fonction $R(x, y, z)$ divisible par un facteur premier $\mathfrak{P}$, cette fonction est, au voisinage de la position, le quotient de deux séries en $u$, $v$; son numérateur $p(u, v)$ peut toujours être mis sous la forme

$$E(u, v) k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \ldots,$$

où $E(u, v)$ est une série ne s'annulant pas pour $u = 0$, $v = 0$, chacun des facteurs $k$ étant un polynome entier en $v$, irréductible, les coefficients étant des séries en $u$, nulles pour $u = 0$, le coefficient de la plus haute puissance de $v$ étant l'unité. Si aucune des équations $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, etc. ne définit le facteur premier $\mathfrak{P}$, on associe à $\mathfrak{P}$, pour la position considérée, la quantité 1; si, au contraire, un ou plusieurs facteurs $k$ définissent le facteur $\mathfrak{P}$, on associe leur produit au facteur $\mathfrak{P}$. On a ainsi dans chaque cas la fonction associée à $\mathfrak{P}$ pour la position considérée.

Le facteur $\mathfrak{P}$ est de première espèce si, pour une position au moins, sa fonction associée est différente de 1; il est de seconde espèce dans le cas contraire.

Lorsqu'on passe de la surface F à une autre surface $\Phi$, il peut arriver que certains facteurs premiers, de première espèce par rapport à F, soient de deuxième espèce par rapport à $\Phi$, ou inversement. Ce sont les facteurs premiers *distingués* relatifs à la transformation qui fait passer de F à $\Phi$. Les *facteurs premiers distingués du corps* K sont ceux qui sont susceptibles de changer d'espèce par une transformation birationnelle.

Toute fonction rationnelle est, d'une manière et d'une seule, décomposable en un produit (et quotient) de facteurs premiers de première espèce par rapport

à F. Elle est, au contraire, divisible par une infinité de facteurs premiers de seconde espèce.

L'auteur désigne par $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$ le nombre des points d'intersection des courbes définis par les facteurs premiers de première espèce $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ : ce nombre peut être, dans tous les cas, défini d'une manière précise. Étant donné de même deux diviseurs quelconques de première espèce n'ayant aucun facteur premier commun de première espèce

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1}\mathfrak{P}_2^{\alpha_2}\ldots\mathfrak{P}_\mu^{\alpha_\mu} \quad \text{et} \quad \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{Q}_1^{\beta_1}\mathfrak{Q}_2^{\beta_2}\ldots\mathfrak{Q}_\nu^{\beta_\nu}$$

on définit la quantité

$$(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = \Sigma\alpha_i\beta_k(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{Q}_k).$$

Si $\mathfrak{T}_1$ est une fonction rationnelle, cette quantité est nulle. Si $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ ont des facteurs premiers communs, on remplace $\mathfrak{T}_1$ par un diviseur $\mathfrak{T}'_1$ équivalent premier avec $\mathfrak{T}_2$.

3. *Les facteurs premiers de seconde espèce.* — L'auteur montre comment on peut définir les facteurs premiers de seconde espèce correspondant à une position S donnée $(x_0, y_0, z_0)$. On se donne une fonction rationnelle $R = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$ indéterminée en S et l'on considère dans le plan des $(u, v)$ les différentes branches de courbe issues de l'origine définies par l'équation

$$P(u, v) - k\,Q(u, v) = 0.$$

Soit

$$v = a_1 u^{\frac{\beta_1}{\alpha}} + a_2 u^{\frac{\beta_2}{\alpha}} + \ldots + a_\nu u^{\frac{\beta_\nu}{\alpha}} + \ldots$$

le développement donnant l'une de ces branches, les $\nu - 1$ premiers coefficients étant indépendants de $k$, le $\nu^{\text{ième}}$ $a_\nu$ en dépendant. Étant alors donnée une fonction rationnelle quelconque de $x, y, z$, on y remplace $x, y, z$ par leurs valeurs en fonctions de $u$ et de

$$v = a_1 u^{\frac{\beta_1}{\alpha}} + a_2 u^{\frac{\beta_2}{\alpha}} + \ldots + t u^{\frac{\beta_\nu}{\alpha}},$$

on fait ensuite $u = 0$; on obtient une fonction de $t$. La correspondance ainsi établie entre le corps K et le corps $b$ des fonctions rationnelles de $t$ (ou plus précisément d'une certaine puissance $t^\varepsilon$ de $t$) définit un facteur premier $b$ de seconde espèce.

L'auteur définit ensuite ce qu'il appelle la *fonction radicale* $B(u, v; t)$ du facteur premier $b$; c'est un polynome entier en $u$ et $v$. Enfin on peut reconnaître dans quel cas un facteur premier de première espèce est divisible par un facteur premier de seconde espèce : géométriquement quand la courbe définie par le premier facteur passe par le point défini par le second facteur.

4. *Les facteurs premiers distingués d'une transformation.* — Étant donnée une transformation faisant passer de la surface

$$F(x, y, z) = 0$$

à la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

on peut trouver facilement les facteurs premiers distingués de cette transformation. Les facteurs premiers de première espèce par rapport à F et de deuxième espèce par rapport à Φ seront désignés, considérés par rapport à F, par les notations

$$\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{A}_m;$$

considérés par rapport à Φ, par les notations

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m.$$

Les facteurs premiers de seconde espèce par rapport à F et de première espèce par rapport à Φ seront de même désignés respectivement par les notations

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n;$$
$$\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{B}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{B}_n.$$

Si l'on décompose une fonction rationnelle en ses facteurs premiers de première espèce par rapport à F et en ses facteurs premiers de seconde espèce par rapport à Φ, on n'obtient pas la même décomposition. Mais on peut passer de l'une des décompositions à l'autre par certaines formules de transformation, qui font intervenir comme intermédiaires (finalement éliminés) les facteurs premiers de seconde espèce $a_i$ et $b_k$. Pour obtenir ces formules, l'auteur désigne par $s\mathfrak{P}$ le produit des facteurs premiers $b$ qui entrent dans $\mathfrak{P}$, et par $s\mathfrak{P}'$ le produit des facteurs premiers $a$ qui entrent dans $\mathfrak{P}'$ ($\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ désignent le même facteur premier considéré successivement par rapport à F et par rapport à Φ).

Grâce à ces notations, les formules de transformation sont les suivantes :

$$(1) \qquad \frac{\mathfrak{A}_i}{s\mathfrak{A}_i} = a_i, \qquad b_i = \frac{\mathfrak{B}_i}{s\mathfrak{B}_i}, \qquad \frac{\mathfrak{P}}{s\mathfrak{P}} = \frac{\mathfrak{P}'}{s\mathfrak{P}'}.$$

Par ces formules un facteur premier de première espèce $\mathfrak{P}$ se change en

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{q'},$$

où le diviseur $\mathfrak{Q}'$ est de première espèce et le diviseur $q'$ de seconde espèce par rapport à Φ. Si l'on a

$$q' = a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \ldots a_m^{\sigma_m}.$$

les exposants $\sigma_i$ sont donnés par

$$\sigma_i = (\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_1)\,[1, i] + (\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_2)\,[2, i] + \ldots + (\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_m)\,[m, i],$$

où $(i, k)$ est nul si $a_i$ et $a_k$ correspondent à des points différents de Φ et où, dans le cas contraire, $(i, k)$ désigne le nombre des points d'intersection à l'origine des courbes

$$A_i(u, v; t_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad A_k(u, v; t_2) = 0,$$

obtenues en égalant à zéro les fonctions radicales de $a_i$ et $a_k$. On définit de même pour les $b_i$ les nombres $[i, k]'$.

Soit $((i, k))$ le système réciproque du système $([i, k])$ et de même $((i,k)')$

le système réciproque du système $([i, k]')$. L'auteur pose

$$(a_i, a_k) = -(i, k)', \qquad (b_i, b_k) = -(i, k).$$

Enfin $\mathfrak{P}$ étant un facteur premier de première espèce par rapport à F, et $\mathfrak{P}'$ un facteur premier de première espèce par rapport à $\Phi$, il pose

$$(\mathfrak{P}, b_i) = 0, \qquad (\mathfrak{P}', a_i) = 0.$$

D'après cela, si l'on *définit* la quantité $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$, où $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ sont des diviseurs de la forme

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1} \ldots \mathfrak{P}_\mu^{\alpha_\mu} b_1^{\gamma_1} \ldots b_n^{\gamma_n}, \qquad \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{P}_1^{\beta_1} \ldots \mathfrak{P}_\nu^{\beta_\nu} b_1^{\delta_1} \ldots b_n^{\delta_n},$$

par la formule

$$(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = \Sigma \alpha_i \beta_k (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_k) + \Sigma \gamma_i \delta_k (b_i, b_k),$$

on a

$$(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = (\mathfrak{T}'_1, \mathfrak{T}'_2),$$

où $\mathfrak{T}'_1$ et $\mathfrak{T}'_2$ sont les diviseurs déduits de $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ par les formules de transformation (1).

5. *Démonstration de quelques théorèmes du numéro précédent.* — Il est impossible d'entrer dans le détail de ces démonstrations.

6. *Un cas particulier important.* — Si $\mathfrak{Q}$ est un diviseur de première espèce par rapport à F et si l'on pose

$$s\mathfrak{Q} = b_2^{\tau_1} b_2^{\tau_2} \ldots b_n^{\tau_n},$$

les exposants $\tau_i$ peuvent être mis sous la forme

$$\tau_i = m_1[i, 1]' + m_2[i, 2]' + \ldots + m_n[i, n]';$$

les coefficients $m_1, \ldots, m_n$ sont rationnels; ils sont entiers si $\frac{\mathfrak{Q}}{s\mathfrak{Q}}$ se transforme par les formules (1) en un diviseur de première espèce par rapport à F. Il est cependant un cas où ces coefficients sont entiers quel que soit $\mathfrak{Q}$, c'est celui où les quantités $s\mathfrak{A}_i$ et $s\mathfrak{B}_k$ sont toutes égales à 1. On verra plus tard que *cela a sûrement lieu lorsque le genre géométrique $p_g$ ou l'un des genres multiples de la surface est différent de zéro.*

Il résulte immédiatement du théorème précédent que le déterminant des $[i, k]$ et celui des $[i, k]'$ sont égaux à 1 ou à $-1$. Par suite encore $[i, i] = 1$ s'il n'y a pas deux facteurs premiers $b$ correspondant au même point que $b_i$; dans ce cas on a $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_i) = -1$.

7. *La classe canonique et les transformées.* — Soient $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ les dénominateurs de $x, y, z$. Il existe un diviseur $\mathfrak{Z}_{xy}$ tel que si l'on considère une position quelconque S de F, on ait en S

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = Z\left(\frac{\mathfrak{Z}_{xy}}{\mathfrak{L}^2 \mathfrak{M}^2}\right) E,$$

où E est une série ne s'annulant pas pour $u = 0$, $v = 0$, et où $Z(\mathfrak{P})$ désigne la fonction associée au diviseur $\mathfrak{P}$ en S.

On définit de même deux autres diviseurs $\mathfrak{Z}_{yz}$, $\mathfrak{Z}_{zx}$. On peut enfin trouver un diviseur $\mathfrak{D}$ tel qu'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\mathfrak{Z}_{yz}\,\mathfrak{D}}{\mathfrak{X}^{l+1}\mathfrak{M}^{m+1}\mathfrak{N}^{n+1}}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{Z}_{zx}\,\mathfrak{D}}{\mathfrak{X}^{l+1}\mathfrak{M}^{m+1}\mathfrak{N}^{n+1}}, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\mathfrak{Z}_{xy}\,\mathfrak{D}}{\mathfrak{X}^{l+1}\mathfrak{M}^{m+1}\mathfrak{N}^{n+1}}.$$

*$\mathfrak{D}$ est le diviseur des courbes multiples de* F.

Les quatre diviseurs

$$\frac{\mathfrak{Z}_{yz}}{\mathfrak{M}^{2}\mathfrak{N}^{2}}, \quad \frac{\mathfrak{Z}_{zx}}{\mathfrak{N}^{2}\mathfrak{X}^{2}}, \quad \frac{\mathfrak{Z}_{xy}}{\mathfrak{X}^{2}\mathfrak{M}^{2}}, \quad \frac{\mathfrak{X}^{l+2}\mathfrak{M}^{m+2}\mathfrak{N}^{n+2}}{\mathfrak{D}}$$

sont équivalents : la *classe* commune $(\mathcal{K})$ à laquelle ils appartiennent s'appelle la *classe canonique* relative à F. Si $(\mathcal{K}')$ est la classe canonique relative à $\Phi$, on pourrait penser que $(\mathcal{K})$ se transforme en $(\mathcal{K}')$ par les formules (1) : mais il n'en est rien. En réalité on a

$$(\mathcal{K}b) = (\mathcal{K}'a),$$

où

$$a = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m}, \qquad b = b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \ldots b_n^{\beta_n},$$

en posant

$$\alpha_i = \alpha_i' + \alpha_i'' - 1, \qquad \beta_i = \beta_i' + \beta_i'' - 1,$$

et en désignant par $(\alpha_i', \alpha_i'')$ et $(\beta_i', \beta_i'')$ les degrés des fonctions radicales de $a_i$ et $b_i$.

8. *Corps dont le genre géométrique ou l'un des genres multiples est différent de zéro.* — L'auteur considère le cas où la classe canonique $(\mathcal{K})$ ou du moins l'une de ses puissances positives $(\mathcal{K}^\alpha)$ contient au moins un diviseur *entier*. Alors on sait que tout diviseur entier de $(\mathcal{K})$ ou de $(\mathcal{K}^\alpha)$ est divisible par les facteurs premiers distingués de F. L'auteur donne une nouvelle démonstration de ce théorème.

De là résulte que *si le genre géométrique ou l'un des genres multiples est différent de zéro, il n'y a sur* F *qu'un nombre fini de courbes distinguées.* De plus $s\mathfrak{A}_i = s\mathfrak{B}_i = 1$. Par suite *si par une certaine transformation la courbe distinguée $\mathfrak{A}$ est changée en un point, aucun point de $\mathfrak{A}$ n'est, par cette transformation, changé en une courbe.*

9. *Transformation du degré de la classe canonique* $(\mathcal{K})$. — L'auteur suppose toujours le genre géométrique ou l'un des genres multiples diffèrent de zéro. Quelle relation existe-t-il entre les degrés $(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ et $(\mathcal{K}', \mathcal{K}')$ de la classe canonique $(\mathcal{K})$ relative à la surface F et de la classe canonique $(\mathcal{K}')$ relative à la surface $\Phi$? L'équivalence de $\mathcal{K}b$ et de $\mathcal{K}'a$ donne

$$(\mathcal{K}b, \mathcal{K}b) = (\mathcal{K}'a, \mathcal{K}'a)$$

ou

$$(\mathcal{K}, \mathcal{K}) + (b, b) = (\mathcal{K}', \mathcal{K}') + (a, a).$$

L'évaluation de $(a, a)$ dépend des valeurs $(a_i, a_k)$. L'auteur démontre que $-(a, a)$ est égal au nombre $m$ des facteurs premiers $\mathfrak{A}_i$ de première espèce par rapport à F qui sont de seconde espèce par rapport à $\Phi$. On a donc

$$(\mathcal{K}, \mathcal{K}) + m = (\mathcal{K}', \mathcal{K}') + n.$$

Comme le nombre des courbes distinguées de première espèce par rapport à F est *fini*, soit $h$, et de même celui des courbes distinguées de première espèce par rapport à $\Phi$, soit $k$, on a

$$(\mathcal{K}, \mathcal{K}) + h = (\mathcal{K}, \mathcal{K}) + k.$$

Autrement dit *la quantité* $(\mathcal{K}, \mathcal{K}) + h$ *est un invariant* pour chaque transformation birationnelle de la surface F.

La quantité $(1 + \mathcal{K}, \mathcal{K})$ est le genre de la classe canonique, désigné par $\omega$ dans les travaux de Castelnuovo et Enriques.

10. *Transformation en une surface sans courbes distinguées.* — Castelnuovo et Enriques ont démontré que toute surface F dont le genre géométrique ou l'un des genres multiples est différent de zéro, peut être transformée en une surface sans courbes distinguées. Ce théorème, vrai au point de vue des géomètres précédents, est douteux au point de vue différent de l'auteur. Celui-ci, en effet, regarde $x$, $y$, $z$ comme des variables complexes représentables chacune sur une sphère de Riemann; il peut donc et il doit parler de *la* valeur particulière $x = \infty$. Certains des facteurs premiers qu'il considère peuvent alors s'évanouir, quand on se place au point de vue ordinaire de Castelnuovo et Enriques : il en est ainsi, par exemple, de la courbe $x = \infty$ de la surface

$$x + y + z = 0.$$

L'auteur n'est pas en mesure de dire si, *à son point de vue*, le théorème de Castelnuovo et Enriques est exact.

11. *L'invariant de Zeuthen-Segre et ses transformations.* — Dans un Mémoire précédent, l'auteur a donné de l'invariant J de Zeuthen-Segre une définition reposant sur la considération des faisceaux de courbes de F, mais valable quelles que soient les singularités. La quantité J n'est pas un invariant pour une transformation birationnelle quelconque. L'auteur démontre que, au contraire, la somme

$$J + (\mathcal{K}, \mathcal{K})$$

ne change pas par une transformation birationnelle. Ce théorème suppose encore que le genre géométrique ou l'un des genres multiples est différent de zéro.

## *Lemke* (*H.*). — Sur les équations différentielles qui déterminent l'équilibre d'un corps céleste gazeux dont les parties s'attirent entre elles suivant la loi de Newton (118-145).

L'auteur considère dans l'espace un certain nombre de corps fixes de masse totale finie et une masse gazeuse soumise aux lois de Mariotte-Gay-Lussac et dont les parties s'attirent entre elles et sont attirées par les corps fixes suivant la loi de Newton. Il particularise de plus le problème en supposant que la pression et la température ne dépendent que de la distance à un point fixe; on obtient, dans ce cas, certaines équations différentielles qui se rattachent à certains types classiques étudiés par Appell, Liouville et Poincaré.

1. *Établissement des équations différentielles.* — Si $p$ désigne la pression,

$\varepsilon$ la densité, $\vartheta$ la température absolue du gaz; si, de plus, U désigne le potentiel des attractions des corps fixes et V le potentiel des attractions de la masse gazeuse, on a les équations d'équilibre

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \varepsilon\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

Ces équations, en tenant compte de la relation

$$p = c\varepsilon\vartheta,$$

où $c$ est une constante positive, conduisent à la relation

$$c\vartheta\,\Delta u + c\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{4\pi f}{c\vartheta}e^u,$$

où $u = \log p$ et où $f$ désigne la constante universelle d'attraction.

Dans le cas où $p$ et $\vartheta$ ne dépendent que de la distance $r$ à l'origine des coordonnées, cette relation se réduit à

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} + \frac{d\log\vartheta}{dr}\frac{du}{dr} = -\frac{4\pi f}{c^2\vartheta^2}e^u.$$

Si l'on suppose en particulier que $\vartheta$ est de la forme $ar^{-\alpha}$, on obtient, en posant

$$\rho = r^{\alpha+1},$$

l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{\varkappa}{\rho}\frac{du}{d\rho} = -2\lambda e^u,$$

avec

$$\varkappa = \frac{2}{\alpha+1}, \qquad \lambda = \frac{2\pi f}{a^2c^2(\alpha+1)^2}.$$

C'est de l'intégration de cette équation que l'auteur s'occupe d'abord.

II. *Réduction de l'équation différentielle du second ordre à une équation du premier ordre.* — Une première transformation

$$x = \rho^2 e^u, \qquad y = \rho\frac{du}{d\rho}$$

conduit à l'équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\lambda x + (\varkappa - 1)y}{x(y+2)};$$

en posant ensuite

$$2\lambda x + (\varkappa - 1)y = \frac{1}{\zeta},$$

on obtient l'équation

$$\frac{d\zeta}{dy} = (y + 3 - \varkappa)\zeta^2 - (\varkappa - 1)y(y+2)\zeta^3.$$

qui appartient au type plus général des équations de la forme

$$\frac{d\zeta}{dy} = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + c_3\zeta^3,$$

étudiées par Liouville.

III. *Cas dans lesquels les intégrales de l'équation différentielle sont représentables sous forme finie.* — Ces cas sont au nombre de deux, à savoir $\varkappa = 1$ ($\alpha = 1$) et $\varkappa = 0$ ($\alpha = \infty$), le premier ayant seul une signification physique.

*Si* $\varkappa = 1$, l'intégrale générale de l'équation différentielle en $u$ et $\rho$ est

$$u = -2\log\left(\rho^{\beta_1}\sqrt{C'} + \rho^{\beta_2}\sqrt{\frac{1}{C'}}\right) + \log\frac{4 - 2C}{\lambda},$$

où C et C′ sont deux constantes arbitraires et où $\beta_1$ et $\beta_2$ sont les racines de l'équation du second degré

$$\beta^2 - 2\beta + \frac{1}{2}C = 0.$$

Si ces racines sont imaginaires, l'intégrale est de la forme

$$u = -2\log[2\rho a\cos(\omega\log\rho) - 2\rho b\sin(\omega\log\rho)] + \log\frac{4 - 2C}{\lambda},$$

avec

$$a^2 + b^2 = 1, \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{2}C - 1}.$$

Enfin si l'équation du second degré en $\beta$ a une racine double, on a l'intégrale particulière, dépendant d'une constante arbitraire C′,

$$u = -2\log\rho - 2\log(c' + \log\rho) - \log\lambda.$$

*Si* $\varkappa = 0$, on a l'intégrale

$$e^u = -\frac{4Ce^{2\sqrt{C\lambda}(\rho-\rho_0)}}{\left(1 - e^{2\sqrt{C\lambda}(\rho-\rho_0)}\right)^2},$$

avec deux constantes arbitraires C et $\lambda$. La formule précédente doit être modifiée si C est négatif ou nul.

IV. *Intégration par des séries infinies qui convergent au voisinage d'un point critique fixe.* — En posant dans l'équation différentielle

$$u = -2\log\rho + \log\left(\frac{1}{\lambda}\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) + v, \qquad \rho^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} = z,$$

on obtient l'équation du second ordre

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \nu\frac{1 - e^v}{z^2}, \qquad \text{avec} \qquad \nu = \frac{2}{\varkappa - 1} = 2\,\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

L'auteur s'occupe des développements en série infinie de la fonction $v$, con-

vergents au voisinage du point critique $z = 0$. Il pose pour cela

$$z\frac{dv}{dz} = w,$$

$$z\frac{dw}{dz} = w - \nu v + \ldots$$

et effectue une substitution linéaire sur $v$ et $w$ de manière à arriver au système

$$z\frac{d\xi}{dz} = \beta_1 \xi + \varphi_1(\xi, \eta),$$

$$z\frac{d\eta}{dz} = \beta_2 \eta + \varphi_2(\xi, \eta),$$

où $\beta_1$ et $\beta_2$ sont les racines de l'équation

$$\beta^2 - \beta + \nu = 0,$$

et où $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont des séries de puissances qui ne contiennent que des termes du second degré au moins.

L'auteur passe en revue les cinq cas qui peuvent se présenter :

1° L'équation en $\beta$ a des racines imaginaires;

2° L'équation en $\beta$ a deux racines réelles, positives, dont le quotient n'est pas un nombre entier;

3° L'équation en $\beta$ a une racine positive et une racine négative;

4° L'équation en $\beta$ a une racine double $\left(\text{égale à } \frac{1}{2}\right)$;

5° L'équation en $\beta$ a deux racines réelles et positives dont le quotient est un nombre entier.

Dans les deux premiers cas on obtient pour $v$ une série procédant suivant les puissances des deux quantités

$$\omega_1 = c_1 z^{\beta_1}, \qquad \omega_2 = c_2 z^{\beta_2},$$

où $c_1$ et $c_2$ sont deux constantes arbitraires.

Dans le troisième cas on a une série procédant suivant les puissances de $cz\beta_1$, où $\beta_1$ est la racine positive.

Dans le quatrième cas on a une série procédant suivant les puissances de

$$\omega_1 = c z^{\beta_0} \quad \text{et} \quad \omega_2 = -c\beta_0 z^{\beta_0} \log z + c' z^{\beta_0} \qquad \left(\beta_0 = \frac{1}{2}\right).$$

Enfin le cinquième cas peut se ramener au quatrième.

V. *Équations différentielles pour l'équilibre convectif de l'atmosphère terrestre.* — Helmholtz, en supposant l'atmosphère terrestre en équilibre adiabatique, a démontré que sa hauteur était finie et d'environ $27500^{m}$. L'auteur se propose de reprendre la question, qui n'a été traitée par Helmholtz qu'en négligeant certains termes.

L'équation d'équilibre de l'atmosphère est

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{f\varepsilon}{r^2}\left(M + 4\pi\int_R^r \varepsilon r^2\,dr\right),$$

où M désigne la masse de la Terre (non compris l'atmosphère).

Dans l'état d'équilibre adiabatique, on a

$$p = a^2\varepsilon^\varkappa, \qquad \vartheta = b^2\varepsilon^{\varkappa-1},$$

où $a$ et $b$ sont des constantes et où $\varkappa$ désigne le rapport des chaleurs spécifiques de l'air à pression constante et à volume constant.

Si d'abord on néglige l'attraction de l'atmosphère, on obtient la relation

$$\vartheta - \vartheta_0 = -\lambda^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right), \qquad \lambda^2 = \frac{fMb^2(\varkappa - 1)}{a^2\varkappa},$$

où $\vartheta_0$ désigne la température absolue à la surface de la Terre et où R désigne le rayon terrestre. On déduit de là que $p$ et $\vartheta$ s'annulent à la hauteur

$$h = \frac{R^2\vartheta_0}{\lambda^2},$$

qui est celle indiquée par Helmholtz.

L'équation exacte à laquelle satisfait $\vartheta$ est

$$\frac{d\vartheta}{d\rho} = \frac{\lambda^2}{R} + \mu^2R^2\int_\rho^1 \vartheta^{\frac{1}{\varkappa-1}}\frac{d\rho}{\rho^4}, \qquad \rho = \frac{R}{r},$$

où l'on a posé

$$\mu^2 = \frac{4\pi f(\varkappa - 1)b^{\frac{2(\varkappa-2)}{\varkappa-1}}}{a^2\varkappa}.$$

Il n'est pas certain, dit l'auteur, que cette équation complète admette une intégrale prenant la valeur $\vartheta_0$ pour $\rho = 1$ et s'annulant pour une valeur $\rho_0$ de $\rho$ comprise entre 0 et 1; cependant cette conclusion semble bien facile à démontrer et la valeur $\rho_0$ est sûrement très voisine de celle de Helmholtz.

VI. *Discussion de l'équation différentielle. Les limites de l'atmosphère.* — L'auteur démontre simplement, en s'appuyant sur la méthode des approximations successives, que l'équation

$$\frac{d^2\vartheta}{d\rho^2} = -\frac{\mu^2R^2}{\rho^4}\vartheta^{\frac{1}{\varkappa-1}},$$

à laquelle satisfait $\vartheta$, admet toujours une intégrale s'annulant pour une valeur donnée quelconque de $\rho$ entre 0 et 1.

*Brouwer* (*L.-E.-J.*). — Sur le concept naturel de dimension (146-152).

Poincaré a donné dernièrement (*Revue de Métaphysique et de Morale*, 1912) la définition suivante par récurrence de la *dimension* d'un continu :

*Un continu est dit à n dimensions quand on peut le décomposer en deux parties (connexes) séparées entre elles par un ou plusieurs continus à $n-1$ dimensions.*

L'auteur expose quelques considérations critiques sur cette définition à laquelle il propose de substituer deux autres, équivalentes entre elles, dont la première est une définition par récurrence qui s'énonce ainsi :

Soient $\pi$ un ensemble normal quelconque, $\pi_1$, $\rho$ et $\rho'$ trois ensembles contenus dans $\pi$, fermés dans $\pi$ et n'ayant aucun point commun. Convenons de dire que $\rho$ et $\rho'$ sont dans $\pi$ séparés par $\pi_1$ si tout ensemble connexe, fermé, contenu dans $\pi$, ayant des points communs avec $\rho$ ainsi qu'avec $\rho'$, a avec $\pi_1$ au moins un point commun. On dit alors que $\pi$ possède la dimension générale $n$ si, pour chaque choix de $\rho$ et de $\rho'$, il existe un ensemble $\pi_1$ séparant $\rho$ et $\rho'$ et de dimension $n-1$, et si de plus il n'existe pas pour tout choix de $\rho$ et $\rho'$ un ensemble $\pi_1$ séparant $\rho$ et $\rho'$ et de dimension inférieure à $n-1$.

Après avoir défini les ensembles qui possèdent une dimension *homogène*, l'auteur démontre le théorème fondamental suivant :

*Une multiplicité à n dimensions possède la dimension homogène n.*

Pour comprendre cet énoncé, rappelons qu'une multiplicité est dite à $n$ dimensions quand les points de cette multiplicité, au voisinage d'un point arbitraire P, sont représentables d'une manière univoque et continue au moyen de $n$ paramètres.

## *Rabinowitsch (Georg).* — Unicité de la décomposition en facteurs premiers dans les corps quadratiques (153-164).

Schatunowski (*Dissertation*, Strasbourg, 1912) a substitué à l'algorithme d'Euclide, pour la recherche du plus grand commun diviseur, un algorithme un peu différent qui réussit dans tous les corps quadratiques, de déterminant $D = 1 - 4m$, jouissant de la propriété qu'un nombre n'est décomposable que d'une manière en un produit de facteurs premiers (corps *simple* selon la dénomination de l'auteur).

On peut généraliser cette idée en substituant, pour la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres $\alpha$, $\beta$, à ces deux nombres $\alpha$, $\beta$ les deux nombres $\beta$ et $\alpha\xi - \beta\eta$, où $\xi$ et $\eta$ sont des entiers satisfaisant à la condition

$$N(\alpha\xi - \beta\eta) < N\beta.$$

Il se trouve, comme l'auteur le démontre dans cet article, qu'un tel algorithme est toujours applicable dans les corps simples. Il déduit en outre de son analyse un procédé extrêmement remarquable et simple pour reconnaître si un corps quadratique est simple.

1. L'auteur démontre d'abord que, pour qu'un corps soit simple, il suffit qu'étant donnés deux nombres quelconques $\alpha$ et $\beta$ du corps dont aucun n'est divisible par l'autre, on puisse déterminer deux nombres $\xi$, $\eta$ du même corps satisfaisant à l'inégalité

$$0 < N(\alpha\xi - \beta\eta) < N\beta.$$

Si le corps n'est pas simple et s'il est impossible de trouver les entiers $\xi$, $\eta$, le

couple $(\alpha, \beta)$ est dit un *couple de nombres perturbateur*. La fraction $\frac{\alpha}{\beta}$ est dite *perturbatrice*.

2. Dans tout corps qui n'est pas simple, il existe au moins une fraction perturbatrice de la forme $\frac{p-\mathfrak{z}}{q}$ où $p$ et $q$ sont deux nombres naturels, $q$ étant premier et $p$ inférieur à $q$, et où $\mathfrak{z} = \frac{1+\sqrt{D}}{2}$.

3. La considération des fractions $\frac{p-\mathfrak{z}}{q}$ conduit au théorème suivant :

*Pour qu'un corps quadratique de déterminant* $D = 1-4m$ *soit simple, il faut et il suffit que tous les nombres naturels*

$$p^2 - p + m \qquad (p = 1, 2, \ldots, m-2)$$

*soient premiers.*

Ces nombres s'introduisent comme normes de $p - \mathfrak{z}$.

Grâce à ce théorème on voit très rapidement que pour $m \leqq 6000$ les seuls corps simples correspondent à $m = 2, 3, 5, 11, 17, 41$. On ne sait pas s'il y a d'autres corps simples que ceux-là.

4. Si le corps quadratique est simple, l'algorithme indiqué au début est toujours applicable, au moins théoriquement.

## *Fejér* (*Leopold*). — Sur la détermination du saut d'une fonction d'après la série de Fourier (165-188).

Étant donnée une fonction $f(x)$ satisfaisant dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ aux conditions de Dirichlet et possédant dans cet intervalle un ou plusieurs points de discontinuité, sa série de Fourier,

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

est convergente et a pour somme $f(x)$ si la fonction est continue au point $x$, $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ si la fonction est discontinue au point $x$.

Le but de cet article est d'indiquer quelques procédés simples pour trouver, en un point de discontinuité $x$, le *saut* de la fonction

$$f(x+0) - f(x-0).$$

1. *Réduction à un cas particulier.* — Soit $x_0$ un point de discontinuité de la fonction $f(x)$. L'auteur considère la fonction

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots,$$

qui est égale dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ à $\frac{\pi - x}{2}$ et qui admet le point de discon-

tinuité 0 (ou $2\pi$) avec le saut $\pi$. La fonction

$$f_1(x) = f(x) - \left[\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} + \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{\pi}\varphi(x-x_0)\right]$$

admet les mêmes points de discontinuité que $f(x)$, à l'exception de $x_0$, pour lequel $f_1(x)$ est continue. On sait même que la série de Fourier de $f_1(x)$ converge uniformément dans l'intervalle $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ où $\delta$ est suffisamment petit. Tout revient donc à l'étude de la série $\varphi(x)$.

2. *Étude de la série de Fourier de* $\frac{\pi - x}{2}$ *pour* $x = 0$. — Si l'on désigne par $\sigma_n(x)$ la somme des $n$ premiers termes de $\varphi(x)$ et par $\Sigma_{n-1}(x)$ la moyenne

$$\frac{\sigma_0(x)+\sigma_1(x)+\ldots+\sigma_{n-1}(x)}{n},$$

on a les deux formules

$$\sigma_n(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)t\,dt}{\sin t}\,dt = -\frac{x}{2} + \int_0^{(2n+1)\frac{x}{2}} \frac{\sin t}{t}\,dt + \frac{A(n,x)}{2n+1};$$

$$\Sigma_{n-1}(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^{\frac{nx}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt + \frac{B(n,x)}{2n+1},$$

où $A(n, x)$ et $B(n, x)$ restent inférieures en valeur absolue à deux constantes fixes et où $x$ est supposé compris dans l'intervalle $(0, \pi)$.

D'après cela, soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres positifs fixes; la quantité $\sigma_n\left(\frac{\beta}{n^\alpha}\right)$ tend, pour $n$ infini, vers

$$\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & \alpha > 1, \\ \displaystyle\int_0^\beta \frac{\sin t}{t}\,dt & \text{si} & \alpha = 1, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} & \alpha < 1. \end{array}$$

De même, la quantité $\Sigma_{n-1}\left(-\frac{\beta}{n^\alpha}\right)$ tend vers

$$\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & \alpha > 1, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\beta}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt & \text{si} & \alpha = 1, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} & \alpha < 1. \end{array}$$

Les quantités $\sigma_n\left(-\frac{\beta}{n^\alpha}\right)$, $\Sigma_{n-1}\left(-\frac{\beta}{n^\alpha}\right)$ tendent vers des limites égales et de signes contraires aux précédentes.

3. *La série de Fourier d'une fonction satisfaisant aux conditions de Dirichlet au voisinage d'un point de discontinuité.* — Soit, d'après cela, $g$ la

plus petite (ou l'une quelconque) des racines en nombre infini de l'équation

$$\int_0^g \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad \int_g^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = 0.$$

En combinant les résultats des n$^{os}$ 1 et 2, on obtient le théorème suivant :

*Si $s_n(x)$ désigne la somme des n premiers termes de la série de Fourier correspondant à la fonction $f(x)$, les deux suites*

$$s_0(x_0),\quad s_1\left(x_0+\frac{g}{1}\right),\quad \ldots,\quad s_n\left(x_0+\frac{g}{n}\right),\quad \ldots,$$

$$s_0(x_0),\quad s_1\left(x_0-\frac{g}{1}\right),\quad \ldots,\quad s_n\left(x_0-\frac{g}{n}\right),\quad \ldots$$

*sont convergentes, la première suite admettant pour limite $f(x_0+0)$, la seconde $f(x_0-0)$. Le saut de la fonction au point $x_0$ est donc donné par la limite de la suite convergente*

$$s_1\left(x_0+\frac{g}{1}\right)-s_1\left(x_0-\frac{g}{1}\right),\quad \ldots,\quad s_n\left(x_0+\frac{g}{n}\right)-s_n\left(x_0-\frac{g}{n}\right).$$

*On peut de plus substituer aux deux premières suites les suites*

$$s_n\left(x_0+\frac{\beta}{n^\alpha}\right),\quad s_n\left(x_0-\frac{\beta}{n^\alpha}\right),$$

*où*

$$\beta > 0, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

*De même, la suite*

$$S_0(x_0),\quad S_1\left(x_0+\frac{\beta}{1^\alpha}\right),\quad \ldots,\quad S_{n-1}\left(x_0+\frac{\beta}{n^\alpha}\right),\quad \ldots$$

*converge vers $f(x_0+0)$ et la suite*

$$S_0(x_0),\quad S_1\left(x_0-\frac{\beta}{1^\alpha}\right),\quad \ldots,\quad S_{n-1}\left(x_0-\frac{\beta}{n^\alpha}\right),\quad \ldots$$

*converge vers $f(x_0-0)$ en supposant $\beta$ positif et $\alpha$ compris entre 0 et 1.*

4. *Généralisation du théorème sur les moyennes arithmétiques des sommes partielles d'une série de Fourier correspondant à une fonction intégrable.*— On sait que si l'on considère une fonction intégrable $f(x)$ et sa série de Fourier, si la fonction $f(x)$ est continue au point $a$, la suite

$$s_0(a+\varepsilon_0),\quad s_1(a+\varepsilon_1),\quad \ldots,\quad s_n(a+\varepsilon_n),\quad \ldots,$$

où $\varepsilon_n$ tend vers zéro, peut être divergente, mais que la suite

$$S_0(a),\quad S_1(a),\quad \ldots,\quad S_n(a),\quad \ldots$$

est convergente et tend vers $f(a)$. L'auteur démontre qu'il en est de même de la suite

$$S_0(a+\varepsilon_0),\quad S_1(a+\varepsilon_1),\quad \ldots,\quad S_n(a+\varepsilon_n),\quad \ldots$$

où $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ désigne une suite quelconque tendant vers zéro.

Rappelons que l'auteur désigne par $S_{n-1}(x)$ la moyenne arithmétique des sommes $s_0(x), s_1(x), \ldots, s_{n-1}(x)$.

Ce théorème repose sur la formule

$$S_{n-1}(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{\sin n\dfrac{t-x}{2}}{\sin\dfrac{t-x}{2}}\right)^2 dt;$$

en décomposant dans le second membre l'intervalle d'intégration en trois parties $(0, a-2\delta)$, $(a-2\delta, a+2\delta)$, $(a+2\delta, \pi)$, on remarque que la première et la troisième intégrale, pour $a-\delta \leqq x \leqq a+\delta$, convergent uniformément vers zéro; quant à la seconde, l'application du second théorème de la moyenne montre qu'elle tend vers $f(a)$.

5. *Introduction de la série conjuguée.* — Le résultat obtenu au n° 3 peut être énoncé en faisant intervenir la série conjuguée

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(b_\nu \cos\nu x - a_\nu \sin\nu x).$$

On a en effet la formule

$$\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\left(b_\nu \cos\nu x_0 - a_\nu \sin\nu x_0\right)\sin\nu\frac{g}{n} = \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}.$$

Comme on le sait, la série conjuguée est divergente pour tout point $x_0$ de discontinuité de la série donnée; la formule précédente permet cependant en quelque sorte de la sommer.

6. *Une nouvelle méthode pour la détermination du saut d'après la série de Fourier.* — Supposons que la fonction $f(x)$ admette $r$ points de discontinuité $x_1, x_2, \ldots, x_r$ et que dans chaque intervalle de continuité elle admette une dérivée à variation bornée. Si l'on considère la dérivée du terme de rang $\nu$ de la série de Fourier, on a la formule remarquable

$$\pi\nu(b_\nu \cos\nu x - a_\nu \sin\nu x) = \sum_{h=1}^{r} D_h \cos\nu(x-x_h) + \varepsilon_\nu(x),$$

où $D_h$ désigne le saut de la fonction au point $x_h$ et où $\varepsilon_\nu(x)$ tend, pour $\nu$ infini, uniformément vers zéro. Il résulte facilement de là que *le produit par $\pi$ de la moyenne arithmétique des $n$ premiers termes de la série dérivée tend vers zéro en tout point de continuité et vers le saut de la fonction en tout point de discontinuité.*

On sait d'ailleurs que la moyenne arithmétique des $n$ premières sommes partielles de la série dérivée tend vers $f'(x)$, sauf naturellement aux points de discontinuité de $f(x)$.

*Si la fonction n'admet dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ qu'un seul point de discontinuité, le produit par $\pi$ du $n^{ième}$ terme de la série dérivée tend vers le saut de la fonction en ce point.*

*Lichtenstein* (*Léon*). — Sur l'intégrale de Poisson et sur les dérivées partielles du second ordre du potentiel logarithmique (189-190).

L'auteur rectifie et complète l'énoncé d'un théorème donné dans un article ayant le même titre et paru dans le même journal (t. CXLI, p. 12-42).

*König* (*Robert*). — Contribution à l'arithmétique des corps de fonctions hyperelliptiques (191-210).

L'auteur développe, pour les corps de fonctions hyperelliptiques, une théorie arithmétique tout à fait analogue à celle des corps de nombres quadratiques. Signalons, parmi les résultats obtenus, l'interprétation arithmétique du *genre*.

I. *De la divisibilité*. — Un corps de fonctions hyperelliptiques est constitué par l'ensemble des fonctions de la forme $X + Y\sqrt{\Delta}$, où X, Y sont des fonctions rationnelles quelconques d'une variable $z$ et où l'on a

$$\Delta = (z - e_1)(z - e_2)\ldots(z - e_{2p+1}).$$

A ce corps de fonctions correspond une surface de Riemann à deux feuillets sur laquelle $\sqrt{\Delta}$ est une fonction uniforme.

A toute fonction $\xi = X + Y\sqrt{\Delta}$ du corps correspond d'une manière unique un diviseur d'ordre zéro

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{a}_1^{\lambda_1}\mathfrak{a}_2^{\lambda_2}\ldots\mathfrak{a}_h^{\lambda_h}}{\mathfrak{b}_1^{\mu_1}\mathfrak{b}_2^{\mu_2}\ldots\mathfrak{b}_k^{\mu_k}} \qquad (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_h = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k),$$

où les $\mathfrak{a}$ et les $\mathfrak{b}$ désignent respectivement les zéros et les pôles de $\xi$ sur la surface de Riemann. Inversement au diviseur $\mathfrak{Z}$ correspond toutes les fonctions $\mathfrak{C}\xi$, où $\mathfrak{C}$ est une constante arbitraire; on peut convenir d'identifier le diviseur $\mathfrak{Z}$ avec celle de ces fonctions dans le développement de laquelle, au voisinage de $\infty$, le coefficient du terme le plus bas est 1.

Tout diviseur (d'ordre zéro) ne correspond pas à une fonction du corps; ceux pour lesquels cela a lieu seront dits *algébriques;* ceux auxquels correspond une fonction rationnelle de $z$ seront dits *rationnels*.

Un diviseur (d'ordre zéro, comme cela sera toujours sous-entendu) est dit *entier* si son dénominateur ne contient que le point à l'infini $\mathfrak{p}_\infty$; sinon il sera dit *fractionnaire*. Le diviseur entier $\mathfrak{Z}$ est divisible par le diviseur entier $\mathfrak{Z}_1$ s'il est de la forme

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2,$$

$\mathfrak{Z}_2$ étant entier. Un diviseur entier est dit *premier* s'il est du premier degré $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_\infty}$. Le conjugué $\overline{\mathfrak{Z}}$ d'un diviseur $\mathfrak{Z}$ est celui qu'on obtient en remplaçant chaque point par son conjugué, et la norme de $\mathfrak{Z}$ est définie par

$$N\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}\overline{\mathfrak{Z}}.$$

Un diviseur entier $\mathfrak{Q}$ est dit *primaire* s'il n'est divisible par aucun diviseur entier rationnel. Sa norme est la fonction rationnelle entière du plus bas degré divisible par $\mathfrak{Q}$. Pour qu'un diviseur algébrique $A + B\sqrt{\Delta}$ soit primaire, il faut et il suffit que A et B soient deux polynomes premiers entre eux.

II. *Des congruences.* — Soit $\mathfrak{M}$ un diviseur entier pris comme module. Deux fonctions $\alpha_1$, $\alpha_2$ du corps sont dites congrues par rapport à ce module si leur différence est divisible par $\mathfrak{M}$. Deux diviseurs *algébriques* $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ sont dits *congrus* si l'on peut trouver deux constantes $c_1$, $c_2$ telles que la fonction $c_1\mathfrak{Q}_1 - c_2\mathfrak{Q}_2$ soit divisible par $\mathfrak{M}$.

Les diviseurs algébriques se partagent en deux classes telles que chaque classe soit formée de diviseurs tous congrus entre eux (mod $\mathfrak{M}$). Si $\mathfrak{M} = 1$, tous les diviseurs forment une seule classe. Si $\mathfrak{M}$ est un diviseur du premier degré $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}_\infty}$, tous les diviseurs *non divisibles par* $\mathfrak{M}$ forment également une seule classe.

Dans le cas général on a le théorème important :

*Dans toute classe de diviseurs non divisibles par un diviseur primaire donné, il y a un diviseur rationnel et un seul de degré au plus égal à* $\rho - 1$, *si* $\rho$ *désigne le degré de* $\mathfrak{M}$ ; *ce diviseur rationnel est dit le diviseur réduit de la classe.*

Les classes de diviseurs premiers avec un diviseur primaire $\mathfrak{M}$ forment alors, par multiplication, un groupe abélien continu infini.

La congruence linéaire

$$\alpha\xi \equiv \gamma \qquad (\text{mod } \mathfrak{M}),$$

où $\mathfrak{M}$ est un module primaire et où $\gamma$ est divisible par le plus grand commun diviseur de $\alpha$ et de $\mathfrak{M}$, se résout facilement. Le cas où $\mathfrak{M}$ n'est pas primaire se ramène au précédent. L'auteur démontre alors que l'ensemble des fonctions $\alpha t_1 + \beta t_2$, où $t_1$ et $t_2$ sont des fonctions entières arbitraires du corps, est identique à l'ensemble des multiples (algébriques) du plus grand commun diviseur de $\alpha$ et $\beta$.

*Les seuls idéaux* (*au sens de Dedekind*) *sont donc les diviseurs entiers* (d'ordre zéro).

III. *Les classes de diviseurs d'ordre zéro.* — L'auteur convient d'appeler *équivalents* deux diviseurs entiers ou fractionnaires lorsque leur quotient est un diviseur algébrique. Une *classe* de diviseurs est formée de l'ensemble des diviseurs équivalents à un même diviseur. La classe principale E est formée des diviseurs algébriques.

On a une division en classes analogue si l'on ne considère que les diviseurs entiers : il y a autant de classes de diviseurs entiers que de classes de diviseurs entiers ou fractionnaires.

L'auteur démontre le théorème fondamental suivant :

*Il est toujours possible de multiplier un diviseur entier donné quelconque par un autre diviseur de degré au plus égal à p, de manière à obtenir comme produit un diviseur de la classe principale ; mais il n'est pas toujours possible d'arriver à ce résultat par multiplication par un diviseur de degré inférieur à p.*

Si l'on appelle *réduit* un diviseur entier de degré inférieur ou égal à $p$, on voit que *dans toute classe de diviseurs différente de la classe* E *il existe un diviseur primaire réduit et un seul.*

Ces deux théorèmes mettent en évidence le rôle arithmétique joué par le *genre* $p$.

Si l'on porte maintenant son attention sur les *degrés* des diviseurs d'une même classe M autre que E, on démontre que, si $l \leq p$ est le degré du diviseur primaire réduit de cette classe, *il n'y a dans* M *aucun diviseur entier de degrés*

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad l-1, \quad l+1+2h \qquad (l \leq h \leq p-l-1),$$

*mais que tous les autres degres sont représentés. Il manque donc en tout* $p-1$ *degrés.*

On appelle *classe ambige* une classe telle que le carré d'un diviseur quelconque de cette classe soit un diviseur algébrique. Si l'on désigne par $E_i$ la classe qui contient le diviseur $\frac{\mathcal{C}_i}{\mathfrak{p}_\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2p)$, où $\mathcal{C}_i$ est l'un des $2p+1$ points de ramification de la surface de Riemann, la classe ambige la plus générale est

$$A = E_1^{\varepsilon_1} E_2^{\varepsilon_2} \ldots E_{2p}^{\varepsilon_{2p}} \qquad (\varepsilon_i = 0, 1);$$

il y en a $2^{2p}$. A chacune d'elles correspond une fonction $\sqrt{X}$, le polynome X n'admettant que des racines prises parmi les $2p$ premières racines de $\Delta$.

Le groupe des classes ambiges est abélien. A chaque *caractère*

$$\chi_B(A) = (-1)^{\varepsilon_1\beta_1 + \varepsilon_2\beta_2 + \ldots + \varepsilon_{2p}\beta_{2p}} \qquad (\varepsilon_i, \beta_i = 0, 1)$$

de ce groupe correspond un contour fermé ou plutôt une classe de contours fermés sur la surface de Riemann; lorsqu'on décrit ce contour, la fonction $\sqrt{X}$ qui correspond à A est multipliée par $\chi_B(A)$

IV. *Formes quadratiques.* — Considérons toutes les formes quadratiques

$$a(z)t_1^2 + b(z)t_1t_2 + c(z)t_2^2,$$

où $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ sont des polynomes entiers en $z$ tels que l'on ait

$$b^2 - 4ac = \Delta.$$

Parmi toutes les formes $(a, b', c')$ *parallèles* à une forme donnée $(a, b, c)$ :

$$b' = b + 2ha, \qquad c' = c + bh + ah^2,$$

il en existe une et une seule qui est *primaire*, c'est-à-dire telle que $b'$ est de degré inférieur à $a$. *Il y a correspondance univoque entre les formes primaires et les diviseurs primaires;* à la forme primaire $(a, b, c)$ correspond le plus grand commun diviseur de $a$ et de $b + \sqrt{\Delta}$.

Deux formes sont dites *équivalentes* si les diviseurs correspondants sont équivalents. On peut donc définir des *classes de formes*. Chaque classe de formes contient une forme primaire réduite et une seule, en convenant de dire

que la forme primaire $(a, b, c)$ est réduite quand le degré de $a$ ne dépasse pas le genre $p$.

On peut enfin considérer des *anneaux* de diviseurs et les formes correspondantes.

(*A suivre.*) E. CARTAN.

## ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA [1].

Série II, Tome XXIII ; janvier à septembre 1895.

*Bianchi* (*L.*). — Complément aux recherches sur les formes quaternaires quadratiques et sur les groupes polyédriques (1-44).

Ce Mémoire complète celui qu'a publié l'auteur au Tome XXI du même recueil. Il est consacré à de nouvelles applications numériques des méthodes générales.

*Graf* (*I.-H.*). — Relations entre la fonction bessélienne de première espèce et une fraction continue (45-65). (En français.)

Ce travail est un complément aux recherches de Bessel, Schlömilch, Lommel sur le même sujet. Partant de l'équation

$$I^{a+1}_{(x)} + I^{a-1}_{(x)} - \frac{2a}{x} I^{a}_{(x)} = 0$$

entre trois fonctions de Bessel correspondant aux valeurs $a-1$, $a$, $a+1$ du paramètre, l'auteur développe le quotient $\frac{I^{a-1}_{(x)}}{i I^{a}_{(x)}}$ en fraction continue. Les quotients incomplets forment une progression arithmétique. Ceci conduit à l'étude générale des fractions continues possédant cette dernière propriété. Comme cas particuliers, on retrouve, entre autres développements en fraction continue, ceux bien connus de $\cot x$, $\operatorname{tang} x$, $\coth x$. Les propriétés des fractions continues permettent à l'auteur d'établir diverses relations où interviennent les fonctions de Bessel ainsi que certains polynomes en $\frac{1}{x}$ appelés par l'auteur *fonctions schlœffliennes*, qui sont à un facteur constant près les numérateurs des réduites successives du développement de la fonction de Bessel en fraction continue.

*Ascoli* (*G.*). — Sur la définition de l'intégrale (67-71).

Dans cette Note, M. Ascoli revendique la priorité de la notion d'intégrale supérieure et d'intégrale inférieure qui se trouve dans son Mémoire de 1875 *Sur le concept d'intégrale définie* (*Atti Lincei*, série 2, t. II). Ainsi que le

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVIII$_2$, 1914, p. 88-96.

fait observer M. Peano dans l'article analysé plus loin, M. Darboux a introduit de son côté les mêmes notions dans son Mémoire *Sur les fonctions discontinues*, qui, publié en la même année 1875, est cependant antérieur, étant daté de 1873 et 1874.

*Brioschi* (*F.*). — Nouvelles formules dans la multiplication et la transformation des fonctions elliptiques (73-91).

*Pirondini* (*G.*). — Sur quelques surfaces qui admettent un système de lignes égales et un second système de lignes égales ou semblables (93-109).

L'auteur démontre la proposition suivante :

Une courbe G étant animée de deux mouvements, l'un de rotation autour d'une droite H, l'autre de translation le long d'une courbe directrice D, pour que les trajectoires des divers points de G soient égales et se déduisent de l'une d'elles par deux mouvements, l'un de translation le long de la droite H, l'autre de rotation autour de la même droite, il faut et il suffit : 1° que la courbe G soit située dans un plan parallèle à H ; 2° que la directrice D soit une droite ; 3° que le rapport de la vitesse de translation de G le long de D à sa vitesse de rotation autour de H soit constant.

Un théorème analogue est ensuite établi pour certaines courbes planes G telles que les trajectoires de leurs divers points dans un certain mouvement soient des courbes semblables.

*Marcolongo* (*R.*). — Déformation d'une sphère isotrope (111-152).

Dans la première Partie de ce travail, l'auteur détermine la déformation d'une sphère isotrope soumise à des forces données en se plaçant successivement dans les conditions aux limites suivantes :

1° On se donne en tout point de la surface les composantes du déplacement du point suivant les axes $Ox$, $Oy$ et la composante de la force suivant $Oz$ ;

2° On se donne en tout point de la surface la composante du déplacement suivant $Ox$ et les composantes de la force suivant $Oy$, $Oz$.

Dans la deuxième Partie, M. Marcolongo donne une forme simple pour les équations en coordonnées polaires de l'équilibre d'un corps élastique isotrope, dans le cas où les forces dérivent d'un potentiel harmonique à l'intérieur de la sphère. Ces équations lui permettent d'obtenir et de généraliser les formules de Borchardt qui expriment le déplacement ($u$, $v$, $w$) à l'aide d'intégrales définies ; de là sont déduits les développements de $u$, $v$, $w$ en séries de fonctions sphériques déjà obtenus par M. Chree.

*Peano* (*G.*). — Sur la définition de l'intégrale (153-157).

Remarques à propos de l'article de M. Ascoli analysé plus haut. L'auteur insiste sur l'avantage qu'il y a à remplacer, dans certaines questions d'analyse, la notion de limite vers laquelle tend une fonction par celles de borne supérieure et inférieure d'un ensemble de nombres.

*Calo* (*B.*). — Démonstration algébrique du théorème de Weierstrass sur les formes bilinéaires (159-179).

Il s'agit de l'importante proposition relative à l'équivalence des faisceaux de formes bilinéaires : pour que deux faisceaux soient équivalents, il faut et il suffit que les déterminants de ces deux faisceaux aient les mêmes diviseurs élémentaires.

*Pascal* (*E.*). — Sur les fonctions $\sigma$ elliptiques paires (181-198).

Divers auteurs ont étudié la théorie des fonctions elliptiques en prenant pour forme fondamentale la cubique plane générale. Se plaçant à ce point de vue, M. Pascal se propose de donner l'expression des trois fonctions $\sigma$ elliptiques paires. A chacune de ces fonctions se rattache l'un des trois systèmes de coniques de contact de la cubique. L'auteur exprime chacune des trois fonctions $\sigma$ à l'aide des coefficients d'un certain réseau de coniques lié à la cubique et tel que les coefficients de l'équation de la cubique s'expriment rationnellement à l'aide des coefficients du réseau. En prenant en particulier pour forme fondamentale la cubique

$$x_2 x_3^2 = 4x_1^3 - g_2 x_1 x_3^2 - g_3 x_3^3,$$

on retrouve les fonctions $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ de Weierstrass.

*Maillet* (*E.*). — Sur les groupes paramètres dans la théorie des substitutions (199-207).

Les substitutions considérées font correspondre aux $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les $n$ fonctions $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ dans lesquelles on donne des valeurs entières (mod $m$) aux $r$ paramètres ainsi qu'aux variables. L'auteur introduit dans l'étude de ces substitutions la notion de groupes paramétriques en s'inspirant de la notion analogue introduite par Lie pour les groupes continus de transformations.

*Klein* (*F.*). — Riemann et son importance dans le développement moderne des Mathématiques (209-224). (Traduction en italien par *E. Pascal.*)

Conférence faite à Vienne le 26 septembre 1894.

*Burgatti* (*P.*). — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre (type elliptique) et sur une classification des systèmes orthogonaux de lignes qu'on peut tracer sur une surface (225-267).

L'auteur étend d'abord aux équations générales indiquées dans le titre la notion de solutions associées de l'équation de Laplace : il montre qu'à toute équation du type considéré correspondent une infinité d'équations du même

type, dites *associées*, dont les intégrales générales se déduisent par quadrature de l'intégrale générale de la proposée. Ce résultat est obtenu en donnant à l'équation une forme spéciale qui permet aussi d'établir les résultats connus relatifs au problème de Dirichlet généralisé pour les équations du type elliptique. Vient ensuite la détermination des solutions communes à une équation linéaire du second ordre et à une équation linéaire du premier ordre, ou à deux équations du second ordre. Cette étude conduit à une classification des systèmes orthogonaux de courbes tracés sur une surface : on peut déterminer un pareil système par quadratures, quand on connaît sa place dans la classification ainsi que l'équation différentielle de l'une des familles de courbes du système. L'auteur retrouve par cette voie diverses propositions dues à Lie.

*Volterra* (*V.*). — Sur les rotations permanentes stables d'un système dans lequel ont lieu des mouvements internes stationnaires (269-285).

Les équations du mouvement d'un pareil système sont les équations d'Euler modifiées par l'adjonction de termes provenant des mouvements internes stationnaires. On a ainsi un système de trois équations dont la première est

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + m_3 q - m_2 r = 0.$$

M. Volterra a étudié antérieurement la distribution des axes de rotation permanents. Il traite ici d'une façon complète et élégante la question de la stabilité de ces axes. Il considère pour cela $p$, $q$, $r$ comme les coordonnées d'un point P, dont il étudie les positions d'équilibre. Le lieu de ces positions est en général une cubique gauche sur laquelle certains arcs correspondent à des positions stables : il y a donc une infinité d'axes permanents stables possibles, contrairement à ce qui a lieu pour un corps solide. Pour chacun de ces axes stables, M. Volterra détermine la période des petites vibrations. Il étudie aussi les cas de décomposition de la cubique, lieu du point P. Le Mémoire se termine par une Note de M. Segre rattachant l'étude précédente aux propriétés géométriques d'un réseau de quadriques.

*Lauricella* (*G.*). — Sur l'intégration des équations de l'équilibre élastique (287-308).

Dans un Mémoire précédent (*Annali della Scuola Norm. super. di Pisa*, 1894), l'auteur a résolu le problème de l'équilibre élastique des corps isotropes pour des *déplacements* donnés à la surface. Actuellement il se place dans le cas où l'on donne les *forces* appliquées à la surface. M. Lauricella résout le problème dans l'hypothèse où la quantité $\frac{a^2 - b^2}{b^2}$ (où $a$ et $b$ sont les vitesses respectives des vibrations transversales et longitudinales) ne dépasse pas certaines limites dépendant de la surface. La méthode employée est semblable à la méthode de Neumann dans la théorie des fonctions harmoniques.

*Bortolotti* (*E.*). — Contribution à la théorie des formes linéaires aux différences (309-344).

Les résultats de l'auteur sont basés principalement sur une généralisation du déterminant appelé *continuant* dans la théorie des fractions continues. Cette généralisation sert à définir, pour l'équation aux différences donnée, une intégrale dépendant d'un paramètre $z$ : en donnant à $z$ des valeurs entières consécutives, on obtient un système fondamental d'intégrales. Vient ensuite l'intégration simultanée de $n$ équations linéaires aux différences à l'aide d'une seule fonction de $n$ variables indépendantes. L'auteur applique sa méthode à quelques problèmes déjà étudiés par M. Pincherle dans ses travaux sur les fractions continues algébriques et à quelques questions concernant les formes à coefficients périodiques.

Série II, Tome XXIV; janvier à septembre 1896.

*Amodeo* (*F.*). — Courbes $k$-gonales de première et de seconde espèce. (1-22).

Suite de l'étude commencée au Tome XXI de ce Recueil. Les courbes typiques envisagées précédemment sont dites *de première espèce*. Dans ce nouveau Mémoire, l'auteur étudie les courbes $k$-gonales qu'il appelle *de seconde espèce* : ce sont celles dans lesquelles les droites contenant les séries linéaires $\infty^1$ d'ordre $k$ de la courbe ont pour enveloppe une courbe de la seconde classe.

*Pascal* (*E.*). — Sur deux relations remarquables entre les valeurs des dérivées des fonctions elliptiques $\vartheta$ pour la valeur zéro de l'argument. (23-28).

Les deux relations démontrées par l'auteur contiennent les valeurs des fonctions $\vartheta$, $\vartheta_1$, $\vartheta_2$, $\vartheta_3$ et de certaines de leurs dérivées jusqu'à l'ordre 7 pour la valeur zéro de l'argument.

*Volterra* (*V.*). — Sur la rotation d'un corps dans lequel existent des systèmes polycycliques. (29-58).

L'auteur a étudié précédemment le mouvement de rotation d'un corps à l'intérieur duquel ont lieu des mouvements stationnaires (*Atti Torino*, 1895; *Annali di Matematica*, t. XXIII). Dans le Mémoire actuel, M. Volterra établit d'abord les conditions nécessaires et suffisantes pour que la force vive d'un système à mouvements intérieurs stationnaires demeure constante. En particulier, pour que la force vive demeure constante quelles que soient les conditions initiales, il faut et il suffit que l'ellipsoïde d'inertie soit, ou bien une sphère, ou bien un ellipsoïde de révolution autour de l'axe des mouvements intérieurs.

Ces cas mis à part, il faut des forces intérieures pour maintenir stationnaires les mouvements intérieurs. Si ces forces intérieures sont nulles, les mouvements intérieurs ne sont plus stationnaires et il y a lieu d'étudier les altérations produites dans ces mouvements par le mouvement d'ensemble du système. L'auteur traite d'abord le cas particulier où le mouvement intérieur consiste dans le mouvement de rotation d'un tore homogène autour de son axe supposé fixe

par rapport au corps : la vitesse angulaire $\omega$ du tore s'exprime alors en fonction elliptique du temps.

M. Volterra suppose ensuite qu'il s'agisse d'une façon générale d'un corps mobile autour de son centre de gravité et à l'intérieur duquel existe un système polycyclique quelconque, au sens de Helmholtz et de Hertz (HERTZ, *Die Prinzipien der Mechanik*, 2r Buch, Abschnitt 5). Le cas traité par l'auteur dans ses Mémoires antérieurs est en définitive celui où les paramètres du système cyclique et les intensités cycliques sont des constantes : le mouvement intérieur, alors stationnaire, est *isocyclique*. M. Volterra envisage maintenant le cas où les intensités cycliques ($\omega$ dans le cas du tore) sont variables, mais où les forces relatives aux coordonnées cycliques sont nulles, ainsi que le couple moteur; il appelle ce mouvement un mouvement *adiabatique* du système entier et il démontre que ce cas se ramène à celui du mouvement isocyclique; si les paramètres du système cyclique sont constants, la solution s'obtient à l'aide des fonctions elliptiques.

Dans une Note, l'auteur montre comment la démonstration de cette proposition peut s'obtenir à l'aide de l'équation symbolique du mouvement donnée par M. Beltrami pour le problème général de la Dynamique (*Rendic. Istituto Lombardo*, 20 juin 1896).

## *Somigliana* (*C.*). — Sur le problème de la température de l'ellipsoïde. (59-91).

Le problème de l'équilibre des températures dans l'ellipsoïde a été résolu par Lamé à l'aide des fonctions et des coordonnées elliptiques : mais les solutions bien connues de ce problème données par Lamé sous la forme de produits de trois fonctions d'une variable sont en dernière analyse des fonctions rationnelles et entières des coordonnées rectangulaires (polynomes de Lamé). Ce sont ces polynomes que M. Somigliana se propose de déterminer sans l'intermédiaire des fonctions elliptiques. Il montre que leur détermination se ramène au problème de la réduction simultanée de deux formes bilinéaires à la forme canonique. L'auteur classe ces polynomes en genres d'après le degré de l'équation algébrique dont ils dépendent. Il détermine en particulier les polynomes de genre 1, 2 ou 3. Il montre enfin l'identité des solutions ainsi obtenues avec les solutions obtenues à l'aide des fonctions de Lamé.

## *Bianchi* (*L.*). — Sur les surfaces à courbure nulle en Géométrie elliptique. (93-129).

Cette importante étude sur l'espace elliptique a été introduite par l'auteur dans la 2e édition de ses *Lezioni di Geometria differenziale* (Pise, 1902, t. I, p. 198-202, 219-221) et dans la traduction allemande du même Ouvrage.

L'auteur donne, en Géométrie elliptique, les formules fondamentales de la théorie des surfaces ainsi que les formules de Frenet; de ces dernières il déduit l'étude des surfaces réglées à courbure totale nulle : ces surfaces sont engendrées par les binormales d'une courbe dont la torsion, constante, est égale en valeur absolue à la courbure de l'espace; ce sont les analogues des cylindres de l'espace euclidien; l'analogue du cylindre circulaire droit est la *surface de Clifford*. Vient ensuite l'étude générale des surfaces à courbure totale nulle, surfaces dont la Géométrie est celle du plan euclidien : elles appartiennent à la

catégorie des surfaces de *glissement* définies par l'auteur (*Atti Torino*, vol. 30, 9 juin 1895). L'étude de la développée de ces surfaces conduit à une classe de surfaces à courbure nulle applicables les unes sur les autres.

Le Mémoire se termine par l'étude des systèmes triples orthogonaux de l'espace elliptique et, en particulier, de ceux qui comprennent une famille de surfaces à courbure nulle : à tout couple de surfaces pseudosphériques de l'espace euclidien, on fait correspondre un de ces derniers systèmes et cette correspondance permet d'appliquer à ces systèmes la transformation de Bäcklund des surfaces pseudosphériques.

*Crelier* (*L.*) — Sur quelques propriétés des fonctions besséliennes tirées de la théorie des fractions continues. (131-163).

L'auteur démontre par une méthode différente et généralise les relations établies par M. J.-H. Graf dans un travail paru au Tome XXIII du même Recueil.

*Berzolari* (*L.*). — Sur les intersections de trois surfaces algébriques. (165-191).

Soient trois surfaees algébriques d'ordres $l$, $m$, $n$, sans courbe commune et soient O un point commun aux trois surfaces, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les ordres respectifs de multiplicité de O sur les trois surfaces : pour qu'en ce point O se trouvent confondus exactement $\lambda\mu\nu$ des $lmn$ points d'intersection des trois surfaces, il faut et il suffit que les cônes tangents au point O à chacune des trois surfaces n'aient en commun aucune génératrice.

L'auteur établit cette proposition par voie algébrique, il étudie ensuite le cas où les trois cônes précédents ont une génératrice commune et il déduit de cette étude quelques propositions relatives à l'abaissement produit dans la classe d'une surface par la présence d'un point multiple.

*Pascal* (*E.*). — Sur la recherche du second terme du développement en série des fonctions sigma abéliennes paires de genre 3. (193-212).

Complément au Mémoire *sur la théorie des fonctions $\sigma$ abéliennes paires à trois arguments* publié au t. XVIII des *Annali*.

*Banal* (*R.*) — Sur les variétés à trois dimensions qui ont une courbure nulle et deux courbures égales. (213-240).

Ce travail, qui comprend deux Chapitres, est une application des méthodes de M. Ricci pour l'étude des formes différentielles quadratiques (voir *Bull. des Sc. math.*, 1892, p. 167-189). Le premier Chapitre est consacré à des généralités sur les variétés à trois dimensions à courbure totale nulle. Le second Chapitre contient l'étude du cas particulier où les deux courbures principales non nulles sont égales entre elles. L'auteur démontre que la représentation conforme de ces variétés sur l'espace euclidien est possible. Il examine enfin le cas particulier où les deux courbures égales sont constantes.

*Pascal* (*E.*). — Sur les différentes formes qu'on peut donner aux relations entre les déterminants d'une matrice rectangulaire. (241-253).

L'auteur remarque que les relations qui ont été données par divers auteurs entre les déterminants d'une matrice à $m$ lignes ne sont que des transformations d'une formule générale d'un type simple qu'il établit : cette formule a la forme d'une somme algébrique de produits de deux déterminants d'ordre $m$ égalée à zéro. Dans le même ordre d'idées, l'auteur généralise quelques relations connues entre les déterminants formés avec les colonnes de deux déterminants donnés (Picquet, Netto, Sylvester, Laplace).

*Levi-Civita* (*T.*). — Sur les transformations des équations de la Dynamique. (255-300).

Le problème des transformations de mouvement, posé et étudié par M. Appell (*Journal de Crelle*, t. 109), puis par M. Painlevé (*Journal. de Mathématiques pures et appliquées*, 1894) et par M. Liouville (*Acta math.*, t. XIX), peut être énoncé, ainsi que l'a fait M. Painlevé, de la façon suivante :

Soient

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = X_i$$

$$\text{(A}_1\text{)} \qquad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T}{\partial \overline{x}'_i}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial x_i} = \Xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations de Lagrange relatives à deux systèmes à liaisons indépendantes du temps et possédant le même degré de liberté. On peut se limiter au cas où les paramètres $x_i$ sont les mêmes pour les deux systèmes, le cas général, envisagé par M. Appell, pouvant être ramené à celui-là. $\left(\text{On a posé } x'_i = \frac{dx_i}{dt}, \overline{x}'_i = \frac{dx_i}{dt_1}.\right)$ M. Painlevé appelle *systèmes correspondants* deux systèmes qui ont, dans l'espace représentatif $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la même trajectoire, toutes les fois que les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses sont les mêmes. Le problème consiste à déterminer, pour un système donné (A), tous les systèmes correspondants $(A_1)$.

M. Levi-Civita montre d'abord comment l'intégration d'un système équivaut, à des quadratures près, à l'intégration d'un système correspondant quelconque. Il montre que si les forces sont nulles pour un système, il en est de même pour tout système correspondant et il retrouve directement les formes connues de la relation entre $t$ et $t_1$ :

$$dt_1 = \frac{dt}{\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

quand les forces sont nulles,

$$dt_1^2 = \frac{dt^2}{\mu^2}\left[1 - \sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs}\, x'_r\, x'_s\right]$$

dans les autres cas.

($c_{rs}$ et $\mu$ étant fonctions des $x_i$ seulement).

Dans la suite du Mémoire, l'auteur se limite au cas où les forces sont nulles. Le problème prend alors la forme géométrique suivante :

*Étant donnée la variété* $\varphi$ *dont le* $ds^2$ *est*

$$ds^2 = 2\mathrm{T}\,dt^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

*trouver toutes les variétés* $\Phi$ *qui ont les mêmes géodésiques que* $\varphi$ *(en regardant comme identiques deux variétés applicables).*

Soit

$$ds_1^2 = 2\mathrm{T}_1\, dt_1^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, \alpha_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

l'élément linéaire de $\Phi$. Les variétés $\varphi$ et $\Phi$ sont dites *correspondantes*.

Le problème ainsi posé est résolu complètement, dans le champ réel du moins, par M. Levi-Civita.

Il cherche d'abord les relations qui lient les $\alpha_{rs}$ aux $a_{rs}$. Puis, partant de deux variétés correspondantes $\varphi$ et $\Phi$, il effectue la réduction simultanée de $ds^2$ et $ds_1^2$ à une forme canonique. Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les racines, nécessairement réelles, de l'équation

$$|\alpha_{rs} - \rho a_{rs}| = 0$$

obtenue en égalant à zéro le discriminant de la forme $ds_1^2 - \rho\, ds^2$. Suivant le nombre des racines distinctes de cette équation, l'auteur obtient $n$ types parfaitement déterminés $t_1), t_2), \ldots, t_n)$ de systèmes correspondants, chaque type étant caractérisé par certaines formes canoniques des éléments linéaires : il établit à cet effet, pour chaque type, l'existence de certaines familles de surfaces qui prises pour surfaces coordonnées permettent de réaliser la réduction à ces formes canoniques. Il emploie dans ses démonstrations les méthodes et les notations symboliques données par M. Ricci pour le calcul de certains covariants associés aux formes différentielles quadratiques.

Étant donné un système (A) sans forces, ou, ce qui revient au même, un certain $ds^2$, ainsi que le type $t_m)$ de la correspondance, on peut former, lorsqu'ils existent, tous les $ds_1^2$ correspondants. Ils dépendent de deux constantes arbitraires, sauf pour le type $t_n)$ pour lequel il n'y a qu'une constante. Deux systèmes correspondants du type $t_m)$ admettent chacun $n - m + 1$ intégrales premières quadratiques *distinctes*. (M. R. Liouville avait établi l'existence de $n$ pareilles intégrales distinctes ou *confondues*.)

## *Marcolongo* (*R.*). — Sur l'équation $\Delta_2 \mathrm{U} + k^2 \mathrm{U} = 0$ dans un espace à $n$ dimensions. (301-314).

Étant donnée l'équation

$$(1) \qquad \sum_{1}^{n} \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_s^2} + k^2 \mathrm{U} = 0,$$

l'auteur cherche d'abord une solution de cette équation de la forme $\frac{R}{\rho^{n-2}}$, où R est fonction de $\rho$ seulement et où l'on a posé

$$\rho^2 = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2.$$

Les solutions de cette nature dépendent des fonctions cylindriques, dont les propriétés sont rappelées au début du Mémoire. Ces solutions particulières permettent d'obtenir en tout point d'un espace $S_n$ limité par un espace $S_{n-1}$ la valeur d'une fonction monodrome finie et continue vérifiant l'équation (1) lorsqu'on connaît sur le contour $S_{n-1}$ la valeur de U et de $\frac{dU}{dp}$ (dérivée suivant la normale) : il suffit d'appliquer la formule de Green étendue à l'espace $S_n$ limité par $S_{n-1}$.

L'auteur généralise dans cette voie quelques formules dues à Helmholtz et à Weber. Il démontre que si l'on a en tout point du contour l'une des conditions

$$U = 0, \qquad \frac{dU}{dp} = 0, \qquad U + \alpha \frac{dU}{dp} = 0, \qquad (\alpha > 0),$$

$k$ est nécessairement réel. Il s'occupe en dernier lieu de l'équation

$$\sum a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_s^2} = h \frac{\partial U}{\partial t}$$

qui se ramène, par un changement de variables, à une équation d'une forme voisine de la forme (1).

## *Di Pirro* (*G.*). — Sur les intégrales premières quadratiques des équations de la Mécanique. (315-334).

La force vive d'un système étant supposée réduite à une forme quadratique orthogonale, l'auteur recherche quels sont les problèmes qui admettent, outre l'intégrale des forces vives, d'autres intégrales quadratiques orthogonales. Il résout complètement le problème dans le cas de $n = 3$. Pour $n$ quelconque, il démontre un théorème qui permet d'obtenir des cas dans lesquels il y a respectivement

$$n - 1, \quad n - 2, \quad n - 3, \quad \ldots \quad 3, \quad 2, \quad 1$$

intégrales quadratiques orthogonales, outre l'intégrale des forees vives. Le premier de ces cas a été indiqué par M. Stäckel dans une Note antérieure.

## *Brioschi* (*F.*). — La multiplication complexe par $\sqrt{-23}$ des fonctions elliptiques. (335-338).

Le problème de la multiplication complexe par $\sqrt{-23}$, traité par Halphen, se rattache à la transformation du sixième ordre des fonctions elliptiques. Brioschi utilise les résultats de son Mémoire sur la transformation d'ordre pair (*Annali di Math.*, t. XXII) pour retrouver l'équation de laquelle Halphen fait dépendre la solution du problème de la multiplication complexe par $\sqrt{-23}$.

*Brioschi* (*F.*). — Les équations différentielles linéaires équivalentes à leurs adjointes de Lagrange. (339-346).

Dans ce Mémoire, Brioschi se sert, pour étudier les équations différentielles linéaires équivalentes à leurs adjointes, d'une formule de dérivation successive qu'il a donnée antérieurement (*Acta mathem.*, t. XIV, 1890). Il étudie en particulier les équations d'ordre 5. Si une équation d'ordre 5 est équivalente à son adjointe, les deux invariants d'ordre impair sont nuls. Mais la réciproque n'est pas vraie. Brioschi donne la forme générale à laquelle on peut ramener les équations différentielles d'ordre 5 de cette catégorie.

*Bianchi* (*L.*). — Nouvelles recherches sur les surfaces pseudosphériques. (347-386).

Dans ce Mémoire sont étudiées certaines surfaces $\Sigma$ dont l'étude se rattache à celle des surfaces pseudosphériques. Ces surfaces $\Sigma$ sont caractérisées par la propriété géométrique suivante : *la sphère ayant pour diamètre la portion de normale comprise entre les deux centres de courbure coupe une sphère fixe suivant un grand cercle, ou bien est orthogonale à une sphère fixe, ou enfin passe par un point fixe* O. La surface $\Sigma$ est dite elliptique, hyperbolique ou parabolique suivant qu'elle possède la première, la seconde ou la troisième des propriétés précédentes.

Soit

$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

l'équation de la sphère fixe. Si l'on désigne par $p$ la distance de l'origine au plan tangent en un point M de la surface $\Sigma$, par $q$ la moitié du carré de la distance de l'origine au point M, par $r_1$, $r_2$ les rayons de courbure principaux en M, la propriété caractéristique des surfaces $\Sigma$ se traduit par l'équation

$$(1) \qquad 2q - c - (r_1 + r_2)p + r_1 r_2 = 0.$$

L'étude des surfaces $\Sigma$ se rattache à la méthode de Weingarten qui a permis d'obtenir certaines classes de surfaces applicables les unes sur les autres (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, Chap. XIII; Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, 2e édition, t. II, chap. XIX). De toute fonction $\varphi(p, q)$ vérifiant l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + (r_1 + r_2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q} + r_1 r_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0,$$

Weingarten déduit une classe de surfaces S applicables les unes sur les autres. L'équation (2) se réduit à (1), si l'on pose

$$\varphi = \sqrt{2q - p^2 - c}.$$

Les surfaces S correspondantes sont applicables sur la surface *complémentaire* d'une surface pseudosphérique, c'est-à-dire sur la deuxième nappe de la surface focale de la congruence formée par les tangentes à une famille de géodésiques tracées sur cette surface pseudosphérique.

Dans la représentation sphérique d'une surface $\Sigma$, les lignes de courbure ont

les mêmes images que les lignes de courbure des surfaces pseudosphériques. Il résulte de là et d'un théorème donné antérieurement par l'auteur que les normales d'une surface $\Sigma$ constituent une congruence *cyclique* (congruence formée par les axes des cercles d'un système cyclique) : les surfaces orthogonales aux cercles du système cyclique sont aussi des surfaces $\Sigma$, *toujours paraboliques*, quelle que soit la nature de la surface $\Sigma$ d'où l'on part.

L'étude des surfaces $\Sigma$ paraboliques présente donc un intérêt particulier. L'auteur démontre que la congruence des normales à une pareille surface admet comme congruence polaire par rapport à une sphère de centre O une autre congruence de normales admettant comme surfaces orthogonales une autre famille de surfaces $\Sigma$, également paraboliques.

Le Mémoire se termine par l'étude des systèmes triples orthogonaux dont fait partie une famille de surfaces $\Sigma$ paraboliques. Parmi ces systèmes il y a d'abord ceux dont l'existence se trouve établie par les propriétés précédentes, systèmes dans lesquels les trajectoires orthogonales des surfaces $\Sigma$ sont des cercles. Mais il y en a d'autres parmi lesquels l'auteur étudie plus spécialement un système pour lequel les trajectoires orthogonales des surfaces $\Sigma$ sont des courbes tracées dans des plans passant par le point fixe O.

S. Lattès.

## RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO (1).

### Tome VIII, 1894.

*Gerbaldi* (*F.*). — Sur les singularités de la Jacobienne de trois courbes planes. (1-24).

Un point commun à trois courbes et d'ordres de multiplicité respectifs $r_1$, $r_2$, $r_3$ est un point multiple de la Jacobienne, dont l'ordre $p$ est égal en général à $r_1 + r_2 + r_3 - 2$; recherche des cas où cet ordre est supérieur; cas particuliers où $p = 2$ et $p = 3$.

*Bianchi* (*Luigi*). — Sur les systèmes triples orthogonaux de Weingarten. (25-32).

Démonstration rigoureuse de leur existence; deux théorèmes relatifs aux systèmes pseudo-sphériques.

*Paci* (*P.*). — Sur les dérivées troisièmes de la fonction potentielle d'une surface. (33-40).

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVII$_2$, p. 103-107.

Dans l'analyse du t. VII, p. 105, *l.* 3, *au lieu de :* et le nombre, *lire :* est le nombre $r_k$; p. 106, *l.* 6 et 9 en remontant, *au lieu de : x et* deuxième, *lire : r et* $r^{\text{ième}}$.

Dérivées suivant les directions principales et la normale en un point d'une surface de niveau; dérivées par rapport à l'arc d'une ligne de force.

*Torelli* (*Gabriele*). — Sur le groupe monome défini par une transformation infinitésimale projective. (41-56).

Toutes les transformations de ce groupe sont projectives : nouvelle démonstration.

*Poincaré* (*H.*). — Sur les équations de la Physique mathématique. (57-156).

L'étude de la vibration des membranes, ainsi qu'un grand nombre de questions relatives aux théories de l'élasticité et de la chaleur, se rattache au problème suivant :

« Étant donné un domaine D dans le plan ou dans l'espace, limité par une frontière F, déterminer une fonction $u$ des coordonnées d'un point de D, satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(1) \qquad \Delta u + \xi u + f = 0, \qquad \text{à l'intérieur de D,}$$

$$(2) \qquad \frac{du}{dn} + hu = 0, \qquad \text{sur F;}$$

$\xi$ et $h$ sont des constantes et $f$ une fonction donnée, $n$ est la normale extérieure à la frontière F, qu'on suppose d'ailleurs formée d'un nombre fini de portions de surfaces ou de courbes analytiques. »

Antérieurement au Mémoire de l'auteur, ce problème avait déjà été étudié par MM. Picard, Schwarz et par l'auteur lui-même.

I. Dans une première Partie sont indiquées tout d'abord, en vue des applications ultérieures, des limitations importantes relatives à la fonction de Green pour l'équation $\Delta u = 0$ et aux solutions du problème de Dirichlet. Puis l'auteur désigne par $v = [f, \xi]$ la solution de (1) nulle sur F : on peut la développer en série de la forme

$$(3) \qquad v = v_0 + v_1\xi + v_2\xi^2 + \ldots + v_n\xi^n + \ldots,$$

les fonctions $v_n$ étant solutions des équations

$$\Delta v_0 + f = 0, \qquad \Delta v_1 + \xi v_0 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta v_n + \xi v_{n-1} = 0, \ldots.$$

et nulles sur F. En généralisant des théorèmes établis par M. Schwarz dans le cas où $f = 1$, on peut montrer que la série (3) converge uniformément et absolument pour $|\xi| < \frac{1}{Q\sqrt{T}}$ : ici, suivant que D a trois ou deux dimensions, T désigne le volume ou la surface de D et Q est égal à $\frac{l}{4\pi}$ ou $\frac{l^2}{4\pi}$, $l$ étant la plus grande distance de deux points de F. De plus, la série représente bien la solution cherchée.

Pour aller plus loin dans l'étude de la convergence, l'auteur pose

$$A = \int_D V^2 d\tau, \quad B = \int_D \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 d\tau,$$

les intégrales étant doubles ou triples et $d\tau$ désignant l'élément de volume ou de surface de D. En supposant d'abord que la fonction V satisfasse à la condition $\int_D V\, d\tau = 0$, on peut indiquer une limite inférieure du rapport $\frac{B}{A}$ : cette limite est $\frac{16}{9l^2}$ dans l'espace ou $\frac{24}{7l^2}$ dans le plan. Si maintenant V est de la forme $V = \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_p\varphi_p$, les $\varphi$ étant des fonctions données, on peut choisir les coefficients arbitraires $\alpha$ de telle façon que $\frac{B}{A}$ surpasse un nombre donné $L_p$ ne dépendant que de D et de $p$ $\left(L_p\right.$ croît comme $p^{\frac{2}{3}}$ dans l'espace et $p$ dans le plan$\left.\right)$. On déduit de là que, si $f$ est de la forme $\alpha_1 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p$, on peut prendre les coefficients $\alpha$ tels que la série (3) converge pour $|\xi| < L_p$.

Dès lors, $f$ étant maintenant une fonction quelconque, si l'on pose

$$(4) \qquad u_p = [v_{p-2}, \xi] \quad (p \geqq 2), \qquad \text{et} \qquad w = \alpha_1 v + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p,$$

on peut choisir les $\alpha$ de telle façon que le rayon de convergence de la série $w$, par rapport à $\xi$, soit supérieur à $L_p$. Or des équations (4) on tire $v = \frac{P}{D}$, P et D étant deux déterminants d'ordre $p$ : D peut se mettre sous la forme d'un polynome entier en $\xi$ à coefficients fonctions des $\alpha$ seulement et P est holomorphe en $\xi$ pour $|\xi| < L_p$. Donc $v$ *est méromorphe* pour $|\xi| < L_p$ et par suite *dans tout le plan*, $L_p$ étant arbitraire. Substituant alors dans (1), il vient

$$(1') \qquad \Delta P + \xi P + f D = 0.$$

La fonction $v$ ne peut admettre, relativement à $\xi$, *que des pôles simples :* ceux dont le module est $< L_p$ seront racines de $D = 0$. Si $\xi = k$ est l'un d'eux, la valeur correspondante $P_k$ de P vérifie l'équation $\Delta P_k + \xi P_k = 0$, d'après (1'), et s'annule sur F. L'auteur appelle $P_k$ une *fonction harmonique* et $k$ est son *nombre caractéristique :* la raison de cette définition est que $P_k$ satisfait aux conditions qui caractérisent les divers sons simples, appelés *harmoniques*, dans les vibrations d'une membrane $\left(\text{si } w \text{ est l'élongation d'un point de la membrane, mise sous la forme } w = u \sin\frac{t - t_0}{\theta},\ u \text{ vérifie } \Delta u + ku = 0 \text{ et s'annule au bord, avec } k = \frac{\rho}{p\theta^2},\ \rho \text{ étant la densité superficielle, } p \text{ la tension, } \theta \text{ la période}\right)$. Aux différentes valeurs de $k$ correspond alors *la suite des harmoniques*, *dont l'existence se trouve ainsi pour la première fois rigoureusement démontrée* [1], car l'auteur établit très simplement qu'il est impossible que $v$ soit holomorphe : d'où l'existence des pôles, qui sont d'ailleurs *réels et positifs*. De plus, comme il ne peut exister plus de $p - 1$ fonctions linéairement indé-

---

[1] Auparavant, M. Schwarz avait démontré l'existence du son fondamental et M. Picard celle de la première harmonique.

pendantes dont le nombre caractéristique soit $< L_p$, à un même nombre caractéristique ne peuvent convenir qu'un nombre fini de fonctions harmoniques linéairement indépendantes. On peut encore particulariser une fonction harmonique $U_i$ en la définissant ainsi :

$$(5) \qquad \Delta U_i + k_i U_i = 0 \text{ dans D}, \qquad U_i = 0 \text{ sur F}, \qquad \int_D U_i^2 \, d\tau = 1,$$

ce qui ne restreint pas la généralité d'une façon essentielle.

II. Après avoir démontré ces résultats fondamentaux, l'auteur établit différentes limitations relatives aux solutions $u$ de l'équation (1), telles que

$$(6) \qquad \frac{du}{dn} + hu = \varphi \quad \text{sur F},$$

en supposant $\xi = 0$ ou $f = 0$. Lorsque $\xi = 0$, les résultats établis subsistent quand on remplace la condition (6) par la suivante :

$$(7) \qquad \int_D (vf + u\Delta v)\, d\tau + \int_F v\varphi \, d\omega = \int_F u\left(hv + \frac{dv}{dn}\right) d\omega,$$

$d\omega$ étant un élément de F et $v$ une fonction arbitraire, continue ainsi que ses dérivées premières; (6) entraîne (7), mais par contre (7) n'entraîne (6) que si $u$ et $\frac{du}{dn}$ sont bien déterminées et continues et elle est donc plus générale que (6).

Les résultats antérieurement établis permettent d'utiliser une *fonction de Green généralisée* G(M, P), dont la singularité est analogue à celle de la fonction de Green ordinaire, mais qui satisfait à $\Delta G + \xi G = 0$ dans D et à $\frac{dG}{dn} + hG = 0$ sur F. La solution $u$ de (1) satisfaisant à (6) est donnée par la formule

$$u_P = \int_F G\varphi \, d\omega + \int_D G f \, d\tau_M.$$

Si $\xi$ est négatif et réel, G est positive; l'auteur établit aisément les limites de sa variation et ceci s'étend au cas où $\xi$ est complexe et à partie réelle négative.

Après avoir rappelé le problème de Neumann et précisé les conditions d'application de la méthode de Neumann, l'auteur aborde *le problème des températures stationnaires*, c'est-à-dire la recherche de la température finale d'un solide qui perd de la chaleur par rayonnement par sa surface, mais à l'intérieur duquel certaines causes constantes produisent sans cesse de la chaleur. C'est le problème énoncé au début [équations (1) et (2)], avec $\xi = 0$ : le pouvoir émissif est proportionnel à $h$ et la chaleur produite en chaque point, dans l'unité de temps, est proportionnelle à $f$. Grâce aux considérations précédentes, on obtient $u$ sous la forme d'une série entière en $h$, convergente dans un cercle, et qu'on peut prolonger analytiquement dans des cercles successifs de même rayon ayant leurs centres sur l'axe réel du plan de la variable $h$. Mais la solution ainsi obtenue satisfait non pas à (2), mais à la condition (7), avec $\varphi = 0$.

Lorsque $\xi \neq 0$, le problème devient celui *du refroidissement*. Relativement à la nature de la solution par rapport à $\xi$, les résultats sont les mêmes que dans le cas $h = \infty$, étudié dans la première Partie : la solution est méromorphe et

ses résidus satisfont à $\Delta u + ku = 0$ dans D et à $\frac{du}{dn} + hu = 0$ sur F, mais ici les démonstrations sont moins satisfaisantes et nécessiteraient, pour être plus rigoureuses, une étude plus approfondie de la méthode de Neumann; ainsi que dans le problème précédent, les coefficients de la série en $\xi$ vérifient (7), avec $\varphi = 0$, et non (2).

III. Dans la dernière Partie du Mémoire, l'auteur se borne au cas où $h = \infty$, bien que les résultats obtenus lui semblent vrais dans tous les cas. On peut alors se proposer de *développer une fonction arbitraire en série de fonctions harmoniques* $U_i$ définies par les conditions (5), soit $f = \Sigma A_i U_i$. Si le développement est possible, $A_i$ sera égal à $\int U_i f \, d\tau$, mais la démonstration de la possibilité du développement est ramenée à celle des deux propositions suivantes : 1° la valeur asymptotique de $v = [f, \xi]$ est égale à $\frac{f}{\xi}$ quand le module de $\xi$ croît indéfiniment, son argument restant constant et $\neq 0$; 2° on peut choisir des cercles $C_i$ concentriques à l'origine et tels qu'on ait toujours $|v\xi| < M$ sur $C_i$. Or ces propositions ne sont pas démontrées : seule, la première est établie par l'auteur quand l'argument de $\xi$ reste compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. D'où la nécessité de se limiter à certains cas particuliers pour établir la possibilité du développement. On arrive en définitive aux résultats suivants, $f$ étant analytique : 1° $\Sigma A_i U_i$ converge absolument si $f$, $\Delta f$ et $\Delta^2 f$ s'annulent sur la frontière F; 2° $\sum \frac{A_i U_i}{k}$ converge absolument si $f$ et $\Delta f$ s'annulent sur F; 3° $\sum \frac{A_i U_i}{k^2}$ converge absolument si $f$ s'annule sur F. L'auteur déduit de là, par une analyse fondée sur le théorème de Mittag-Leffler, que l'on a :

1° $\quad v = -\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}$ $\qquad$ si $f$ et $\Delta f$ s'annulent sur F;

2° $\quad v = -\sum \frac{A_i U_i \xi}{k_i(\xi - k_i)} + v_0$ $\qquad$ si $f$ s'annule sur F;

3° $\quad v = -\sum \frac{A_i U_i \xi^2}{k_i^2(\xi - k_i)} + v_0 + v_1 \xi,$ $\qquad$ dans tous les cas.

De ce qui précède on conclut que : 1° *la série* $\Sigma A_i U_i$ *représente* $f$ *chaque fois qu'elle converge;* 2° ceci a lieu en particulier *si* $f$ *est analytique et si* $f$, $\Delta f$ *et* $\Delta^2 f$ *s'annulent sur* F. Ce dernier résultat suffit pour les applications physiques, grâce à la représentation approchée de toute fonction donnée par une fonction $f$ satisfaisant aux conditions énoncées.

*Garibaldi* (*Cesare*). — Sur l'étendue des ensembles dénombrables. (157-160).

*Cerruti* (*Valentino*). — Liste des travaux scientifiques de Enrico Betti. (161-165).

*Burali-Forti* (*C.*). — Sur les classes ordonnées et les nombres transfinis. (169-179).

L'auteur analyse et traduit en symbole le concept de classe ordonnée, pour obtenir ensuite, comme êtres abstraits, les nombres ordinaux ou transfinis de Cantor (notations symboliques du « Formulaire » de la *Rivista di matematica*; *cf.* PEANO, *Notations de logique mathématique*, Turin, 1894).

*Torelli* (*Gabriele*). — Notice nécrologique sur Giuseppe Battaglini (1826-1894). (180-186).

*Amici* (*Nicola*). — Résolution de la congruence $x^m \equiv b \pmod{2^\nu}$. (187-201).

L'auteur appelle *racines quasi-primitives* les nombres de la forme $8h+3$, $8h+5$, inférieurs à $2^\nu$ et, au moyen des indices des nombres, obtenus en prenant pour base une racine quasi-primitive, il étudie la possibilité et le nombre de solutions des congruences binomes de la forme $x^m \equiv b \pmod{2^\nu}$, $x^{2m} \equiv b \pmod{2^\nu}$. On peut appliquer la méthode à $a^x \equiv b \pmod{2^\nu}$.

*Fouret* (*G.*). — Sur le nombre de plans tangents qu'on peut mener à une surface algébrique par une droite multiple de cette surface. (202-208).

A une surface algébrique du $n^{\text{ième}}$ ordre, contenant une droite multiple d'ordre $r$, on peut mener $[n(n+r-1)-2r(r+1)](n-r-1)$ plans tangents ayant leurs points de contact en dehors de la droite.

*Soler* (*E.*). — Sur une certaine déformée de la sphère. (209-221).

Étude d'une surface de révolution déformée de la sphère et que l'auteur juge préférable à l'ellipsoïde pour substituer au géoïde. La méridienne de cette surface est donnée par

$$r = k\cos u, \qquad z = \int \sqrt{1-k^2\sin^2 u}\,du, \qquad k > 1,$$

$r$ étant le rayon du parallèle, $u$ l'arc de méridien.

*de Vries* (*Jan*). — Sur la théorie des systèmes de termes. (222-226).

*Guccia* (*G.-B.*). — Sur les involutions d'espèce quelconque pourvues de singularités ordinaires. (227-247).

Cette Note est la suite d'une Note antérieure (même recueil, t. VII, 1893; *Bulletin*, t. XXXVII$_2$; l'auteur donne cinq théorèmes contenant comme cas particuliers les théorèmes connus sur les centres harmoniques.

*Laisant* (*C.-A.*). — Note sur les invariants des polynomes entiers. (249-255).

Étude d'un invariant formé avec un polynome et ses dérivées successives; son expression au moyen des invariants dérivés; intégration d'une équation différentielle.

Tome IX, 1895.

*Guccia* (*G.-B.*). — Recherches sur les systèmes linéaires de courbes planes algébriques admettant des singularités ordinaires. (1-64).

Ce Mémoire fait suite à un Mémoire antérieur du même recueil (t. VII, 1893; *Bulletin*, t. $XXXVII_2$, p. 106). En s'appuyant sur les notions les plus élémentaires de géométrie sur la droite, l'auteur traite par une méthode synthétique un grand nombre de questions importantes relatives à la théorie générale des courbes planes algébriques. Il utilise pour cela la « courbe $\Phi$ », lieu des points de contact des tangentes menées d'un point P à un faisceau (C) de courbes d'ordre $n$. Tous les problèmes basés sur l'emploi des polaires relatives à une courbe C peuvent être résolus plus simplement au moyen de la courbe $\Phi$ relative au faisceau défini par C et une autre courbe arbitraire de même ordre.

L'auteur étudie le cas où le faisceau (C) a un point de base d'un ordre de multiplicité donné; puis il recherche dans quels cas le nombre de points doubles des courbes d'un faisceau d'ordre $n$, qui est en général de $3(n-1)^2$, peut s'abaisser. La courbe $\Phi$ lui sert également à construire la jacobienne d'un réseau et il en donne plusieurs exemples. Quand P varie dans le plan, les courbes $\Phi$ correspondantes forment un réseau $[\Phi]$ d'ordre $2n-1$, dont la jacobienne $\Sigma$ est d'ordre $6(n-1)$ : l'auteur donne de nombreux théorèmes relatifs à $[\Phi]$ et à $\Sigma$ et il termine enfin par la démonstration des formules de Plücker au moyen de la courbe $\Phi$ et par des propriétés diverses.

*Kantor* (*S.*). — Sur les courbes hyperelliptiques portant des correspondances univoques. (65-78).

Ces courbes se distinguent des autres courbes à correspondance univoque interne, en ce que les correspondances sur elles sont toujours contenues dans des transformations birationnelles planes, sans avoir besoin de subir une transformation simplement rationnelle. L'auteur construit toutes les transformations birationnelles appartenant à la courbe hyperelliptique normale. Toutes les transformations birationnelles non involutives, admettant la courbe donnée comme lieu de points doubles, peuvent s'obtenir par la composition de plusieurs transformations de Jonquières; étude de ces transformations.

*Fano* (*G.*) et *Enriques* (*F.*). — Sur les postulats fondamentaux de la Géométrie projective. (Trois lettres.) (79-85).

*More* (*E. Hastings*). — Au sujet des systèmes de ternes. (86).

*Pennacchietti* (*G.*). — Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. (87-95).

L'auteur donne quelques observations sur la manière d'obtenir les équations différentielles et indique un nouveau cas d'équilibre intéressant.

*Maccaferri* (*Eugenio*). — Sur un théorème fondamental relatif aux éléments communs à deux coniques dans un plan. (96-107).

L'auteur donne une démonstration rigoureuse, basée sur les résultats dus à M. Enriques en Géométrie projective, de la proposition suivante : deux coniques réelles d'un plan, ayant en commun un point réel (non de contact), ont au moins un autre point réel commun. Situation relative des deux coniques.

*Vivanti* (*G.*). — Préliminaires pour l'étude des fonctions de deux variables. (108-124).

Une des difficultés de l'étude des fonctions de deux variables complexes réside dans leur représentation géométrique dans un espace $E_4$ à quatre dimensions. Pour éviter cela, Poincaré (*Acta. math.*, t. IX; *Bulletin*, t. $XIV_2$, p. 133) utilise les intersections des êtres géométriques étudiés avec des espaces à trois dimensions convenablement choisis. L'auteur se propose de donner une représentation *complète* d'un champ de variation de deux variables complexes $(x, y)$ par la correspondance entre $(x, y)$ et une *droite* de l'espace $E_3$ : si $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sont les coordonnées d'un point de $E_3$, à $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, correspond la droite $x_1\xi + x_2\zeta = y_1\eta + y_2\zeta = 1$. Une fonction $f(x, y)$ est ainsi envisagée comme une *fonction de ligne*. Mais ceci oblige à préciser des concepts qui sont intuitifs dans la Géométrie ponctuelle : aussi l'auteur définit le *voisinage* (intorno) et le *contour* d'une droite (arbitraire ou appartenant à un complexe ou à une congruence), la connexité d'une congruence, etc. Puis il donne quelques indications sur la marche à suivre pour étendre aux fonctions $f(x, y)$ les concepts fondamentaux de Cauchy et de Riemann.

*Burgatti* (*Pietro*). — Un théorème de mécanique. (125-135).

L'auteur généralise un théorème de Stäckel (*C. R. Acad. Sc.*, 6 mars 1893) : la proposition correspond au cas où l'équation d'Hamilton s'intègre par séparation des variables (*voir* aussi Goursat, *C. R. Acad. Sc.*, 8 mai 1893).

*Bortolotti* (*Emma*). — Sur les fractions continues algébriques périodiques. (136-149).

Pour que les racines d'une équation du second degré à coefficients entiers en $x$ puissent être développées en fractions continues périodiques, il faut et il suffit que l'équation indéterminée du second degré $Au^2 - v^2 = 1$ soit résoluble par des polynomes entiers, A étant le discriminant de l'équation donnée. Le cas particulier où A = const. comprend le théorème de Lagrange sur le développement des racines d'une équation du second degré à coefficients

numériques. Dans le cas général, si l'une des racines admet un développement en fraction continue périodique, il en est de même de l'autre, sa période étant formée des mêmes éléments que la première, mais pris en ordre inverse.

*Picard* (*Émile*). — A propos de quelques récents travaux mathématiques. (150-158).

*Picard* (*Émile*). — Sur la théorie des surfaces algébriques. (159-166).

Deux Articles publiés dans la *Revue générale des Sciences* (15 novembre 1892 et 30 décembre 1894).

*Gerbaldi* (*F.*). — Sur les involutions d'espèce quelconque. (167-168).

Dans une involution d'espèce $k$, une singularité ordinaire $[\sigma_1, \ldots, \sigma_k]$ abaisse le nombre des points $(k+1)$-uples d'un nombre qui est *toujours* égal à $\sigma_1 + \ldots + \sigma_k - \frac{k(k+1)}{2}$ (et non pas seulement *en général*. *Cf.* Guccia, *Rendiconti*, t. VII et VIII; *Bulletin*, t. $\text{XXXVII}_2$).

*Di Pirro* (*Giovanni*). — Sur la transformation des équations de la Dynamique. (169-185).

M. Goursat a proposé le problème suivant :

Étant données les équations de Lagrange

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial p'_r}\right) - \frac{\partial S}{\partial p_r} = P_r, \qquad p'_r = \frac{dp_r}{dt} \qquad (r = 1, \ldots, n),$$

S étant une forme quadratique homogène des $p'_r$ dont les coefficients (ainsi que $P_r$) ne dépendent que des $p_r$, déterminer $\varphi_r$ et $\lambda$ tels que les équations

$$q_r = \varphi_r(p_1, \ldots, p_n), \qquad dt = \lambda(p_1, \ldots, p_n)\, dt_1$$

permettent de transformer (A) en un autre système

$$\text{(B)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S_1}{\partial q'_r}\right) - \frac{\partial S_1}{\partial q_r} = Q_r, \qquad q'_r = \frac{dq_r}{dt},$$

formé avec $q_r$ et $q'_r$ comme (A) est formé avec $p_r$ et $p'_r$.

M. Painlevé (*Journal de Liouville*, 1894; *Bulletin*, t. $\text{XXV}_2$) a examiné un cas particulièrement intéressant ($p_r = q_r$); ici, l'auteur se propose de résoudre complètement le problème dans le cas où S et $S_1$ sont réductibles à la forme orthogonale, et dans le cas où $P_r$ et $Q_r$ sont arbitraires. Ses résultats généralisent ceux de MM. Appell, Dautheville et Picciati.

*Berzolari* (*L.*). — Sur les sécantes multiples d'une courbe algébrique de l'espace à trois ou quatre dimensions. (186-197).

*Garibaldi* (*C.*). — Une petite contribution à la théorie des ensembles. (198-201).

L'auteur étudie la puissance de l'ensemble des racines d'une équation algébrique dont les coefficients appartiennent à des ensembles donnés.

*Vivanti* (*G.*) — Sur l'irrationnalité icosaédrique. (202-207).

Il est impossible de résoudre les équations générales de degré $>5$ à l'aide de l'irrationnalité icosaédrique.

*Ascione* (*Errico*). — Sur un théorème de Géométrie projective. (208).

*Cordone* (*Gerolamo*). — Sur la congruence générale du quatrième degré suivant un module premier. (209-243).

La discussion générale de la conguence du troisième degré a été faite par Oltramare (*Journal de Crelle*, t. 45). En s'appuyant sur ces résultats, qu'il complète et simplifie en plusieurs points, l'auteur donne la discussion, non abordée jusque-là, de la congruence générale du quatrième degré suivant un module premier : celle-ci admet en général quatre racines rationnelles ou non, dont on pourra obtenir l'expression par la méthode qui permet de résoudre par radicaux l'équation du quatrième degré; il s'agit de rechercher dans quels cas les expressions trouvées se réduisent à des nombres rationnels.

*Picard* (*Émile*). — Sur la théorie des groupes et des surfaces algébriques. (244-256).

L'auteur rassemble ici les résultats de plusieurs Notes antérieures (*Journal de Liouville*, 1889; *C. R. Acad. Sc.*, 1890, 1895). Soient une équation de la forme

$$f[y, y', \ldots, y^{(m)}] = 0 \tag{1}$$

et $y$ une intégrale uniforme dans une région du plan contenant les points $x$ et $x+h$; $Y, Y', \ldots, Y^{(m)}$ étant les valeurs de $y, y', \ldots, y^{(m)}$ quand on y remplace $x$ par $x+h$, on a

$$Y = F[h, y, \ldots, y^{(m)}], \ldots, \qquad Y^{(m)} = F_m[h, y, \ldots, y^{(m)}].$$

L'auteur étudie le cas où la transformation biuniforme, ainsi définie entre les $y$ et les Y, est *birationnelle* et il montre que l'*intégrale générale de l'équation* (1) *s'exprime au moyen des transcendantes de la théorie des fonctions abéliennes*. Voici, par exemple, une conséquence de ce fait : Si l'intégrale générale d'une équation quelconque de la forme (1) s'exprime à l'aide d'une intégrale particulière par la formule

$$Y = R[y, y', \ldots, y^{(m)}, a_1, \ldots, a_m]$$

R étant une fonction rationnelle des $y$ et les lettres $a$ désignant des constantes arbitraires, on sera sûr que l'intégrale générale pourra s'exprimer à l'aide des fonctions abéliennes ou de leurs dégénérescences.

Soit maintenant une surface algébrique S dans l'espace à $n$ dimensions : l'extension du théorème énoncé au début à un système d'équations différentielles du premier ordre montre que, si la surface admet un groupe continu et fini de transformations birationnelles à $r$ paramètres, on peut s'arranger de manière que les coefficients des fonctions rationnelles de $x$, qui donnent le groupe, soient des fonctions uniformes des $r$ paramètres s'exprimant au moyen des transcendantes abéliennes. Celles-ci permettent d'ailleurs, suivant les cas, la représentation paramétrique de la surface S ou de multiplicités algébriques appartenant à S et, dans le cas d'une surface à trois dimensions, les résultats généraux deviennent les suivants : si le groupe fait correspondre à un point arbitraire de S un autre point quelconque, les coordonnées sont des fonctions abéliennes de deux paramètres; sinon on peut faire passer par chaque point de la surface une courbe algébrique que le groupe transforme en elle-même, et qui sera donc de genre *zéro* ou *un*.

*Dickson* (*Léonard E.*) — La transformation quadratique de Cremona définie par une conique. (En anglais, 256-259).

*Kohn* (*Gustavo*). — Émile Weyr : notice nécrologique. (260-262).

Traduction, par F. Gerbaldi, d'un article des *Monatschrifte für Math. u. Phys.* (1895).

M. Gevrey.

## JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK.

Tome CXLII, année 1913 [*Suite et fin* (1)].

*Kürschák* (*Josef*). — Sur la notion de limite et la théorie générale des corps. (211-253).

I. *Introduction.* — L'auteur généralise, pour un corps quelconque de nombres, la notion de *valeur absolue* de la manière suivante :

*A chaque élément a d'un corps* $\mathfrak{K}$ *on fait correspondre un nombre réel* $\|a\|$ *satisfaisant aux conditions suivantes :*

1. *On a* $\|0\| = 0$ *et, pour chaque élément a différent de zéro,* $\|a\| > 0$;
2. *On a pour tout élément a*

$$\|1 + a\| \leq 1 + \|a\|;$$

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVIII$_2$, p. 125.

3. *On a pour deux éléments quelconques a et b*

$$\| ab \| = \| a \| \; \| b \| ;$$

4. *Il y a dans $\mathcal{K}$ au moins un élément a tel que $\| a \|$ soit différent de zéro et de un.*

Une telle correspondance constitue une *valorisation* (Bewertung) du corps $\mathcal{K}$, le nombre $\| a \|$ s'appelant la valorisation de $a$. Deux éléments de même valorisation sont dits *équivalents*.

Le corps $\mathcal{K}$ des nombres rationnels admet, outre la valorisation ordinaire au moyen des valeurs absolues, une infinité d'autres valorisations. Par exemple, soient $p$ un nombre premier donné et

$$a = \frac{u}{v} p^{\alpha}$$

un nombre rationnel, $u$ et $v$ désignant des entiers premiers avec $p$, et $\alpha$ un nombre entier positif, nul ou négatif. La formule

$$\| a \| = e^{-\alpha} \qquad (\| 0 \| = 0)$$

définit une valorisation du corps $\mathcal{K}$; le nombre $p$ s'appelle le *module d'équivalence*.

Quelle que soit la manière dont un corps est valorisé, on a

$$\| 1 \| = \| -1 \| = 1, \qquad \| -a \| = \| a \| ,$$

et, ponr tout entier naturel $n$,

$$\| n \| \leqq n.$$

On a enfin l'inégalité

$$\| a - b \| \leqq \| a - c \| + \| c - b \|$$

qui montre que $\| a - b \|$ peut être regardé comme un *écart*, au sens de M. Fréchet (*Rendiconti di Palermo*, t. XXII, 1906).

Il résulte en particulier de là que les notions de limite et de suite fondamentale peuvent être étendues du corps des nombres complexes à un corps valorisé quelconque. Cependant, une suite fondamentale n'a pas nécessairement une limite (il en est d'ailleurs ainsi dans le corps des nombres rationnels). Un corps valorisé pour lequel toute suite fondamentale a une limite est identique à l'ensemble des limites de ses suites fondamentales; il est dit *parfait* (comme le corps des nombres réels et celui des nombres complexes).

Le but du Mémoire est précisément de démontrer que *tout corps valorisé peut, par l'adjonction de nouveaux éléments convenablement choisis, être complété de manière à devenir un corps valorisé parfait et algebriquement fermé*. Rappelons qu'un corps est dit algébriquement fermé lorsque toute fonction rationnelle entière $f(z)$, dont les coefficients appartiennent au corps, est décomposable dans ce corps en un produit de facteurs linéaires.

La démonstration est faite en plusieurs parties. L'auteur démontre d'abord que tout corps valorisé peut être complété en un corps parfait valorisé; puis que tout corps parfait valorisé peut être complété en un corps algébriquement fermé valorisé; enfin que tout corps algébriquement fermé valorisé peut être complété en un corps algébriquement fermé, parfait et valorisé. La première partie de la

démonstration utilise les recherches de Cantor; la deuxième partie celles de Steinitz et Hadamard; la troisième partie celles de Weierstrass.

L'auteur fait remarquer qu'il a été conduit à la notion de valorisation par un Mémoire de Hensel sur les nombres $p$-adiques; ces nombres $p$-adiques s'introduisent du reste en partant du corps des nombres rationnels valorisé suivant le module d'équivalence $p$ et cherchant à le compléter en un corps parfait valorisé.

II. *Formation de la limite dans les corps valorisés.* — Après avoir indiqué les théorèmes fondamentaux sur les limites, généralisation immédiate aux corps valorisés de théorèmes classiques, l'auteur passe à la construction d'un corps $\overline{\mathcal{K}}$ parfait valorisé, contenant un corps valorisé donné $\mathcal{K}$. En suivant la marche de Cantor, il adjoint à chaque suite fondamentale d'éléments de $\mathcal{K}$, n'ayant aucune limite dans $\mathcal{K}_0$, un élément nouveau, *limite idéale*, défini par la suite fondamentale elle-même. L'égalité, l'addition et la multiplication de ces éléments nouveaux sont ensuite définies; enfin leur valorisation est définie par la condition que $\lim a_n$ a pour valorisation la limite, au sens ordinaire du mot, de $\| a_n \|$. Le nouveau corps valorisé $\mathcal{K}'$ ainsi obtenu est alors parfait. On l'appelle le corps *dérivé* de $\mathcal{K}$.

La notion de série convergente et de série absolument convergente s'étend sans difficulté aux corps parfaits valorisés.

Si $\mathcal{K}$ est le corps des nombres rationnels, valorisé au moyen du module d'équivalence $p$, le corps dérivé $\mathcal{K}'$ n'est autre que le corps $K(p)$ des nombres rationnels $p$-adiques de Hensel. Chaque nombre A de ce corps est limite d'une suite de nombres rationnels; de plus, si A n'est pas nul, tous les termes de cette suite ont, à partir d'un certain rang, la même valorisation, qui est naturellement la valorisation de A. Les valorisations des éléments de $K(p)$ ne constituent donc pas l'ensemble des nombres réels non négatifs, mais seulement un ensemble dénombrable.

A chaque élément A de $K(p)$ on peut faire correspondre d'une manière et d'une seule un nombre rationnel $ap^\alpha$, où $a$ est l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, p-1$, de manière à avoir

$$\| A - ap^\alpha \| < \| A \| ;$$

on en déduit que tout nombre A non nul de $K(p)$ peut être représenté d'une manière et d'une seule comme la somme d'une série infinie

$$a_0 p^\alpha + a_1 p^{\alpha+1} + \ldots + a_n p^{\alpha+n} + \ldots$$

où les $a_i$ sont pris parmi les nombres $0, 1, 2, \ldots, p-1$, le coefficient $a_0$ étant différent de zéro. On retrouve ainsi la définition primitivement donnée par Hensel des nombres $p$-adiques ; elle joue ainsi le même rôle que la théorie des nombres irrationnels fondée sur la notion de fraction décimale illimitée joue par rapport à la théorie de Cantor.

III. *Séries de puissances.* — L'auteur étudie ensuite les séries de puissances afin de généraliser certains théorèmes d'Hadamard qui vont jouer un rôle important dans la seconde partie de la démonstration.

Étant donnée une série de puissances

$$\mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_m z^m + \ldots$$

dont les coefficients appartiennent à un corps valorisé *parfait*, cette série est absolument convergente si

$$\| z \| < \mathrm{R},$$

divergente si

$$\| z \| > \mathrm{R},$$

en désignant par R l'inverse de la *constante de Cauchy* $l$ définie comme limite supérieure de $\| c_m \|^{\frac{1}{m}}$. Le nombre R est dit *rayon de convergence;* il ne faudrait cependant pas affirmer que R est la *borne supérieure* des valorisations de $z$ pour lesquelles la série est convergente [cas du corps K $(p)$].

L'auteur rappelle alors l'énoncé des théorèmes d'Hadamard qui indiquent dans quel cas, étant donnée une série $\mathfrak{p}(z)$, il existe un polynome entier $f(z)$ de degré donné tel que la série $\mathfrak{p}(z) f(z)$ ait un rayon de convergence supérieur à celui de $\mathfrak{p}(z)$; ces théorèmes s'étendent immédiatement à un corps parfait valorisé quelconque.

A l'aide des résultats d'Hadamard, l'auteur démontre que si

$$f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

est un polynome *irréductible* dans le corps $\mathcal{K}$ et si $g(z)$ est un polynome non divisible par $f(z)$, la série $\mathfrak{p}(z)$, convergente pour des valeurs suffisamment petites de $\| z \|$, qui représente $\frac{g(z)}{f(z)}$, admet pour constante de Cauchy

$$l = \| a_n \|^{\frac{1}{n}}.$$

Il en est ainsi en particulier si $g(z)$ est de degré inférieur à $f(z)$.

Le résultat précédent s'étend à la série procédant suivant les puissances négatives de $z$, qui représente le quotient

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{b_0 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1}}{z^n + \ldots + a_n},$$

où $f(z)$ est supposé irréductible dans $\mathcal{K}$.

IV. *Prolongements algébriques.* — L'auteur rappelle rapidement de quelle manière Steinitz (même *Journal*, t. CXXXVII, 1909) démontre que tout corps peut être complété en un corps algébriquement fermé; bien que cette démonstration repose sur un axiome souvent contesté de la théorie des ensembles (*Wohlordnungs axiom* de Zermelo), l'auteur admet la validité de la conclusion. Il s'agit alors de montrer que le nouveau corps algébriquement fermé peut être valorisé, en supposant le corps primitif déjà valorisé et parfait. Pour cela, l'auteur a simplement besoin de supposer que le nouveau corps $\overline{\mathcal{K}}$ est un prolongement *normal* de l'ancien : cela veut dire que toute fonction rationnelle entière $f(z)$, dont les coefficients appartiennent à $\mathcal{K}$, qui est irréductible dans $\mathcal{K}$, et qui admet *une* racine dans $\overline{\mathcal{K}}$, se décompose dans $\overline{\mathcal{K}}$ en un produit de facteurs linéaires.

La valorisation de $\overline{\mathcal{K}}$ est faite en partant de la condition que les éléments de $\mathcal{K}$ conservent leur valorisation primitive et que deux éléments de $\overline{\mathcal{K}}$ satisfaisant à une même équation algébrique irréductible dans $\mathcal{K}$ ont la même valo-

risation. Si cette équation irréductible est

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

cette valorisation commune est par suite $\| a_n \|^{\frac{1}{n}}$.

La démonstration de la propriété

$$\| \alpha \| \, \| \beta \| = \| \alpha\beta \|$$

étendue aux éléments de $\overline{\mathfrak{K}}$, est assez simple. Quant à celle de l'inégalité

$$\| 1 + \alpha \| \leqq 1 + \| \alpha \|$$

elle exige essentiellement l'hypothèse que $\mathfrak{K}$ est *parfait*. On voit d'abord assez facilement que si

$$\varphi(z) = c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + \ldots$$

est une série de puissances dont les coefficients appartiennent à $\mathfrak{K}$ et dont la constante de Cauchy est $l$, la série procédant suivant les puissances négatives de $t$ qui représente $\varphi(t-1)$ admet une constante de Cauchy $l' \leqq 1 + l$. D'après cela, si $\alpha$ est défini par l'équation algébrique irréductible

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

$1 + \alpha$ est défini par l'équation irréductible

$$f(t-1) = t^n + a'_1 t^{n-1} + \ldots + a'_n = 0$$

et l'inégalité à démontrer est donc

$$\| a'_n \|^{\frac{1}{n}} \leqq 1 + \| a_n \|^{\frac{1}{n}}.$$

Or, d'après les résultats déduits des théorèmes d'Hadamard, $\| a_n \|^{\frac{1}{n}}$ et $\| a'_n \|^{\frac{1}{n}}$ sont précisément les constantes de Cauchy $l$ et $l'$ des séries

$$\frac{1}{f(z)} = c z^{-1} + c_1 z^{-2} + \ldots$$

et

$$\frac{1}{f(t-1)} = c'_0 t^{-1} + c'_2 t^{-2} + \ldots.$$

Le corps $K(p)$ des nombres rationnels $p$-adiques est un corps valorisé parfait. Les prolongements algébriques de $K(p)$ sont les nombres algébriques $p$-adiques. Dans ce cas particulier, le théorème précédent résulte immédiatement des recherches de Hensel.

V. *Le théorème fondamental de la théorie de la valorisation.* — En s'appuyant sur une idée de Weierstrass, l'auteur démontre facilement la dernière partie de la démonstration : à savoir que le corps, dérivé d'un corps algébriquement fermé valorisé, est, lui aussi, algébriquement fermé. Il serait intéressant de savoir si le corps des nombres $p$-adiques algébriques donne ainsi par dérivation un nouveau corps, ou s'il est déjà parfait.

*Perron* (*Oskar*). — Sur les équations différentielles linéaires à variable indépendante réelle. (Première communication.) (254-270).

Étant donnée l'équation linéaire à coefficients constants

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = 0,$$

on sait que si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ sont les racines de l'équation caractéristique, supposées distinctes et rangées par ordre de parties réelles décroissantes, le rapport $\frac{y'}{y}$, où $y$ désigne l'intégrale générale, tend, pour $x = +\infty$, vers $\rho_1$; ce rapport peut tendre vers toute autre racine $\rho_\lambda$ si $y$ est de la forme

$$c_\lambda y_\lambda + c_{\lambda+1} y_{\lambda+1} + \ldots + c_n y_n \qquad (c_\lambda \neq 0).$$

Si l'on considère maintenant l'équation

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + f_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + f_n(x) y = 0.$$

où les coefficients $f_\lambda(x)$ sont *variables*, avec

$$\lim_{x=\infty} f_\lambda(x) = a_\lambda,$$

Poincaré a démontré (*American Journal of Mathematics*, t. VII, 1885) que les résultats énoncés pour l'équation (A) subsistent pour l'équation (B). L'auteur se propose de simplifier la démonstration de Poincaré qui du reste ne s'appliquait qu'à des coefficients $f_\lambda(x)$ rationnels.

1. L'auteur part du théorème suivant, classique depuis les recherches de Picard et Lindelöf :

*Étant donné le système d'équations différentielles*

$$y'_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\lambda,\mu}(x) y_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

*où les coefficients $f_{\lambda,\mu}(x)$ sont des fonctions continues de $x$ dans l'intervalle $(a, b)$ (pouvant même prendre des valeurs complexes) :*

1° *Il existe un système d'intégrales $y_1, \ldots, y_n$ continues dans l'intervalle $(a, b)$ prenant pour une valeur donnée $x_1$ des valeurs données;*

2° *Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ s'annulent toutes pour $x = x_1$, elles s'annulent dans tout l'intervalle $(a, b)$.*

2. On a d'abord le théorème suivant :

*On considère le système d'équations différentielles*

$$y'_\lambda = f_\lambda(x) y_\lambda + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\lambda,\mu}(x) y_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

*où les fonctions $f_\lambda(x)$, $\varphi_{\lambda,\mu}(x)$ sont continues pour $x \geqq x_0$, où les parties réelles de $f_1(x) - f_\lambda(x)$ sont plus grandes qu'un nombre positif fixe c et où les $\varphi_{\lambda,\mu}(x)$ tendent vers zéro pour $x$ infini. Ce système admet n systèmes linéairement indépendants d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dont chacun satisfait aux conditions*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_\lambda}{y_1} = 0 \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, n),$$

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{y'_1}{y_1} - f_1\right) = 0.$$

On peut, par exemple, prendre pour $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les intégrales qui, pour $x = x_1 \geqq x_0$, prennent des valeurs données $\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{1n}$, avec

$$|\eta_{11}| \geqq |\eta_{1\lambda}| \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, n).$$

3. L'auteur suppose maintenant en outre que les différences $f_\lambda(x) - f_{\lambda+1}(x)$ ont leurs parties réelles supérieures à $c$. En faisant le changement de fonctions

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{11} \int u\,dx, \\ y_2 &= y_{21} \int u\,dx + z_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n &= y_{n1} \int u\,dx + z_{n-1}, \end{aligned}$$

où $y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}$, sont des intégrales satisfaisant aux conditions du n° 2, l'auteur démontre par voie de récurrence l'existence de $n$ solutions linéairement indépendantes,

$$y_1 = y_{1\lambda}, \qquad y_2 = y_{2\lambda}, \qquad \ldots, \qquad y_n = y_{n\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

satisfaisant aux conditions

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{\mu\lambda}}{y_{\lambda\lambda}} = 0 \qquad (\mu \neq \lambda),$$

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{y_{\lambda\lambda}}{y_{\lambda\lambda}} - f_\lambda\right) = 0.$$

4. Le système plus général d'équations différentielles

$$y'_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\lambda,\mu}(x) y_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $f_{\lambda,\mu}$ sont continues pour $x = x_0$ et où l'on a

$$\lim_{x=\infty} f_{\lambda,\mu}(x) = a_{\lambda,\mu},$$

peut se ramener aux systèmes précédents. On peut d'abord l'écrire symboliquement

$$(y'_1, \ldots, y'_n) = F(y_1, \ldots, y_n),$$

en désignant par F la matrice

$$F = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \ldots, & f_{1,n} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ f_{n,1}, & \ldots, & f_{n,n} \end{pmatrix},$$

Soit A la matrice des $a_{\lambda,\mu}$ et soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les $n$ racines supposées distinctes de l'équation

$$|E\rho - A| = 0,$$

où E désigne la matrice unité. Il existe alors une matrice B à déterminant non nul et telle que

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \rho_n \end{pmatrix}.$$

En posant

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) = B(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

le système différentiel prend la forme

$$(z'_1, \ldots, z'_n) = B^{-1}FB(z_1, \ldots, z_n)$$

ou

$$z'_\lambda = \rho_\lambda z_\lambda + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\lambda,\mu}(x) z_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Il se ramène donc aux systèmes précédemment étudiés.

De là résulte facilement le théorème suivant :

*Si l'on suppose les racines $\rho_1, \ldots, \rho_n$ rangées par ordre de parties réelles décroissantes, les équations différentielles données possèdent $n$ solutions linéairement indépendantes*

$$y_{1,\lambda}, \quad y_{2,\lambda}, \quad \ldots, \quad y_{n,\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

*telles qu'on ait*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y'_{\mu,\lambda}}{y_{\mu,\lambda}} = \rho_\lambda,$$

*pourvu que l'élément $b_{\mu,\lambda}$ de la matrice* B *ne soit pas nul. A chaque valeur de $\lambda$ correspond au moins une valeur de $\mu$ satisfaisant à cette condition.*

5. On peut appliquer le résultat précédent à l'équation

$$z^{(n)} + f_1(x) z^{(n-1)} + \ldots + f_n(x) z = 0.$$

Si alors la limite, pour $x$ infini, de $f_\lambda(x)$ est $a_\lambda$ et si l'équation

$$\rho^n + a_1 \rho^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

admet $n$ racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ dont les parties réelles sont distinctes, il existe un système fondamental d'intégrales

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n$$

satisfaisant aux relations

$$\lim_{x=\infty} \frac{z'_\lambda}{z_\lambda} = \rho_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

et, plus généralement, si $\rho_\lambda \neq 0$, à

$$\lim_{x=\infty} (z_\lambda : z'_\lambda : \ldots : z_\lambda^{(n)}) = 1 : \rho_\lambda : \ldots : \rho_\lambda^n.$$

On déduit facilement de là que $\frac{z'}{z}$ tend en général vers celle des racines $\rho$ qui a la plus grande partie réelle : c'est le théorème de Poincaré.

6. Une partie de ces résultats subsiste si les parties réelles des racines $\rho_\lambda$ ne sont pas distinctes. Si, en particulier, la partie réelle de $\rho_1$ est supérieure à celles de toutes les autres racines, on a encore pour l'intégrale générale

$$\lim_{x=\infty} \frac{z'}{z} = \rho_1.$$

Si, au contraire, la plus grande partie réelle se présente dans plusieurs racines, le quotient $\frac{z'}{z}$ peut ne tendre vers aucune limite : l'équation

$$z'' + z = 0$$

fournit de cette particularité un exemple classique.

Le théorème redevient vrai si les racines qui ont la plus grande partie réelle sont toutes égales entre elles, et *si l'équation est à coefficients constants;* mais il n'en est plus de même, contrairement à ce que croyait Poincaré, dans le cas des coefficients variables. L'exemple suivant :

$$z'' - 2z' + \left(1 + \frac{a}{x}\right) z = 0 \qquad (a > 0)$$

suffit à le prouver; pour aucune intégrale (du moins réelle) on n'a

$$\lim_{x=\infty} \frac{z'}{z} = 1.$$

## *Rosanes* (*J.*). — Sur la théorie des coniques. (271-277).

On sait reconnaître par des constructions linéaires s'il existe une conique passant par six points donnés ou tangente à six droites données; mais si les six éléments donnés sont formés partie de points, partie de tangentes, on n'a encore jamais indiqué de constructions linéaires analogues. Il est cependant facile d'en indiquer une dans le cas où l'on donne quatre points et deux tangentes (ou quatre tangentes et deux points).

Soient $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ les quatre points; $a$, $a'$ les deux tangentes données. Soit 1 le point de concours de $a$ et $a'$; soient 2, 3, 4 les sommets du triangle obtenu en joignant deux à deux les points de concours des côtés opposés du quadrangle complet $\beta\gamma\delta\varepsilon$. Soit enfin $l$ la polaire de 1 par rapport à une conique passant par les quatre points et tangente aux deux droites. La droite $l$ est déterminée par deux conditions :

1° Elle passe par le point de concours fixe des polaires du point 1 par rapport aux coniques du faisceau déterminé par les points $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$;

2° Elle détermine avec les côtés du triangle 234 un quadrilatère complet tel que les droites joignant 1 aux sommets opposés de ce quadrilatère forment un faisceau en involution dont les rayons doubles sont les droites $a$, $a'$.

La deuxième condition détermine complètement la droite $l$ par des constructions linéaires; pour qu'il existe une conique passant par les quatre points donnés et tangente aux deux droites données, il faut et il suffit que cette droite $l$ satisfasse à la première condition.

Le résultat ainsi obtenu s'étend au problème dualistique. En particulier, si les deux points donnés sont les points cycliques, on obtient le théorème suivant :

*Si bcde est un quadrilatère circonscrit à un cercle, le point de concours des hauteurs du triangle diagonal est sur la droite lieu des centres des cercles inscrits dans le quadrilatère bcde; ce point est de plus le centre du cercle considéré.*

Tout ce qui précède suppose les données placées d'une manière *générale;* l'auteur examine ce qui se passe dans les cas particuliers. On a par exemple un cas particulier lorsque deux des diagonales du quadrilatère *bcde* circonscrit au cercle sont rectangulaires; alors deux des trois diagonales doivent être perpendiculaires sur la troisième.

## *Remak* (*R.*). — Nouvelle démonstration d'un théorème de Minkowski. (278-282).

Il s'agit du théorème suivant :

*Soit*

$$(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) = (\alpha x + \beta y - \xi_0)(\gamma x + \delta y - \eta_0)$$

*une forme quadratique non homogène, décomposable, avec*

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\xi_0$, $\eta_0$ *étant des nombres réels quelconques. On peut donner à $x$ et $y$ des valeurs rationnelles entières telles qu'on ait*

$$|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| \leqq \frac{1}{4},$$

*l'égalité n'ayant lieu que si la forme est arithmétiquement équivalente à la forme*

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(Y - \frac{1}{2}\right).$$

Minkowski avait donné de ce théorème une démonstration géométrique. L'auteur en indique, sous une forme simplifiée par Frobenius, une démonstration arithmétique.

## *Knopp* (*Konrad*). — Sur les séries de Lambert. (283-315).

Dans son *Architektonik* (Riga, 1771), Lambert a considéré la série

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n}$$

qui, développée suivant les puissances croissantes de $x$, donne

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n,$$

$\tau(n)$ désignant le nombre des diviseurs de $n$. Cette série, ainsi que certaines séries plus générales (séries de Lambert) de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1 - x^n},$$

a été étudiée par différents géomètres, entre autres T. Levi-Civita, H. Burbenne, M. Curtze, G. Torelli, Dirichlet, au point de vue de ses relations avec la théorie des nombres premiers. D'autres auteurs, en particulier Franel (*Mathematische Annalen*, t. LII, 1899) et Hansen (*Mathematische Annalen*, t. LIV, 1901), se plaçant à un point de vue différent, ont étudié la manière dont se comportent les séries de Lambert au voisinage de leur cercle de convergence. Citons le résultat obtenu par Franel, d'après lequel la fonction n'est pas prolongeable au delà du cercle unité lorsque les $b_n$ sont positifs et que la série $\sum \frac{b_n}{n}$ est convergente.

Ce sont ces résultats que l'auteur se propose de compléter et de généraliser.

1. Les domaines de convergence d'une série de Lambert sont faciles à déterminer. *Si la série $\Sigma b_n$ est convergente, la série de Lambert est convergente pour chaque valeur de $x$ dont le module est différent de 1. Si la série $\Sigma b_n$ est divergente, la série de Lambert est convergente à l'intérieur du cercle de convergence de la série $\Sigma b_n x^n$. La convergence est uniforme dans tout domaine tout entier intérieur au domaine ou à l'un des domaines de convergence de la série.*

Dans ce qui suit, l'auteur considère exclusivement le domaine *intérieur* au cercle de rayon 1 (on au cercle de convergence de $\Sigma b_n x^n$).

Le développement de la série de Lambert en série entière est facile; on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

où $a_n$ désigne la somme $\Sigma b_d$ étendue à tous les diviseurs $d$ de $n$. Réciproquement, une série entière donnée provient d'une série de Lambert bien déterminée, où l'on a

$$b_n = \sum \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d,$$

la somme était étendue à tous les diviseurs $d$ de $n$, et $\mu(m)$ désignant la

fonction de Möbius. On a, par exemple,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \frac{x^n}{1 - x^n}.$$

Citons encore la formule

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} g(x^m),$$

où $F(x)$ désigne la somme de la série de Lambert et $g(x)$ la somme de la série $\Sigma b_n x^n$; cette formule est valable pour le domaine (intérieur) de convergence de la série de Lambert.

2. Considérons la série $L(x)$ et soit $x_0 = e^{\frac{2\pi i k'}{k}}$ un point de son cercle de convergence (point *rationnel*). Si l'on sépare les termes de $L(x)$ en deux parties, ceux pour lesquels $n$ est divisible par $k$ et les autres, on voit immédiatement que le produit

$$\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) L(x)$$

augmente indéfiniment quand $x$ tend vers $x_0$ en suivant un rayon du cercle de convergence. Il en résulte que *la série* $L(x)$ *n'est pas prolongeable au delà du cercle unité.*

Plus généralement, si, pour un entier $k$ déterminé, les $k$ séries

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu+l}}{k\nu + l} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

sont convergentes et, si $x_0 = e^{2\pi i \frac{k'}{k}}$, l'expression

$$\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1 - x^n}$$

tend vers $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu}}{k\nu}$, lorsque $x$ tend vers $x_0$ suivant un rayon; c'est le théorème de Franel. Il en résulte que la série n'admet pas de prolongement analytique au delà du cercle unité si, pour une infinité de valeurs de $k$, les hypothèses indiquées sont vérifiées et si de plus $\sum \frac{b_{k\nu}}{k\nu}$ a une valeur différente de zéro. Il en est ainsi, en particulier, si les $b_n$ sont positifs et si la série $\sum \frac{b_n}{n}$ est convergente.

Par exemple, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \frac{x^n}{1 - x^n},$$

où le nombre complexe $s$ a une valeur réelle supérieure à 1, n'est pas prolongeable au delà du cercle unité.

3. On peut étendre les résultats précédents, d'une part, en soumettant les $b_n$

à des conditions moins restrictives, d'autre part, en admettant que $x$ peut tendre vers $x_0$ à l'intérieur d'un angle $\Delta$ plus petit que $\pi$ de sommet $x_0$, symétrique par rapport au rayon $(O - x_0)$ et tourné vers le point O. Le point de départ est fourni par un théorème dû à Cesàro et Pringsheim et dont voici l'énoncé :

*Soient $\Sigma a_n x^n$ et $\Sigma d_n x^n$ deux séries de puissances admettant l'unité comme rayon de convergence, la seconde ayant des coefficients positifs et étant divergente pour $x = 1$. On suppose de plus que, pour tous les points $x$ suffisamment voisins de 1 à l'intérieur d'un angle $\Delta$ de sommet 1, on ait*

$$\frac{\left|\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right|}{\sum_{n=0}^{\infty} |d_n x^n|} \geqq \alpha > 0$$

*Si alors $\frac{a_n}{d_n}$ tend vers une limite finie $g$, on a*

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n} = g.$$

Le théorème est encore vrai si l'on suppose simplement que c'est le rapport

$$\frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{d_0 + d_1 + \ldots + d_n}$$

qui tend vers $g$.

Ce théorème, appliqué aux séries de Lambert, montre que si la série $\sum \frac{b_n}{n}$ est *absolument* convergente et si $x_0 = e^{\frac{2\pi i k'}{k}}$, l'expression

$$\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1 - x^n}$$

tend vers $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{k\nu}}{k\nu}$ lorsque $x$ tend vers $x_0$ à l'intérieur de l'angle $\Delta$. Plus généralement même, la série n'est pas prolongeable au delà du cercle unité si, pour une infinité de nombres $k$, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu}{n \sum_{k\nu \leqq n} \frac{b_{k\nu}}{k\nu}} = 0.$$

Il en est ainsi pour $b_n = 1$ et aussi pour $b_n = 1$, ou 0, suivant que $n$ est premier ou non.

4. Si l'on suppose $b_n = \frac{1}{n^3}$, on constate que la limite de l'expression

$$\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1 - x^n},$$

où $x_0 = e^{2\pi i \frac{h'}{k}}$ est inversement proportionnelle à $h^4$. Ce résultat suggère que si $x_0$ était un point *irrationnel* du cercle unité, la limite serait peut-être nulle. Il en est, en effet, ainsi dans des cas étendus, et la démonstration de ce résultat est l'objet des numéros suivants.

5. L'auteur généralise le théorème de Cesàro-Pringsheim en considérant une suite infinie de séries

$$\mathfrak{p}_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)} x^n \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

admettant l'unité comme rayon de convergence; il suppose les $a_n^{(\lambda)}$ bornés dans leur ensemble

$$|a_n^{(\lambda)}| < K,$$

et, pour chaque valeur de $\lambda$, il suppose que $a_n^{(\lambda)}$ tend vers une limite $g_\lambda$. Il fait l'hypothèse suivante sur la manière dont $a_n^{(\lambda)}$ tend vers sa limite : il suppose qu'*à chaque nombre positif* $\varepsilon$ *on peut faire correspondre un entier fixe* $m$ *tel que pour*

$$n \geqq \lambda m,$$

*on ait*

$$|a_n^{(\lambda)} - g_\lambda| < \frac{\varepsilon}{1 + \beta},$$

$\beta$ *étant un certain nombre fixe. Alors on peut déterminer un triangle isoscèle fixe* $\Delta$ *de sommet* 1, *ayant pour bissectrice l'axe réel, tel qu'on ait, quel que soit* $\lambda$,

$$\left| (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)} x^n - g_\lambda \right| < \varepsilon$$

*pour tous les points* $x$ *situés à l'intérieur du triangle* $\Delta_\lambda$ *homothétique de* $\Delta$ (*par rapport à son sommet* 1), *le rapport d'homothétie étant* $\frac{1}{\lambda}$.

On peut encore généraliser ce théoreme en substituant, en ce qui concerne la convergence vers $g_\lambda$, le rapport $\frac{a_0^{(\lambda)} + \ldots + a_n^{(\lambda)}}{n+1}$ à $a_n^{(\lambda)}$.

6. Ce théorème, appliqué à une série de Lambert pour laquelle la série $\Sigma b_n$ est absolument convergente, montre qu'à chaque nombre positif $\varepsilon$, on peut faire correspondre un triangle isoscèle $\Delta$ de grandeur fixe, tel qu'on ait

$$\left| \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1 - x^n} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_\nu}{k^\nu} \right| < \varepsilon$$

pour tous les points $x$ intérieurs à un triangle $\Delta_k$ de sommet $x_0 = e^{2\pi i \frac{h'}{k}}$ et semblable à $\Delta$ dans le rapport de similitude $\frac{1}{k}$.

D'après cela, soient $\gamma$ un nombre irrationnel et $\xi = e^{2\pi i\gamma}$ le point correspondant (irrationnel) du cercle unité. L'auteur démontre que les triangles $\Delta_k$ correspondant aux points rationnels voisins, couvrent complètement tout un segment d'extrémité $\xi$ sur le rayon qui aboutit à $\xi$ (la démonstration repose sur le développement de $\xi$ en fraction continue). Par suite, *l'expresssion*

$$\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{1 - x^n}$$

*tend vers zéro quand $x$ tend vers $\xi$ en suivant le rayon.* Rappelons que la démonstration suppose la série $\Sigma b_n$ absolument convergente.

7. L'auteur a démontré précédemment (3) que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \frac{x^n}{1 - x^n}$$

n'est pas prolongeable au delà du cercle unité, si la partie réelle de $s$ est supérieure à 1. *Ce résultat est vrai quel que soit $s$.* Il suffit, en effet, d'appliquer le théorème suivant, démontré par l'auteur :

*Les deux séries de puissances*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^s x^n,$$

*où $s$ est un nombre complexe fixe quelconque, ont les mêmes points singuliers sur leur cercle de convergence.*

E. Cartan.

2me Partie

## ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO.

[Torino, V. Bona; in-8° (1).]

Tome XLVII, 1911-1912.

*Mineo* (*C.*). — [U 10] Sur une application du théorème de Dalby (6-16).

*Boggio* (*T.*). — [D 5*c*] Sur les fonctions d'une variable complexe dans une aire circulaire (22-37).

La valeur de la fonction en un point intérieur au cercle peut se trouver, par une méthode due à M. Volterra, en employant une inversion et le théorème de Gauss relatif à la valeur au centre. Du résultat ainsi trouvé, on déduit des propriétés relatives aux mouvements discontinus des liquides et puis une formule de Schwarz concernant l'oscillation de la fonction et une formule de Darboux donnant une limite supérieure pour l'oscillation. A ces formules on parvient aussi au moyen de la formule de Dini donnant la valeur de la fonction dont on connaît la dérivée normale sur la circonférence, formule que l'auteur établit aussi d'une manière différente de celle suivie par M. Dini, en employant les propriétés de la fonction potentielle logarithmique. Suivent des procédés pour déterminer la fonction dont on connaît, sur la circonférence, la partie réelle ou sa dérivée (tangentielle ou normale), ou une combinaison linéaire de la partie réelle et de sa dérivée (normale).

Enfin l'auteur étend aux fonctions de variable complexe des propriétés trouvées par M. Somigliana (*Rendiconti del'Istituto Lombardo,* t. XXXVI, 1903, p. 857) pour les fonctions harmoniques dans un champ sphérique.

*Bottasso* (*M.*). — [O 8 ref. B 12] Application des formules de Frenet (38-51).

Application du calcul vectoriel aux cas suivants :

Lignes qui peuvent se déplacer rigidement de manière à rester toujours normales aux trajectoires de leurs points. Équations intrinsèques du mouvement d'un filet tourbillonnaire. Dérivées des trois vecteurs unitaires dirigés suivant les directions principales relatives aux points d'une ligne de force.

*Burali-Forti* (*C.*). — [R 1 *d*] Sur le mouvement composé (261-265).

Déduction des théorèmes de Coriolis sur les vitesses et les accélérations, au moyen du calcul vectoriel.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXXVII$_2$, p. 100.

*Gatti* (*E.*). — [T 3 *a*] Systèmes dioptriques particuliers à grossissement constant, constitués par trois lentilles (281-299).

*Enriques* (*F.*) — [$M_2$ 8] Sur les modules d'une classe de surfaces algébriques et sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables (300-307).

L'auteur rappelle d'abord les deux manières de déterminer les $3p-3$ modules d'une classe de courbes de genre $p \geq 1$, la première au moyen du théorème d'existence pour les fonctions algébriques d'une variable, la seconde en déterminant la dimension de la série continue des courbes d'ordre donné ayant un nombre donné de points doubles.

Pour les surfaces, en n'ayant pas un théorème d'existence pour les fonctions de deux variables, l'auteur a trouvé le nombre des modules par une extension de la première méthode. En calculant les mêmes modules dans l'hypothèse qu'on ait un théorème d'existence, c'est-à-dire d'un théorème assignant les conditions pour qu'une courbe soit courbe de diramation d'un plan $n$-uple, et, en comparant les résultats, il en tire des conséquences relatives au supposé théorème d'existence, qu'il annonce comme sujet d'un autre travail.

*Segre* (*C.*). — [B 12] Les géométries projectives dans les champs des nombres duels (308-327). Note II (384-405).

Nombres *duels* (STUDY, *Jahresberichte d. deutsch. Math. Vereinigung*, 1902) sont des nombres complexes à deux unités 1 et $\varepsilon$, pour lesquels la multiplication est commutative et l'on a, $g$ et $h$ étant des quantités fixes,

$$\varepsilon^2 = g\varepsilon + h,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(\varepsilon - e_1)(\varepsilon - e_2) = 0,$$

bien entendu sans qu'il soit $\varepsilon = e_1$, ou $\varepsilon = e_2$, $\varepsilon$ n'étant pas une quantité ordinaire. Le système de nombres duels est *parabolique* lorsque $e_1 = e_2$. Un produit

$$(a + b\varepsilon)(x + y\varepsilon)$$

est nul seulement lorsque

$$a + b\varepsilon = b(\varepsilon - e_1)$$

et que

$$x + y\varepsilon = y(\varepsilon - e_2).$$

Les nombres duels de la forme $m(\varepsilon - e_1)$, $m(\varepsilon - e_2)$ sont appelés *générateurs de zéro*, de *première* et de *seconde espèce* respectivement. Dans le cas parabolique, le carré d'un tel nombre est égal à zéro.

Un *point duel* est l'ensemble des valeurs de quatre nombres duels

$$\xi_i = x_i + y_i\varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, 4).$$

En considérant les $x_i$ comme coordonnées homogènes d'un point ordinaire (complexe) $x$, et les $y_i$ comme coordonnées d'un autre point $y$, les points $x, y$ pour lesquels les rapports des quatre $\xi_i$ ne changent pas, sont entre eux dans la relation suivante :

Si le point $\xi_i$ ne se réduit pas à un point ordinaire (dans lequel cas les points $x$, $y$ coïncident), les deux points $x$, $y$ se correspondent dans une homographie qui peut se considérer comme la représentation géométrique du point duel considéré.

Étude de ces homographies.

L'ensemble des points duels vérifiant l'équation

$$\Sigma_i (u_i + v_i \varepsilon)(x_i + y_i \varepsilon) = 0$$

est un *plan duel*, et un point duel est situé sur un plan duel, lorsque la projectivité représentant le point est une section de celle qui représente le plan. Une *droite duelle* est l'ensemble des points duels dont les coordonnées sont données par

$$\lambda \xi_i + \lambda' \xi'_i .$$

$\lambda$, $\lambda'$ étant deux paramètres duels et les $\xi_i$, $\xi'_i$ les coordonnées de deux points duels. Géométriquement, une droite duelle est représentée, en général, par une collinéation biaxiale.

Dans la deuxième Note, l'auteur donne la représentation du champ binaire duel sur une quadrique. Pour le champ duel ternaire, dans le cas parabolique, la représentation se fait au moyen de la variété $V_4$ de l'espace $S_8$ introduite par Study dans sa *Geometrie der Dynamen*.

Suit l'étude de certains systèmes de points duels, analogues à ceux que l'auteur a considérés pour les points complexes ordinaires dans sa Note : *Le rappresentazioni reali delle forme complesse*, etc. (*Math. Ann.*, Bd XL) et qu'il a appelés *protofils*, *toiles*, etc. Puis un Chapitre est destiné aux *projectivités* et *antiprojectivités* dans le champ duel.

## *Pastore* (*A.*) — [V 1] Les définitions mathématiques suivant Aristote et suivant la Logique mathématique (478-494).

La règle : *Toute définition est une égalité* (Peano, *Le definizioni in matematica : Instituto de Ciencias*, Barcelona, 1911) est implicitement renfermée dans les règles d'Aristote. De même, les définitions telles qu'elles résultent des règles de la Logique mathématique satisfont à la règle aristotélique du *genre* et de la *différence spécifique*. L'accord entre la Logique aristotélique et la Logique mathématique s'étend aussi à d'autres points, exception faite pour ce qui regarde les *définitions possibles*, les *idées primitives* et l'*homogénéité* des définitions, qui sont des points caractéristiques de la Logique mathématique.

## *Bonolis* (*A.*). — [I 9 *b*] Sur les nombres premiers (576-585).

$x$ étant un nombre de $p$ chiffres et $> 13$, et $\alpha$ le plus petit nombre entier $> \frac{x}{10(p+1)}$, entre $x$ et le plus grand entier contenu en $\frac{3}{2}x - 2$ il y a au moins $\alpha$ nombres premiers.

Si $x$ est un nombre entier de $p$ chiffres et $>13$ et $\beta$ le plus grand entier $< \frac{x}{3(p-1)}$, entre $x$ et le plus grand entier de $\frac{3}{2}x - 2$ il n'y a jamais ni $\beta$ ni plus de $\beta$ nombres premiers.

Ces théorèmes sont démontrés au moyen de l'analyse de Tchebycheff.

*Daniele* (*E.*). — [U 9] Sur les centres de libration dans un problème plus général que le problème restreint des trois corps (586-600).

Dans le cas où la petite planète P peut sortir du plan $\omega$ où se meuvent les autres deux corps S, J, outre les centres de libration indiqués par M. Burgatti (*Rend. delle R. Accad. di Bologna*, 1911), il y a d'autres centres de libration dans le cas où les masses des deux corps S, J soient de signes opposés. Ces *deux* nouveaux centres se trouvent dans le plan normal à $\omega$ mené par SJ, et la nature du mouvement de P, au voisinage de l'un de ces points, dépend de celle des racines d'une équation du troisième degré. Comme cette équation a toujours une racine négative, il y a toujours des mouvements périodiques.

Exposition faite au moyen du calcul vectoriel.

*Guidi* (*C.*). — [T 2] Sur la stabilité des conductions d'eau avec des tubes de grand diamètre (704-716).

*Colonnetti* (*G.*). — [T 2] Sur les déformations élastiques des conductions d'eau à tubes de grand diamètre (767-770, une planche).

*Albenga* (*G.*). — [J 2 *e*] Compensation graphique avec la figure d'erreur (Points déterminés par intersection) (855-860).

*Padoa* (*A.*). — [J 2] Fréquence, prévision, probabilité (878-886).

*Borgatta* (*G.*). — [J 2 *g*] Sur l'ophélimité des quantités initiales et sur l'équilibre économique (933-946).

*Guidi* (*C.*). — [T 2] Sur la stabilité des conductions d'eau à tubes de grand diamètre en ciment armé (998-1013, une planche).

*Tonelli* (*L.*). — [O 3 *c*] Sur la longueur d'une courbe (1067-1075).

En égalant à zéro les dérivées $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ aux points où elles ne sont pas déterminées et finies, on a toujours

$$\int_{t'}^{t''} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = l,$$

$l$ étant la longueur de la courbe rectifiable donnée. La condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait

$$\int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = l$$

est que les $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ soient absolument continues.

Cas de l'intégrale

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

lorsque la dérivée devient infinie en un point.

## Tome XLVIII, 1912-1913.

*Scribanti* (*A.*). — [X 6] Le planimètre à hache considéré comme intégraphe pour les équations différentielles (14-18).

*Voir* aussi à la page 799.

*Bottasso* (*M.*). — [H 11] Le théorème de Rouché-Capelli pour les systèmes d'équations intégrales (19-42).

$$(1) \qquad \varphi_s(x) + \lambda \int_0^1 \Sigma_t k_{st}(x, y)\, \varphi_t(y)\, dy = \psi_s(x) \qquad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

étant un système d'équations intégrales, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions est que les $\psi_1, \ldots, \psi_m$ satisfassent aux relations

$$\int_0^1 \sum_1^m {}_s\, \psi_s(x)\, \Phi_{qs}(x)\, dx = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, p),$$

où

$$\Phi_{q1}(x), \ldots, \Phi_{qm}(x) \qquad (q = 1, 2, \ldots, p)$$

sont des solutions linéairement indépendantes du système [*adjoint* de (1) et homogène]

$$\varepsilon_{t'} \varphi_{t'}(x) + \varepsilon_t \lambda \int_0^1 \sum_1^m {}_s\, k_{ts}(y, x)\, \Phi_s(y)\, dy = 0$$

$$\varepsilon_t = \begin{cases} 1 \text{ pour } t' \leq m, \\ 0 \text{ pour } t' > m, \end{cases} \qquad \varepsilon_t = \begin{cases} 1 \text{ pour } t \leq n, \\ 0 \text{ pour } t > n, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} t \\ t' \end{pmatrix} = 1, 2, \ldots),$$

au moyen desquelles on peut exprimer linéairement toutes les autres solutions.

Pour $m = n$ et $\lambda$ général, il n'y a que des solutions identiquement nulles; pour $m = n$ et $\lambda =$ une *autovaleur*, les conditions indiquées se réduisent à celles données par M^lle^ Greggi (*Atti del R. Ist. Veneto*, 1910-1912, p. 541). L'auteur démontre le théorème pour $m < n$ et puis pour $m > n$.

L'analogie avec le cas des équations algébriques linéaires est mise en lumière en donnant au théorème concernant ces dernières équations la forme suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions finies du système

$$\sum_{1}^{n}{}_{t}\, a_{st} x_t = c_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

est que $c_1, c_2, \ldots, c_m$ satisfassent aux relations

$$c_1 y_1^{(q)} + \ldots + c_m y_m^{(q)} = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, p),$$

$y_1^{(q)}, \ldots, y_m^{(q)}$ $(q = 1, 2, \ldots, p)$ étant un système complet de solutions linéairement indépendantes du système (adjoint homogène)

$$\sum_{1}^{m}{}_{s}\, a_{st} y_s = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, n).$$

## *Astuti* (*Th.*). — [A 3 *h*] Sur la transformation de Tchirnhausen (43-46).

La transformée de l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0,$$

au moyen de la fonction transformatrice (rationnelle et entière) $\varphi(x)$, peut s'obtenir en posant

$$(2) \qquad \varphi(x) - \xi = 0,$$

et puis en écrivant la *résultante*

$$S(\xi) = 0$$

de (1) et (2). Extension au cas de la fonction transformatrice

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

## *Peano* (*G.*). — [V 1] Dérivée et différentielle (47-69).

Considérations logiques et historiques sur les notions et les notations de dérivée et de différentielle. L'auteur rapporte aussi, avec des annotations, des observations de Poincaré (*Enseignement mathématique*, 1899) sur ce sujet.

*Albenga* (*G.*). — [J 2 *e*] Problèmes économiques de tracement. Les problèmes de Launhardt et de v. Schrutka (69-76).

1° Étant donnés trois points $A_1$, $A_2$, $A_3$, trouver le point P le plus convenable pour tracer les trois chemins $PA_1$, $PA_2$, $PA_3$, $c_1$, $c_2$, $c_3$ étant les dépenses respectives pour l'unité de longueur.

2° Unir deux points donnés A, B par une courbe présentant le minimum de dépense, $\psi(x, y)\, ds$ étant la dépense pour l'élément $ds$ de la courbe.

Les deux problèmes sont traités en les ramenant à des questions mécaniques.

*Godeaux* (*L.*). — [$M_2$ 8] Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques ayant mêmes genres arithmétique et linéaire (77-87).

Soient deux surfaces algébriques $F^*$, F, ayant les mêmes genres, arithmétique $p_a$ et linéaire $p^{(1)}$, les genres géométriques respectifs $p_g^*$, $p_g$, et telles que $p_a > 0$, $p_g^* > 1$, $p_g > 1$. Si, entre ces deux surfaces, il existe une correspondance $(1, n)$, où $n$ est premier, le genre linéaire $p^{(1)}$ est égal à l'unité, les genres géométriques sont égaux et l'involution d'ordre $n$ déterminée sur F est cyclique.

*Favaro* (*A.*). — [U] Sur la flexion du petit méridien Bamberg de l'Observatoire astronomique royal de Turin (109-127).

*Voir* aussi à la page 789.

*Pieri* (*M.*). — [O 6] Sur les systèmes de $\infty$ surfaces (132-149).

Étant donnée une famille $\{\chi\}$ de surfaces, telle que par un point de l'espace en passe une et une seule, soit $k$ le vecteur unitaire fonction du point P et ayant la direction de la normale à la surface $\chi$ passant par P; $i$ et $j$ deux autres vecteurs unitaires et parallèles aux directions principales de la surface en P; les lignes K de flux de la distribution $(P, k)$ sont les trajectoires orthogonales des $\chi$. Celles I, J des deux autres distributions $(P, i)$, $(P, j)$ sont, sur chaque surface, les lignes de courbure. Soient $r_1$, $\rho_1$ les rayons de courbure normale et géodésique de I; $r_2$, $\rho_2$ ceux de J; R le rayon de première courbure de K; $n$ le vecteur unitaire parallèle à la normale principale de K; $\varphi$ l'angle des vecteurs $i$, $n$. L'auteur trouve l'expression des homographies vectorielles

$$\frac{dk}{dP}, \quad \frac{di}{dP}, \quad \frac{dj}{dP}.$$

La torsion des lignes K est donnée par

$$\frac{1}{T} = i \times \operatorname{rot} i \times \frac{d\varphi}{dP}\, k.$$

Il trouve aussi les six relations indépendantes entre $r_1$, $r_2$, $\rho_1$, $\rho_2$, R, T et $\varphi$, en les déduisant des conditions d'existence des homographies $\frac{dk}{dP}$, $\frac{di}{dP}$.

Pour que $\{\chi\}$ soit une famille de Lamé, il est nécessaire et suffisant qu'il soit

$$i \times \operatorname{rot} i = j \times \operatorname{rot} j = 0.$$

Ensuite l'auteur envisage une correspondance entre deux surfaces $\chi$, $\chi'$ infiniment rapprochées,

$$P' = P + \varepsilon k,$$

$\varepsilon$ étant la longueur infiniment petite de la normale à $\chi$, et prouve qu'une telle correspondance ne peut être conforme que tant que les $\chi$ sont des sphères ou des plans.

Enfin, il retrouve les équations de Lamé, en introduisant l'hypothèse

$$i \times \operatorname{rot} i = 0.$$

*Pensa* (*A.*). — [B 12] Sur certains opérateurs différentiels homographiques (149-154).

$\alpha$, $\beta$ étant des homographies, fonctions du point P (dans un champ à trois dimensions), et $a$ un vecteur constant, les nombres et les vecteurs

$$I_1\left[\alpha \frac{d(\beta a)}{dP}\right], \qquad I_1\left(\alpha \frac{d\beta}{dP} a\right),$$
$$2V\left[\alpha \frac{d(\beta a)}{dP}\right], \qquad 2V\left(\alpha \frac{d\beta}{dP} a\right),$$

fonctions linéaires de $a$, peuvent se mettre sous la forme $\gamma a$, $\gamma$ étant un opérateur convenable.

L'auteur trouve cet opérateur pour chacun des cas considérés, en démontrant, par exemple, qu'on a

$$I_1\left(\alpha \frac{d(\beta a)}{dP}\right) = [\operatorname{grad.}(K\beta K\alpha) - K\beta \operatorname{grad.} K\alpha] \times a.$$

*Sannia* (*G.*). — [$N_2$ 1 *g*] Équation différentielle des congruences W (155-170).

L'équation de Darboux

$$\alpha_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \alpha_{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \alpha_{22} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \alpha \varphi = 0$$

est transformée par l'auteur en introduisant d'autres coordonnées. Au lieu de prendre pour coordonnées les cosinus X, Y, Z et les quantités

$$l = yZ - zY,$$
$$m = zX - xZ,$$
$$n = xY - yX,$$

il prend les X, Y, Z mêmes et deux fonctions quelconques $a$, $b$ de $u$, $v$, ayant posé

$$l = a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial X}{\partial v},$$

$$m = a\frac{\partial Y}{\partial u} + b\frac{\partial Y}{\partial v},$$

$$n = a\frac{\partial Z}{\partial u} + b\frac{\partial Z}{\partial v}.$$

Il arrive ainsi à une équation différentielle

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$c_{11} = \frac{\partial^2 a}{\partial u^2} + \left\{ {11 \atop 1} \right\}\frac{\partial a}{\partial u} - \left\{ {11 \atop 2} \right\}\frac{\partial a}{\partial v} + 2\left\{ {12 \atop 1} \right\}\frac{\partial b}{\partial u} + a\frac{\partial}{\partial u}\left\{ {11 \atop 1} \right\} + b\frac{\partial}{\partial v}\left\{ {11 \atop 1} \right\},$$

$$c_{12} = \frac{\partial^2 b}{\partial u^2} + 2\left\{ {11 \atop 2} \right\}\frac{\partial a}{\partial u} + \left( 2\left\{ {12 \atop 2} \right\} - \left\{ {11 \atop 1} \right\} \right)\frac{\partial b}{\partial u} - \left\{ {11 \atop 2} \right\}\frac{\partial b}{\partial v} + a\frac{\partial}{\partial u}\left\{ {11 \atop 2} \right\} + b\frac{\partial}{\partial v}\left\{ {11 \atop 2} \right\},$$

$$c_{13} = \lambda E\frac{\partial a}{\partial u} + 2F\frac{\partial b}{\partial u} + a\frac{\partial E}{\partial u} + b\frac{\partial E}{\partial v},$$

.....

La propriété que toute congruence contenue dans un complexe linéaire est une congruence W, est caractéristique pour les complexes linéaires.

*Perucca* (*E.*). — [T 3 *b*] Analyse des vibrations lumineuses elliptiques (201-221).

*Lignana* (*G.*). — [T 6] Sur la mesure du travail d'hystérèse magnétique (221-235).

*Guidi* (*C.*). — [T 2 *b*] Sur le calcul statique des réservoirs cylindriques en béton armé (287-296).

*Rossi* (*A.-G.*). — [T 3 *b*] Sur certaines transformations des formules sur la réflexion et la polarisation et sur quelques expériences relatives à la pression de la lumière (297-343).

*Giudice* (*F.*). — [A 3 *g*] Interprétation géométrique de la méthode de Lagrange (375-384).

*Bompiani* (*E.*). — [O 5 *f* ref. Q 2] Sur certaines extensions des théorèmes de Meusnier et d'Euler (393-410).

Le théorème de Meusnier peut prendre la forme suivante : Les cercles osculateurs aux courbes d'une surface, en un point où elles ont une même tangente, sont sur une sphère tangente à la surface. L'auteur en fait une extension, en assignant la distribution des espaces osculateurs (d'une dimension donnée) à des courbes d'une variété $V_m$ de $S_n$ passant par un point de $V_m$ et y ayant en commun les espaces osculateurs jusqu'à ceux de la dimension donnée.

*Terracini* (*A.*). — [$M_2$ 7 *c* ref. Q 2] Sur les variétés d'espaces ayant caractère de développables (411-433).

L'extension de la propriété des développables consiste à considérer au lieu d'un système $\infty$ de droites, un système $\infty^\alpha$ d'espaces $S_k$, tel qu'un de ces $S_k$ rencontre en un $S_l$ ($l \geqq 0$) tous les $S_k$ du système qui lui sont infiniment voisins. La détermination de ces systèmes a été faite par M. Segre : 1° pour le cas où les $S_k$, infiniment voisins de l'un d'entre eux, le rencontrent suivant un même $S_l$; 2° pour le cas de $\alpha = 1$ et $k$ quelconque; 3° pour $\alpha$ quelconque et $k = 1$; 4° pour $\alpha = k = 2$. L'auteur traite le cas de $\alpha = 2$ et $k$ quelconque, et quelques autres cas.

*Guidi* (*C.*). — [T 2 *b*] Sur les déformations des tubes de grand diamètre (521-533).

*Laura* (*E.*). — [T 3 *b*] Sur la formule de Kirchhoff pour la propagation des ondes (557-563).

*Albenga* (*G.*). — [T 2 *b*] L'inflexion latérale des pilotages de fondation (569-575).

*Quarra* (*P.*). — [C 2 *j*] Le reste dans quelques formules de quadrature (643-653).

*Severi* (*F.*). — [$M_1$ 2 *e*] Sur certaines propriétés arithmétiques des correspondances entre les points d'une courbe algébrique (660-674).

Le nombre $u$ des points unis d'une correspondance T d'indices ($\alpha$, $\beta$) et de degré $2\mu$, sur une courbe de genre $p$, satisfait toujours à l'inégalité

$$(n - \alpha - \beta)^2 \leqq 4p(\alpha\beta - \mu),$$

où le signe $=$ correspond seulement au cas où T est *à valence*.

*Peano* (*G.*). — [V 1] Sur la définition de limite (750-772).

*Favaro* (*G.-A.*). — [U] Sur la flexion du cercle méridien Reichenbach de l'Observatoire astronomique royal de Turin (789-798).

*Voir* aussi à la page 109.

*Scribanti* (*A.*). — [X 6] Encore sur le planimètre à hache appliqué à l'intégration d'équations différentielles (799-814).

*Voir* aussi à la page 14.

*Carnera* (*L.*). — [J 2*e*] Observations sur le calcul des erreurs moyennes (815-821).

*Somigliana* (*C.*) et *Vercelli* (*F.*). — [T 4] Considérations complémentaires au Mémoire « Sur la prévision mathématique de température dans les grands tunnels des Alpes » (836-843).

*Colonnetti* (*G.*). — [T 2] Sur la théorie des arcs (849-853).

*Chelli* (*F.*). — [U] Première détermination de la latitude de la salle méridienne du nouvel Observatoire de Turin à Pino Torinese (873-892).

S. Rindi.

## ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA (1).

Serie II. Tome XXV (février à juillet 1897).

*Segre* (*C.*). — Sur la décomposition des points singuliers des surfaces algébriques (1-53).

Soit une surface algébrique F et O un point multiple d'ordre $s$ de cette surface. Par une transformation quadratique admettant O comme point fondamental, la surface F devient une surface F′ et le point O a pour image toute une ligne C′. A un point infiniment voisin de O dans une certaine direction O$t$ correspond un point O′ de C′ : soit $s'$ l'ordre de multiplicité de O′ pour la surface F′; on a $s' \leqq s$. Aux diverses directions O$t$ correspondent ainsi pour $s'$ des valeurs $s'_1, s'_2, \ldots$, en général $s'_i$, en nombre fini. Par une nouvelle trans-

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVIII$_2$, p. 129-136.

formation quadratique on peut opérer sur O′ comme on avait opéré sur O, ce qui donne des nombres $s''_{ik}$, et ainsi de suite. On est ainsi conduit à considérer un point singulier quelconque comme composé d'une suite de points multiples infiniment voisins de O, auxquels correspondent les *nombres caractéristiques* $s, s'_i, s''_{ik}, \ldots$. Étant donné un cycle de courbe algébrique passant par O, on peut avoir d'une façon précise, en fonction de ces nombres caractéristiques, le nombre des points d'intersection de la surface avec ce cycle.

M. Segre examine d'abord quelques cas particuliers, notamment le cas où O est un point double suivi d'un point double infiniment voisin ($s = s' = 2$), ou un point double suivi de trois points doubles infiniment voisins dans trois directions différentes ($s = 2$; $s'_1 = s'_2 = s'_3 = 2$).

Pour aller plus loin, il particularise la transformation quadratique en lui donnant la forme

$$x = x'z', \qquad y = y'z', \qquad z = z'.$$

Ceci permet d'avoir les caractères analytiques particuliers à divers points singuliers, en particulier à diverses espèces de points doubles (point uniplanaire, point-pince, point tacnodal, point clos d'une ligne de rebroussement).

L'auteur applique la théorie précédente à la recherche de l'influence des divers points singuliers sur l'abaissement de la classe d'une surface algébrique, en se limitant toutefois à des cas particuliers. Il étudie aussi la singularité présentée, en un point singulier d'une surface algébrique, par les polaires de cette surface par rapport aux divers points de l'espace.

Les notions précédentes jouent un rôle essentiel dans le problème de la transformation birationnelle d'une surface algébrique quelconque en une autre surface qui n'ait que des singularités ordinaires. Tout d'abord M. Segre rappelle et discute la méthode donnée à cet effet par M. Del Pezzo, méthode consistant à transformer la surface F donnée en une surface F′, sans points multiples, d'un certain hyperespace $S_r$, puis à projeter F′ d'un espace $S_{r-4}$ sur l'espace ordinaire. L'introduction des nombres caractéristiques $s, s'_i, s''_{ik}, \ldots$ définis dans ce travail permet de transformer cette méthode en la précisant. On peut, en effet, définir à l'aide de $s, s'_i, s''_{ik}, \ldots$ le *degré de complication* d'une singularité et transformer birationnellement F en une surface hyperspatiale F′ dont les singularités présentent un degré de complication moindre que celles de F : par des transformations birationnelles successives, on peut obtenir ainsi une surface hyperspatiale sans points multiples qui, projetée sur $S_3$, donnera finalement une surface n'ayant comme singularités qu'une ligne double et des points triples isolés, c'est-à-dire des singularités ordinaires.

## *Stœckel (P.)*. — Sur les intégrales quadratiques des équations différentielles de la dynamique (55-60) [en allemand].

Dans un article publié au Tome XXIV des *Annali*, M. Di Pirro a indiqué comment on peut obtenir des problèmes de dynamique à $n$ paramètres admettant, outre l'intégrale des forces vives, d'autres intégrales quadratiques en nombre $n-2$, $n-3$, .... L'auteur montre comment ces problèmes peuvent être considérés comme des cas particuliers de problèmes plus généraux qu'il a étudiés dans sa Note *Sur l'intégration de l'équation différentielle de Hamilton* (*Comptes rendus*, octobre 1895).

*Pirondini* (*G.*). — Une question de géométrie (61-66).

Complément à l'article sur la symétrie orthogonale par rapport à une surface de révolution Σ publié au Tome XXII des *Annali*. La question étudiée ici est la suivante : Connaissant les deux surfaces S, $S_1$ symétriques l'une de l'autre par rapport à Σ, déterminer la surface de révolution Σ. Cette question est traitée complètement dans quelques cas particuliers.

*Pannelli* (*M.*). — Sur la réduction des singularités d'une surface algébrique au moyen de transformations birationnelles de l'espace (67-138).

L'auteur étudie dans ce Mémoire une transformation cubique birationnelle définie de la façon suivante.

Supposons qu'à un faisceau de rayons de centre O d'un espace Σ on fasse correspondre dans l'espace Σ′ un faisceau de rayons de centre O′, la correspondance étant quadratique; d'autre part, à un faisceau de plans Π ayant pour axe une droite *s* de Σ faisons correspondre homographiquement dans Σ′ un faisceau de plans Π′ ayant pour axe une droite *s*′ de Σ′. A tout point P de l'espace Σ, défini par l'intersection d'un plan Π et de la droite OP du faisceau O correspond ainsi un point P′ de l'espace Σ′, défini par l'intersection du plan Π′ et de la droite O′P′ homologue de OP dans le faisceau O′.

Après avoir établi les formules qui définissent la transformation, l'auteur en étudie en détail les propriétés et il les applique ensuite à une surface F possédant un point multiple A d'ordre *i*, avec en ce point un cône des tangentes simple possédant une génératrice multiple d'ordre $j$ ($j \leqq i$). En choisissant d'une façon convenable les éléments fondamentaux de la transformation, l'auteur montre que l'emploi de cette transformation permet d'effectuer, dans des cas très généraux, la réduction de la singularité que présente la surface F au point A. Il se réserve de revenir, dans un Mémoire ultérieur, sur les cas où la transformation actuelle ne permet plus cette réduction.

*Volterra* (*V.*). — Sur quelques questions relatives à l'inversion de certaines intégrales définies (139-178).

Ce Mémoire fait suite à quelques Notes du même auteur publiées en 1896 dans les *Atti Torino* et dans le *Rendiconti Lincei*. C'est dans ces Notes et dans ce Mémoire qu'on voit apparaître pour la première fois les équations fonctionnelles connues aujourd'hui sous le nom d'*équations intégrales de Volterra*. Le Mémoire que nous analysons ici a donc une importance capitale dans l'histoire de cette théorie devenue classique. Comme la théorie a été exposée dans ces dernières années sous forme didactique par divers auteurs, nous nous bornerons à indiquer rapidement ici les matières contenues dans les trois articles de ce Mémoire et nous renverrons le lecteur, pour un exposé plus détaillé, au Chapitre II des *Leçons sur les équations intégrales*, de M. Volterra (Paris, Gauthier-Villars, 1913), où l'on trouvera reproduits, avec une terminologie moderne, les points principaux du Mémoire que nous analysons ici.

*Article I.* — Histoire du problème de l'inversion des intégrales définies. Problèmes d'Abel, de Liouville. — Le calcul des coefficients du développement

d'une fonction arbitraire en une série de fonctions de Bessel conduit Schlömilch à un problème d'inversion d'intégrale définie. Autres développements analogues envisagés par Beltrami et par Dini. — Mémoire de Sonine (*Acta. mathem.*, 1884).

Résumé des Notes antérieures de l'auteur. La solution de l'équation

$$f(y) = \varphi(y) - \int_a^y \varphi(x)\, S_0(x, y)\, dx,$$

où $\varphi$ est la fonction inconnue, est obtenue par M. Volterra à l'aide de trois principes qu'il appelle *principe de convergence*, *principe de réciprocité* et *principe d'inversion*. — Extension au cas d'un système de $n$ équations intégrales à $n$ fonctions inconnues analogues à l'équation précédente. — Extension au cas où la fonction inconnue est une fonction de plusieurs variables.

M. Volterra résout ensuite des équations intégrales [1] appartenant à la catégorie qu'on appelle aujourd'hui *équations de première espèce*. Cas d'un noyau $H(x, y)$ ne s'annulant pas pour $x = y$. Cas d'un noyau de la forme $F[\lambda(x) - \lambda(y)]$. Cas d'un noyau de la forme $\frac{G(x, y)}{(x-y)^\lambda}$, G demeurant fini, avec $\lambda < 1$, ce qui comprend en particulier les cas d'Abel et de Sonine. Cas plus général d'un noyau s'annulant pour $x = y$.

*Article II.* — Problèmes où les deux limites de l'intégrale sont variables. M. Volterra se sert du calcul des différences finies pour résoudre, sous certaines hypothèses relatives à $f$ et à $H(x, y)$, l'équation intégrale

$$f(y) - f(0) = \int_{\alpha y}^{y} \theta(x)\, H(x, y)\, dx, \qquad |\alpha| < 1,$$

où $\theta$ est la fonction inconnue. Il résout ensuite l'équation

$$f(y) = \int_{py}^{qy} \varphi(x)\, H(x, y)\, dx, \qquad \left|\frac{p}{q}\right| \neq 1,$$

puis l'équation à limites constantes, déjà envisagée par Abel,

$$f(y) = \int_p^q \varphi(x, y)\, K(x, y)\, dx, \qquad \left|\frac{p}{q}\right| \neq 1.$$

*Article III.* — Application des formules de l'article I au cas particulier traité par Sonine. Application des mêmes formules au cas où le noyau est de la forme $F[\lambda(x) - \lambda(y)]$ et où la fonction $F(z)$ est une série de puissances : le noyau résolvant est obtenu sous la forme d'une autre série de puissances qui se déduit de la première par une transformation simple.

---

[1] Nous avons pensé qu'il n'y avait aucun inconvénient à employer ici les mots « équations intégrales », « noyau », « noyau résolvant », quoique leur introduction dans la théorie soit bien postérieure au Mémoire analysé ici.

*Medolaghi* (*P.*). — Sur la théorie des groupes infinis continus (179-217).

M. Engel (*Math. Annalen*, 1886) a montré qu'il y avait une correspondance remarquable entre les équations de définition des transformations infinitésimales d'un groupe infini et certains groupes *finis* de composition particulière, groupes que l'auteur désigne par $\gamma_{sn}$. L'auteur étend au cas général la détermination de la composition de ces groupes $\gamma_{sn}$ effectuée par M. Engel dans le cas où les équations de définition sont du premier ou du second ordre.

Lie a trouvé que les équations des transformations finies d'un groupe infini avaient la forme

$$(1)\quad I_k\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx_1}, \cdots\right) = \alpha_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad [k = 1, 2, \ldots, m].$$

L'auteur précise la nature de ces fonctions $I_k$ en montrant que tout système (1) se déduit d'un groupe fini $\gamma_{sn}$ en remplaçant, dans les équations finies de ce groupe

$$z'_k = f_k(z_1, z_2, \ldots, z_m, a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

les variables $z_1, z_2, \ldots, z_m$ par certaines fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, les variables $z'_1, z'_2, \ldots, z'_m$ par les mêmes fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et enfin les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par certaines fonctions de $\frac{dy_1}{dx_1}, \cdots$ dont l'auteur indique la détermination.

Suivent quelques conséquences et quelques applications.

*Maillet* (*Ed.*). — Des groupes transitifs de classe $ef$ ($e$ et $f$ étant premiers, avec $5 \leq e \leq f$) et de degré $ef + k$ ($k$ étant $< e$) (219-234).

L'auteur démontre qu'un pareil groupe ne peut exister qu'à l'une des conditions suivantes :

1° $k \leq 2$, $ef = 4h + 3$;
2° $f > e + 1 = 2^r$;
3° $f \geq 2e + 3$.

Application aux groupes transitifs des 100 premières classes.

*Castelnuovo* (*G.*). — Quelques propriétés fondamentales des systèmes linéaires de courbes tracés sur une surface algébrique (235-318).

Les résultats fondamentaux de cet important Mémoire se trouvent exposés aujourd'hui dans les Chapitres IV et V du Tome II de l'Ouvrage classique de MM. Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, et dans la Note V du même Ouvrage, rédigée par MM. Castelnuovo et Enriques. Nous nous bornerons donc à donner ici les titres des principaux paragraphes de ce travail et l'indication de quelques résultats.

Le Chapitre I est consacré aux systèmes linéaires de surfaces définis par des *éléments-bases*. — Définition du *comportement* d'une surface en un point O à l'aide des nombres caractéristiques $s$, $s_i$, $s_{ik}$, ... introduits par M. Segre dans le Mémoire analysé plus haut. — Système linéaire défini par son comportement suivant certaines lignes-bases et en certains points-bases donnés. — Systèmes complets. — Système de courbes déterminé par un système linéaire de surfaces sur un plan quelconque. L'auteur démontre qu'un système linéaire de surfaces d'ordre suffisamment élevé, avec un comportement donné le long de certaines lignes-bases, découpe sur un plan général un système de courbes complet et régulier. — Dimensions d'un système complet de surfaces.

Le Chapitre II est consacré aux propriétés fondamentales des systèmes de courbes appartenant à une surface algébrique. — Systèmes linéaires de courbes sur une surface. — Opérations élémentaires sur ces systèmes (addition, soustraction, multiplication par un entier $k$). — Définition invariantive et définition projective du système adjoint à un système donné. — Système canonique de courbes sur une surface. Genre géométrique et genre numérique de la surface. — Surfaces adjointes des divers ordres. — Propriété fondamentale de la série caractéristique d'un système complet de courbes : sur une surface de genres $p_g$, $p_n$, tout système linéaire complet de courbes a une série caractéristique dont le défaut ne peut dépasser $p_g - p_n$. — Application de ce théorème aux surfaces régulières ($p_g = p_n$) et aux surfaces irrégulières. — Exemples.

Dans le Chapitre III, l'auteur se sert des méthodes et des résultats du Chapitre II pour poursuivre l'étude des systèmes linéaires de courbes tracés sur une surface, en appliquant ces méthodes et ces résultats à quelques points choisis parmi les plus intéressants. — Systèmes spéciaux et systèmes non spéciaux de courbes tracées sur une surface : indice de spécialité. — Relation fondamentale

$$r - n + \pi - 1 = p_n - i,$$

où $r$ est la dimension, $n$ le degré, $\pi$ le genre et $i$ l'indice de spécialité d'un système linéaire complet. — *Surabondance* d'un système. — Systèmes mutuellement *résiduels* à l'égard du système canonique. — Influence sur la surabondance d'un système des points-bases et de la suppression d'une courbe. — Sur la régularité du système $|C' + kC|$ formé à l'aide d'un système $|C|$ et du système adjoint $|C'|$.

S. Lattès.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXVIII.

53476 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

# TABLES

DES

# MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXVIII; 1914. — SECONDE PARTIE.

---

## TABLE ALPHABÉTIQUE

### DES MATIÈRES.

---

### RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Annali di Matematica pura ed applicata. T. XX, 1892 (85-87); T. XXI, XXII, 1833, 1894 (82-96); T. XXIII, XXIV, 1896, 1897 (171-176).
Atti della R. Accademia dei Lincei. T. VII, VIII, IX, 1898-1900 (27-53).
Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. T. XLVII, XLVIII, 1912, 1913 (161-171).
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. 154, 155, 1912 (54-66); T. 156-157, 1913 (66-85).
Journal für die reine und angewandte Mathematik. T. CXLII, 1913 (97-125 et 146-160).
Prace Matematyczno-Fizycno, T. XII, 1911 (5-16); T. XXIII, 1912 (25-27).
Rendiconto del Circolo matematico di Palermo, T. VIII, IX, 1894, 1895 (136-146).
Rendiconto delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. T. V, 1900-1901 (16-25).

# TABLE DES NOMS D'AUTEURS

## PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.


Albengo (G.). 164, 167, 170.
Almansi (E.). 36-37, 49-50.
Amaldi (U.). 29.
Amici (N.). 141.
Amodeo (F.). 87, 90, 129.
Andrade (J.). 63, 67, 72, 74, 75, 80.
Anghelatza (Th.). 75, 79.
Appell (P.). 58, 69, 70, 71, 75, 76, 77, 78, 83.
Arzelà (C.). 16, 18, 19, 20, 21, 22, 24-25.
Ascione (E.). 145.
Ascoli (G.). 85, 87, 125-126.
Astalti (Th.). 166.
Autonne (L.). 64, 71.
Axer (A.). 11-13.
Bachelier (L.). 67.
Bachmann (P.). 104-105.
Banachiewicz (T.). 7.
Banal (R.). 45, 131-144.
Barré. 60, 73, 79.
Belsetsky (S.). 73.
Benard (H.). 73.
Bernstein (S.). 55, 65, 83.
Bertini (E.). 34, 92-93, 96.
Berzolari (L.). 86, 88, 131, 144.
Bettazi. 85.
Bianchi (L.). 31-33, 37-38, 39-40, 43-44, 50-51, 52, 90-91, 125, 130-131, 135-136.
Bilimovitch. 69, 74.
Boggio (T.). 161.
Bohr (H.). 59.
Bompiani (E.). 70, 170.
Bonolis (A.). 163-164.
Borel (E.). 54, 56, 58, 59, 60, 61, 63, 68, 82.
Borgatta (G.). 164.
Bortolotti (E.). 27, 28, 36, 128-129, 143.
Bottasso (M.). 161, 165-166.
Boulad Bey (F.). 71.
Bouligand (G.). 60, 75, 83.
Bourlet (C.). 72.
Boussinesq (J.). 55, 58, 62, 72, 73, 78, 79.
Brioschi (F.). 87, 92, 126, 134, 135.
Brouwer (L.-E.-J.). 116-117.
Browne (F.). 62.
Browne (P.). 60, 65.
Buhl (A.). 61, 62, 77.
Burali-Forti (C.). 141, 161.
Burau (C.). 105.
Burgatti (P.). 23, 24, 25, 44-45, 52, 53, 127-128, 143.
Burkhardt (H.). 74, 95.
Calò (B.). 90, 127.
Carathéodory (C.). 61.
Carnera (L.). 171.
Carrière (Z.). 78.
Cartan (E.). 112, 125, 160.
Castelnuovo (G.). 175-176.
Cayley. 85.
Cerruti (V.). 48, 140.
Chapelon (J.). 70, 77.
Châtelet (A.). 56, 86.
Chazy (J.). 58, 61, 63, 81, 84.
Chelli (F.). 171.
Chipart. 81.
Ciani (E.). 87.
Ciappi (A.). 39.
Cisotti (U.). 64, 70.
Clairin (J.). 61, 71.
Colonetti (G.). 164, 171.
Cordone (G.). 145.

Cotton (E.). 73.
Cotty (G.). 55, 56, 75.
Crelier (L.). 131.
Crussard (L.). 70.
Daniele (E.). 164.
Darboux (G.). 65, 72.
Darmois (G.). 83.
Delassus (E.). 58, 59, 68, 71.
Del Re (A.). 45-46.
Denjoy (A.). 59, 63.
Demoulin (A.). 66, 83, 84.
Dickson (L.-E.). 146.
Di Legge. 50.
Di Pirro (G.). 134, 144.
Donati (L.). 18, 20, 24.
Donder (Th. de). 63, 65, 69, 70, 71.
Drach (J.). 56, 85.
Egoroff (Th.). 65.
Enriques (F.). 56, 142, 162.
Enriquez (F.). 19, 20, 21, 22, 23, 24, 34, 35.
Esclangon (E.). 84.
Faboni (G.). 41.
Fabry (E.). 77.
Fano (G.). 41, 45, 89, 142.
Favaro (G.-A). 167, 171.
Fejér (L.). 66, 81, 118-121.
Fekete (M.). 81.
Fichet (E.). 57, 68.
Fiedler (R.). 58.
Fouret (G.). 141.
Francesco (D. de). 49.
Fremont (Ch.). 59.
Garibaldi (C.). 140, 145.
Garnier (R.). 59, 60, 63.
Gateaux (R.). 80.
Gatti (E.). 162.
Gau (P.-E.). 67.
Geöcze (Z. de). 59.
Gerbaldi (F.). 136, 144.
Gevrey (M.). 62, 64, 69, 83, 144, 146.
Giacomelli (F.). 50.
Giraud (G.). 67, 84.
Giudia (F.). 169.
Godeaux (L.). 63, 74, 77, 167.
Gosiewski (W.). 16.
Goursat (E.). 82.
Got (Th.). 76, 77, 79.
Graf (I.-H.). 125.
Gronwal (Th.). 64.
Guccia (G.-B.). 141, 142.
Guichard (C.). 57, 59, 64, 71, 80, 85.
Guidi (C.). 164, 169, 170.
Gunther. 74, 81.
Hadamard (J.). 54, 75.
Hardy (G.-H.). 74.
Hartmann (L.). 57.
Hermite (Ch.). 91-92.
Hortinsky (B.). 84.
Humbert (G.). 83.
Jamet (V.). 57, 78.
Janet (M.). 67, 81, 87.
Jonas (H.). 77.
Jordan (Ch.). 58.
Jouguet (E.). 72.
Jung (H.-W.-E.). 57, 106-112.
Kampé de Férié. 82, 84.
Kantor (S.). 142.
Keraval (E.). 82.
Klein (F.). 127.
Knopp (C.). 155-160.
Koenigs (G.). 67, 83.
Kohn (G.). 146.
König (R.). 122-125.
Korn (A.). 78.
Kostitzin (V.). 68.
Kryloff (N.). 76.
Kürschák (J.). 146-154.
Landau (E.). 75.
Laisant (C.-A.). 142.
Lattès (S.). 66, 96, 128, 136, 176.
Lauer (H.). 16, 27.
Laura (E.). 170.
Lauricella (G.). 128.
Léauté (L.). 54.
Lebesgue (H.). 55, 64.
Lémeray. 65.
Lemke (K.). 112-116.
Leinekugel Le Coq (C.). 60.
Le Roux (J.). 69, 70.
Levi (B.). 50.
Levi-Civita (T.). 40-41, 43, 46, 48, 80, 132-133.
Lévy (P.). 54, 60, 75, 77.
Lichtenstein (L.). 5-7, 25-26, 72, 81, 84, 97-104, 122.
Lienard. 81.
Lignana (G.). 169.
Littlewood (J.-E.). 55, 74.
Lukacs (F.). 81.
Lusin (N.). 61, 63, 65, 77.
Maccaferri (E.). 143.

Maillet (E.). 127, 175.
Marcolongo (R.). 95, 126, 133-134.
Mayor (B.). 58.
Medolaghi (P.). 42, 47, 175.
Menasger (M.). 62, 68.
Miller (G.-A.). 11, 26.
Millosevich (E.). 34, 35, 39, 46, 47, 48, 50, 51, 53.
Mineo (C.). 161.
Montel (P.). 65, 66, 78.
Moore (Ch.-N.). 62.
Morano (F.). 28.
More (E.-H.). 142.
Moulin (M.). 75, 78, 80.
Muntz (Ch.). 66, 71.
Nörlund. 66, 67.
Ocagne (M. d'). 65, 76.
Osgood (W.-F.). 76.
Paci (P.). 30-31, 136.
Padoa (A.). 164.
Panelli (M.). 95-96, 173.
Parenty (H.). 54, 55.
Pascal (E.). 86, 87, 89, 127, 129, 131, 132.
Pastore (A.). 163.
Pchéborski (A.). 69.
Peano (G.). 126, 166, 171.
Pennachietti (G.). 143.
Pensa (A.). 168.
Pereno (I.). 89.
Perès (J.). 69.
Perucca (E.). 169.
Petot (A.). 57, 64.
Petrovitch (M.). 56, 78, 82.
Picard (E.). 54, 61, 72, 76, 82, 144, 145-146.
Pick (G.). 55.
Pieri (M.). 167-168.
Pincherle (S.). 16-18, 19, 20, 21, 22-23, 24, 38-39, 40, 89.
Pirondini (G.). 88, 95, 126, 173.
Pittarelli (G.). 96.
Pizzetti (P.). 27.
Plancherel (M.). 64, 80.
Platrier. 78, 79.
Poincaré (H.). 137-140.
Polya (G.). 64, 72, 74, 82.
Pompéia (D.). 68.
Popoff (K.). 84.
Porcht (Th.). 78.
Quarra (P.). 170.
Rabinowitsch (G.). 117-118.
Rajchman (A.). 160.
Rajna (M.). 21.
Razzaboni (A.). 23.
Reignier (C.). 58.
Reina (V.). 49.
Rema (K.-R.). 105, 155.
Remoundos (G.). 64, 66, 71, 73, 80, 81.
Riesz (F.). 57.
Righi (A.). 18.
Rindi (S.). 16, 25, 32, 48, 53, 168, 171.
Robinson. 79.
Rosanes (J.). 105-106, 154-155.
Rosenblatt (A.). 26, 60, 66, 68, 85.
Rossi (A.-G.). 169.
Rouyer. 60.
Roy (L.). 54, 58, 74, 77.
Ruffini (F.-P.). 16, 18, 20, 21, 22.
Rybczinski. 26.
Saltykow (N.). 64.
Sannia (G.). 70, 168-169.
Scribanti (A.). 165, 171.
Segre (C.). 45, 51, 87, 93-94, 162-163, 171, 172.
Seguier (de). 80.
Severi (F.). 50, 52, 68, 170.
Sierpinski (W.). 7, 9-11, 13-14, 25, 27.
Soler (E.). 141.
Somigliana (C.). 35-36, 46, 85-86, 94, 130, 171.
Soreau (R.). 56, 57, 65, 79.
Sparre (M. de). 28-29, 76.
Staeckel (P.). 172.
Stiemke. 79.
Stranec (P.). 34, 43.
Tacchini (P.). 35, 36, 39, 43, 47, 49, 52.
Tamarkine (J.). 55, 76.
Tarnarider (M^lle Th.). 70.
Terracini (A.). 170.
Tillinger (S.). 69.
Tœplitz (O.). 14-15.
Tomasseti (M.). 81.
Tonelli (L.). 164-165.
Tonoto (A.). 68.
Torelli (G.). 137, 141.
Tzitzéica. 54, 55, 59, 68, 70, 73, 82.
Valiron (G.). 69, 73.
Valtier (F.). 55.
Vergne (H.). 77.
Vessiot (E.). 56, 57, 83.

Villat (H.). 61, 67, 69, 81.
Viola (C.). 49, 50, 52.
Viterbi (A.). 47, 48.
Vivanti (G.). 88, 90, 143, 145.
Voigt (W.). 36.
Volterra (V.). 128, 129-130, 173-174.
Vriès (J. de). 141.
Wolfke (M.). 16.
Young (W.-H.). 62, 63, 66.
Zarlatti (F.-S.). 79-81.
Zerowski (K.). 7-9.
Zignago (I.). 88-89.
Zoard de Geörze. 82.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXVIII.

53308 Paris — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et C^ie, quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
B8
v. 49
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Bulletin des sciences
mathématiques

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY